Lambert W 関数で表された下級財

An inferior good expressed by a Lambert W function

柏木　芳美

abstract

Sasaki has given examples of inferior goods and Giffen goods defined by indifference curves in 1992, but has not given them explicitly. We will give demand functions of some of his inferior goods explicitly by using one of the Lambert W functions.

1　はじめに

下級財やギッフェン財はミクロ経済学の教科書でよく議論されている．しかし，それらの具体例を与えているものは少なく，物足りなさを感じさせられる．よく知られているギッフェン財，従って下級財の例は Wold [7] によって与えられたものである ([2] の練習問題 3.6 にも載っている)．他の下級財やギッフェン財の例として黒岩 [3] や佐々木 [6] がある．いずれも効用関数ではなく無差別曲線を用いて定義しているのだが，1 階の条件である連立方程式の解が具体的には書けないため需要関数が具体的な関数としては表されていない．[3] では，コンピューターを用いて数値的に解き，グラフとして表すことによってこの問題に対処している．ところで，Lambert W 関数[注1] という関数があり，それを使うと [6] の下級財の 4 つの例のうち 2 つの例の需要関数[注2] を具体的に表すことができる．更に，解の存在条件を明示することもできる．この論文ではそのことを示す．また，試みに，無差別曲線ではなく通常のように効用

[注1] [5] によると，omega 関数あるいは product logarithm という言い方もあるそうである．尚,「ランベルトの W 関数」と書かれることもある．

[注2] [6] の例 1 と例 2 の効用関数は本質的には同じで，この論文で扱う効用関数である．[6] の残り 2 つの下級財の例は 3 次方程式の根で与えられる．

関数から話を始め，2階の条件と1階の条件を調べることとした．尚，ミクロ経済学の基本的なことは [4] などを参考にした．

Lambert W 関数は xe^x の逆関数である．馴染みはないかもしれないが，それほど難しい関数ではない．

2 佐々木による下級財の例

[6] と同様に，この論文では y 財の価格は1に基準化された2財モデルを考