The 36th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2013)
Ito, Shizuoka, Japan, Nov. 26–29, 2013

ある補助平均函数の凹性と一般化歪情報量の不確定性関係
Concavity of an auxiliary mean function and uncertainty relation of generalized skew information

柳 研二郎* 古市 茂† 栗山 憲‡
Kenjiro Yanagi Shigeru Furuichi Ken Kuriyama

Abstract— We give a Heisenberg type or a Schrödinger-type uncertainty relation for generalized metric adjusted skew information or generalized metric adjusted correlation measure. These results generalize our previous result in [1]. In particular we prove concavity of an auxiliary mean function and show an example of our result.

Keywords— Trace inequality, metric adjusted skew information, metric adjusted correlation measure

1 Introduction

Wigner-Yanase 歪情報量 (skew information) は [12] で次のように定義されている.

$$
\begin{aligned}
I_\rho(H) &= \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2},H\right]\right)^2\right] \\
&= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^{1/2}H\rho^{1/2}H].
\end{aligned}
$$

この量は量子状態 ρ と物理量 H の間のある種の非可換の度合いを表すものと考えられる. ここで commutator を $[X,Y]=XY-YX$ と表す. またこの量は Dyson によって次のように一般化され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$
\begin{aligned}
I_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha,H])(i[\rho^{1-\alpha},H])] \\
&= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H\rho^{1-\alpha}H], \alpha\in[0,1]
\end{aligned}
$$

$I_{\rho,\alpha}(H)$ は ρ に関して凸であることが E.H.Lieb [9] によって証明されたことはよく知られている. Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の関係は [10]. で最初に得られた. さらに Wigner-Yanase-Dyson skew information と uncertainty relation の関係については [7, 13] によって与えられた. その後 [13, 14] において一般化された歪情報量が定義され, ある種の uncertainty relation が得られた. また [15] においてはそれをさらに two parameter 化して uncertainty relation を得た. この論文では一般化された metric adjusted skew information および metric adjusted correlation measure を用いて量子 Fisher 情報量に関連した不確定性関係を求めることでさらなる拡張を得る. 特に補助平均函数の凹性を用いてその例を与える.

* 山口大学大学院理工学研究科, 〒 755-8611 山口県宇部市常盤台 2-16-1, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube 755-8611, Japan, E-mail:yanagi@yamaguchi-u.ac.jp
† 日本大学文理学部, 〒 156-8550 東京都世田谷区桜上水 3-25-40, Fuculty of Humanities and Sciences, Nihon University, 3-25-40, Sakurajyousui, Setagaya-ku, Tokyo, 156-8550, Japan E-mail:furuichi@chs.nihon-u.ac.jp
‡ 佛教大学教育学部, 〒 603-8301 京都市北区紫野北花ノ坊町 96, Fuculty of Education, Bukkyo University, 96 Kitahananobocho, Murasakino, Kita-Ku, Kyoto, 603-8301, Japan E-mail:kuriyama@bukkyo-u.ac.jp

2 作用素単調函数

$M_n(\mathbb{C})$ を $n\times n$ complex matrices 全体, $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n\times n$ self-adjoint matrices 全体, $M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ の中の strictly positive elements の全体, $M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を strictly positive density matrices 全体, すなわち $M_{n,+,1}(\mathbb{C})=\{\rho\in M_n(\mathbb{C})|Tr[\rho]=1,\rho>0\}$. 以下断らない限り faithful states を扱うものとする. すなわち $\rho>0$ である. 函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は, 任意の $n\in\mathbb{N}$ と $0\le A\le B$ である任意の $A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して $0\le f(A)\le f(B)$ が成り立つとき, 作用素単調 (operator monotone) という. operator monotone function が $f(x)=xf(x^{-1})$ を満たすとき, symmetric であるといい, $f(1)=1$ を満たすとき, normarized という.

定義 2.1 $\mathcal{F}_{op}$ を次の条件を満たす函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ の族とする.

1. $f(1)=1$,
2. $tf(t^{-1})=f(t)$,
3. f は *operator monotone.*

例 2.1 $\mathcal{F}_{op}$ の函数の例は次で与えられる.

$$
f_{RLD}(x)=\frac{2x}{x+1},\quad f_{WY}(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,
$$

$$
f_{BKM}(x)=\frac{x-1}{\log x},\quad f_{SLD}(x)=\frac{x+1}{2},
$$

$$
f_{WYD}(x)=\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)},\ \alpha\in(0,1).
$$

Remark 2.1 $f\in\mathcal{F}_{op}$ は次の不等式を満たす.

$$
\frac{2x}{x+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{2},\quad x>0.
$$

$f \in \mathcal{F}_{op}$ に対して $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ と定義する．*regular* 函数の全体及び *non-regular* 函数の全体をそれぞれ次のようにおく．

$$\mathcal{F}_{op}^r = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\},\ \ \mathcal{F}_{op}^n = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\}$$

また次のような関係が成り立つ． $\mathcal{F}_{op} = \mathcal{F}_{op}^r \cup \mathcal{F}_{op}^n$.

定義 2.2 $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して $\tilde{f}$ を次のように定義する．

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left[(x+1) - (x-1)^2 \frac{f(0)}{f(x)}\right],\ \ x > 0.$$

定理 2.1 ([2], [3], [8]) $f \to \tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^r$ と $\mathcal{F}_{op}^n$ の間を1対1に対応付ける．

3 Metric Adjusted Skew Information and Correlation Measure

久保ー安藤の行列平均理論によると平均 (mean) と作用素単調函数 (operator monotone function) との間には次のような関係があることが知られている．$A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$m_f(A,B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}.$$

そこで行列平均理論を用いると monotone metrics(quantum Fisher informations とも言う) を次のように定義することができる．

$$\langle A, B\rangle_{\rho,f} = Tr(A \cdot m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1}(B)),$$

ただし $L_\rho(A) = \rho A, R_\rho(A) = A\rho$.　この場合，$A, B$ は点 ρ における多様体 $M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ への tangent vectors と考えられる． ([11], [3] を見よ).

定義 3.1 $A, B \in M_{n,sa}$ と $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の量を定義する．

$$Corr_\rho^f(A,B) = Tr[\rho AB] - Tr[A \cdot m_{\tilde{f}}(L_\rho, R_\rho)B],$$

$$Corr_\rho^{s(f)}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle i[\rho, A], i[\rho, B]\rangle_{\rho,f},$$

$$I_\rho^f(A) = Corr_\rho^f(A,A),$$

$$C_\rho^f(A,B) = Tr[A \cdot m_f(L_\rho, R_\rho)B],$$

$$C_\rho^f(A) = C_\rho^f(A,A),$$

$$U_\rho^f(A) = \sqrt{V_\rho(A)^2 - (V_\rho(A) - I_\rho^f(A))^2},$$

$I_\rho^f(A)$ は *metric adjusted skew information*, $Corr_\rho^f(A,B)$ は *metric adjusted correlation measure* とそれぞれ呼ばれている． *([6])*.

命題 3.1 ([2], [5]) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の関係がある．ただし $A_0 = A - Tr[\rho A]I$ *and* $B_0 = B - Tr[\rho B]I$ とする．

1. $I_\rho^f(A) = I_\rho^f(A_0)$
$\quad = Tr[\rho A_0^2] - Tr[A_0 \cdot m_{\tilde{f}}(L_\rho, R_\rho)A_]$
$\quad = V_\rho(A) - C_\rho^{\tilde{f}}(A_0),$
2. $J_\rho^f(A) = Tr[\rho A_0^2] + Tr[A_0 \cdot m_{\tilde{f}}(L_\rho, R_\rho)A_0]$
$\quad = V_\rho(A) + C_\rho^{\tilde{f}}(A_0),$
3. $0 \le I_\rho^f(A) \le U_\rho^f(A) \le V_\rho(A),$
4. $U_\rho^f(A) = \sqrt{I_\rho^f(A) \cdot J_\rho^f(A)},$
5. $Corr_\rho^f(A,B) = Corr_\rho^f(A_0, B_0)$
$\quad = Tr[\rho A_0 B_0] - Tr[A_0 \cdot m_{\tilde{f}}(L_\rho, R_\rho)B_0]$
$\quad = Tr[\rho A_0 B_0] - C_\rho^{\tilde{f}}(A_0, B_0),$
6. $Corr_\rho^{s(f)}(A,B) = Corr_\rho^{s(f)}(A_0, B_0)$
$\quad = \frac{1}{2}Tr[\rho A_0 B_0] + \frac{1}{2}Tr[\rho B_0 A_0] - C_\rho^{\tilde{f}}(A_0, B_0).$

定理 3.1 $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の不確定性関係が成り立つ．

$$I_\rho^f(A) \cdot I_\rho^f(B) \ge |Corr_\rho^{s(f)}(A,B)|^2,$$

ただし $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$.

定理 3.2 ([16], [1]) $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して

$$\frac{x+1}{2} + \tilde{f}(x) \ge 2f(x), \tag{3.1}$$

が成り立つならば次の不確定性関係が成り立つ．

$$U_\rho^f(A) \cdot U_\rho^f(B) \ge f(0)|Tr(\rho[A,B])|^2, \tag{3.2}$$

$$U_\rho^f(A) \cdot U_\rho^f(B) \ge 4f(0)|Corr_\rho^f(A,B)|^2, \tag{3.3}$$

ただし $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$.

$$f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)},\ \ \alpha \in (0,1),$$

とおくと次の不確定性関係になる．

系 3.1 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して，

$$U_\rho^{f_{WYD}}(A) \cdot U_\rho^{f_{WYD}}(B) \ge \alpha(1-\alpha)|Tr(\rho[A,B])|^2,$$

$$U_\rho^{f_{WYD}}(A) \cdot U_\rho^{f_{WYD}}(B) \ge 4\alpha(1-\alpha)|Corr_\rho^{f_{WYD}}(A,B)|^2,$$

ただし

$$Corr_\rho^{f_{WYD}}(A,B) = Tr[\rho A_0 B_0] \\ -\frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha A_0 \rho^{1-\alpha} B_0] - \frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha B_0 \rho^{1-\alpha} A_0].$$

4 Generalized Metric Adjusted Skew Information and Correlation Measure

系として定理 3.2 を含む Heisenberg 型及び Schrödinger 型の不確定性関係の一般化を与える．

定義 4.1 ([4]) $g, f \in \mathcal{F}_{op}^r$ はある $k > 0$ に対して

$$g(x) \geq k\frac{(x-1)^2}{f(x)}$$

を満たすと仮定する．このとき

$$\Delta_g^f(x) = g(x) - k\frac{(x-1)^2}{f(x)} \in \mathcal{F}_{op} \tag{4.1}$$

と定義する．

定義 4.2 $A, B \in M_{n,sa}$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次を定義する．

$$Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B) = k\langle i[\rho,A], i[\rho,B]\rangle_{\rho,f},$$

$$I_\rho^{(g,f)}(A) = Corr_\rho^{s(g,f)}(A,A),$$

$$C_\rho^f(A,B) = Tr[A \cdot m_f(L_\rho, R_\rho)B],$$

$$C_\rho^f(A) = C_\rho^f(A,A),$$

$$U_\rho^{(g,f)}(A) = \sqrt{(C_\rho^g(A) + C_\rho^{\Delta_g^f}(A))(C_\rho^g(A) - C_\rho^{\Delta_g^f}(A))},$$

$I_\rho^{(g,f)}(A)$, $Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)$ はそれぞれ *generalized metric adjusted skew information, generalized metric adjusted correlation measure* と呼ばれる．

命題 4.1 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の関係が成り立つ．ただし $A_0 = A - Tr[\rho A]I$, $B_0 = B - Tr[\rho B]I$.

1. $I_\rho^{(g,f)}(A) = I_\rho^{(g,f)}(A_0) = C_\rho^g(A_0) - C_\rho^{\Delta_g^f}(A_0)$,
2. $J_\rho^{(g,f)}(A) = C_\rho^g(A_0) + C_\rho^{\Delta_g^f}(A_0)$,
3. $U_\rho^{(g,f)}(A) = \sqrt{I_\rho^{(g,,f)}(A) \cdot J_\rho^{(g,f)}(A)}$.
4. $Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B) = Corr_\rho^{s(g,f)}(A_0,B_0)$.

定理 4.1 $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の不確定性関係が成り立つ．

$$I_\rho^{(g,f)}(A) \cdot I_\rho^{(g,f)}(B) \geq |Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)|^2,$$

ただし $A, B \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$.

定理 4.1 の証明. $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$Corr_\rho^{s(g,f)}(X,Y) = k\langle i[\rho,X], i[\rho,Y]\rangle_{\rho,f}.$$

とおくと

$$\begin{aligned}
& Corr_\rho^{s(g,f)}(X,Y) \\
= \ & kTr((i[\rho,X])^* m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1} i[\rho,Y]) \\
= \ & kTr((i(L_\rho - R_\rho)X)^* m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1} i(L_\rho - R_\rho)Y) \\
= \ & Tr(X^* m_g(L_\rho,R_\rho)Y) - Tr(X^* m_{\Delta_g^f}(L_\rho,R_\rho)Y),
\end{aligned}$$

だから $Corr_\rho^{s(g,f)}(X,Y)$ は $M_n(\mathbb{C})$ の内積であることがわかるので Schwarz inequality を用いることにより結果が得られる． □

定理 4.2 $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して，ある $\ell > 0$ が存在して

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \tag{4.2}$$

が成り立つならば次の不確定性関係が成り立つ．

$$U_\rho^{(g,f)}(A) \cdot U_\rho^{(g,f)}(B) \geq k\ell|Tr(\rho[A,B])|^2, \tag{4.3}$$

ただし $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$.

定理 4.2 を証明するには次の補題を必要とする．

補題 4.1 *(4.1)* と *(4.2)* が満たされていれば次の不等式が成り立つ．

$$m_g(x,y)^2 - m_{\Delta_g^f}(x,y)^2 \geq k\ell(x-y)^2.$$

補題 4.1 の証明: (4.1), (4.2) より

$$m_{\Delta_g^f}(x,y) = m_g(x,y) - k\frac{(x-y)^2}{m_f(x,y)}. \tag{4.4}$$

$$m_g(x,y) + m_{\Delta_g^f}(x,y) \geq \ell m_f(x,y), \tag{4.5}$$

したがって (4.4), (4.5) より

$$\begin{aligned}
& m_g(x,y)^2 - m_{\Delta_g^f}(x,y)^2 \\
= \ & \left\{m_g(x,y) - m_{\Delta_g^f}(x,y)\right\}\left\{m_g(x,y) + m_{\Delta_g^f}(x,y)\right\} \\
\geq \ & \frac{f(0)(x-y)^2}{2m_f(x,y)} \ell m_f(x,y) \\
= \ & k\ell(x-y)^2.
\end{aligned}$$

□

命題 4.1 と平均 $m_{\Delta_g^f}$ を用いて，$I_\rho^{(g,f)}(A)$, $J_\rho^{(g,f)}(A)$, $U_\rho^{(g,f)}(A)$, $Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)$ を表現すると次の補題を得る．

補題 4.2 $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \cdots, |\phi_n\rangle\}$ を ρ の固有ベクトルからなる正規直交基底，対応する固有値を $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ とする．$a_{jk} = \langle\phi_j|A_0|\phi_k\rangle, b_{jk} = \langle\phi_j|B_0|\phi_k\rangle$，ただし $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して $A_0 \equiv A - Tr[\rho A]I$, $B_0 \equiv B - Tr[\rho B]I$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
& I_\rho^{(g,f)}(A) \\
= \ & \sum_{j,k} m_g(\lambda_j,\lambda_k) a_{jk} a_{kj} - \sum_{j,k} m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k) a_{jk} a_{kj} \\
= \ & 2\sum_{j<k} \left\{(m_g(\lambda_j,\lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)\right\} |a_{jk}|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & J_\rho^{(g,f)}(A) \\ = & \sum_{j,k} m_g(\lambda_j,\lambda_k) a_{jk} a_{kj} + \sum_{j,k} m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k) a_{jk} a_{kj} \\ \geq & \ 2\sum_{j<k} \left\{ m_g(\lambda_j,\lambda_k) + m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k) \right\} |a_{jk}|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\rho^{(g,f)}(A)^2 = & \left(\sum_{j,k} m_g(\lambda_j,\lambda_k)|a_{jk}|^2 \right)^2 \\ & - \left(\sum_{j,k} m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)|a_{jk}|^2 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B) \qquad (4.6) \\ = & \sum_{j,k} m_g(\lambda_j,\lambda_k) a_{jk} b_{kj} - \sum_{j,k} m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k) a_{jk} b_{kj} \\ = & \sum_{j<k} \left(m_g(\lambda_j,\lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k) \right) a_{jk} b_{kj} \\ & + \sum_{j<k} \left(m_g(\lambda_k,\lambda_j) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_k,\lambda_j) \right) a_{kj} b_{jk}. \end{aligned}$$

定理 4.2 の証明: まず始めに (4.3) を示す.

$$Tr(\rho[A,B]) = \sum_{j,k} (\lambda_j - \lambda_k) a_{jk} b_{kj},$$

$$|Tr(\rho[A,B])| \leq \sum_{j,k} |\lambda_j - \lambda_k||a_{jk}||b_{kj}|.$$

したがって補題 4.1 より

$$\begin{aligned} & k\ell |Tr(\rho[A,B])|^2 \\ \leq & \left\{ \sum_{j,k} \sqrt{k\ell} |\lambda_j - \lambda_k||a_{jk}||b_{kj}| \right\}^2 \\ \leq & \left\{ \sum_{j,k} \left(m_g(\lambda_j,\lambda_k)^2 - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)^2 \right)^{1/2} |a_{jk}||b_{kj}| \right\}^2 \\ \leq & \left\{ \sum_{j,k} \left(m_g(\lambda_j,\lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j u,\lambda_k) \right) |a_{jk}|^2 \right\} \\ & \left\{ \sum_{j,k} \left(m_g(\lambda_j,\lambda_k) + m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k) \right) |b_{kj}|^2 \right\} \\ = & \ I_\rho^{(g,f)}(A) J_\rho^{(g,f)}(B). \end{aligned}$$

同様にして

$$I_\rho^{(g,f)}(B) J_\rho^{(g,f)}(A) \geq cd |Tr(\rho[A,B])|^2.$$

ゆえに目標の不等式 (4.3) を得る. □

例 4.1

$$g(x) = \frac{x+1}{2},$$

$$f(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \ \alpha \in (0,1),$$

$$k = \frac{f(0)}{2} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}, \quad \ell = 2.$$

このとき

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq 2f(x).$$

例 4.1 の証明: [14], [16] において次を得た. $x > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$(x^{2\alpha} - 1)(x^{2(1-\alpha)} - 1) \geq 4\alpha(1-\alpha)(x-1)^2.$$

したがって

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq 2f(x).$$

□

例 4.2

$$g(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{2} \right)^2,$$

$$f(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \ \alpha \in (0,1),$$

$$k = \frac{f(0)}{8} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{8}, \ \ \ell = \frac{3}{2}.$$

このとき $0 < \alpha < 1$ に対して

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \frac{3}{2} f(x)$$

が成り立つ.

例 4.2 の証明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1) \\ = & \ \frac{1}{8}(x + 2\sqrt{x} + 1 - x - 1 + x^\alpha + x^{1-\alpha}) \\ = & \ \frac{1}{8}(2\sqrt{x} + x^\alpha + x^{1-\alpha}) \\ = & \ \frac{1}{8}(x^{\alpha/2} + x^{(1-\alpha)/2})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

が成り立つので次を得る.

$$2\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{8}(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1) + \frac{3}{2}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^2.$$

また

$$\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)} \leq \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^2,$$

だから

$$2\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{8}(x^{\alpha}-1)(x^{1-\alpha}-1)$$
$$+\frac{3}{2}\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^{\alpha}-1)(x^{1-\alpha}-1)}.$$

したがって

$$g(x)+\Delta_g^f(x) \geq \frac{3}{2}f(x)$$

□

例 4.3

$$g(x)=\left(\frac{x^{\gamma}+1}{2}\right)^{1/\gamma} \quad (\frac{3}{4}\leq \gamma \leq 1),$$
$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,$$
$$k=\frac{f(0)}{4}=\frac{1}{16}, \quad \ell=2,$$

このとき $g(x)+\Delta_g^f(x) \geq 2f(x)$.

例 4.3 を証明するためには次の補題を必要とする.

補題 4.3 $x>0$ に対して,y の函数を次のように定義する.

$$F(y)=f(x,y)=\left(\frac{1+x^y}{2}\right)^{1/y}.$$

このとき $F(y)$ は次の性質をもつ.

(i) $F(y)$ は $y\in\mathbb{R}$ の単調増加函数である.

(ii) $F(y)$ は $y<0$ に対して凸 *(convex)* 函数である.

(iii) $F(y)$ は $y \geq 1/2$ に対して凹 *(concave)* 函数である. .

補題 4.3 の証明はたいへん複雑で誌面を多くとるのでこの proceedings では省略せざるを得ない.証明に興味のある読者は他の論文等を参照していただきたい.

例 4.3 の証明: 補題 4.3 より

$$2\left(\frac{1+x^{3/4}}{2}\right)^{4/3} \geq \frac{1+x}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2.$$

単調増加より $y\in[3/4,1]$ に対して

$$\left(\frac{1+x^y}{2}\right)^{1/y} \geq \left(\frac{1+x^{3/4}}{2}\right)^{4/3}$$

したがって $y\in[3/4,1]$ に対して

$$2\left(\frac{1+x^y}{2}\right)^{1/y} \geq \frac{1+x}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2$$

ゆえに

$$2\left(\frac{1+x^y}{2}\right)^{1/y}-\left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right)^2 \geq 2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2.$$

したがって

$$g(x)+\Delta_g^f(x) \geq 2f(x).$$

□

参考文献

[1] Furuichi, S., Yanagi, K.: “Schrödinger uncertainty relation, Wigner-Yanase-Dyson skew information and metric adjusted correlation measure,” *J. Math. Anal. Appl.*, 388, 1147-1156 (2012)

[2] Gibilisco, P., Imparato, D., Isola, T.: “Uncertainty principle and quantum Fisher information, II,” *J. Math. Phys.*, 48, 072109 (2007)

[3] Gibilisco, P., Hansen, F., Isola, T.: “On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions,” *Linear Algebra and its Applications*, 430, 2225-2232 (2009)

[4] Gibilisco, P., Hiai, F., Petz, D.: “Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations,” *IEEE Trans. Information Theory*, 55, 439-443 (2009)

[5] Gibilisco, P., Isola, T.: “On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information,” *J. Math. Anal. Appl.*, 375, 270-275 (2011)

[6] Hansen, F.: “Metric adjusted skew information,” *Proc. Nat Acad. Sci.*, 105, 9909-9916 (2008)

[7] Kosaki, H.: “Matrix trace inequality related to uncertainty principle”, *Internatonal Journal of Mathematics*, 16, 629-646(2005)

[8] Kubo, F., Ando, T.: “Means of positive linear operators,” *Math. Ann.*, 246, 205-224 (1980)

[9] Lieb, E. H.,: “Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture”, *Adv. Math.*, 11, 267-288(1973)

[10] Luo, S. Zhang, Q.: “On skew information”, *IEEE Trans. Information Theory*, 50, 1778-1782(2004), and “Correction to “On skew information””, *IEEE Trans. Information Theory*, 51, 4432(2005)

[11] Petz, D.: “Monotone metrics on matrix spaces,” *Linear Algebra and its Applications*, 244, 81-96 (1996)

[12] Wigner, E. P., Yanase, M. M.: “Information content of distribution, ” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 49, 910-918 (1963)

[13] Yanagi, K.,. Furuichi, S., Kuriyama, K.: “A generalized skew information and uncertainty relation”, *IEEE Trans. Information Theory*, .51, 4401-4404(2005)

[14] Yanagi, K.: "Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information," *J. Math. Anal. Appl.*, 365, 12-18 (2010)

[15] Yanagi, K.: "Uncertainty relation on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information," *Linear Algebra and its Applications*, 433, 1524-1532(2010)

[16] Yanagi, K.: "Metric adjusted skew information and uncertainty relation," *J. Math. Anal. Appl.*, 380, 888-892 (2011)

Appendix　$F(y)$ のグラフは次のようになっている．

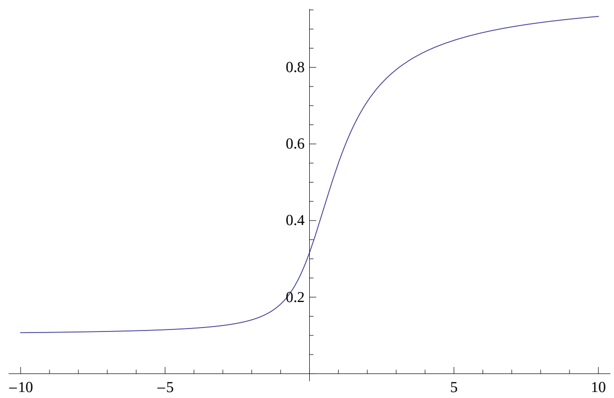

図 1: Graph of $f(0.1, y)$

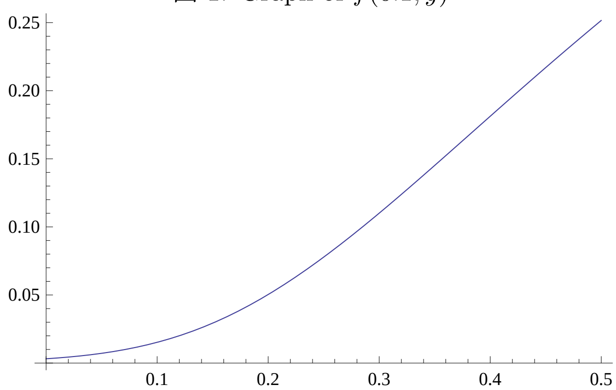

図 2: Graph of $f(0.00001, y)$

直感的には $y < 0$ では convex, $y > 0$ では concave という感じがするが正確には $F(y)$ は $0 < y < 1/2$ では形状が明らかではない．　$x = 0.00001$ のとき上のグラフから $0 < y < 1/2$ では convex になっている．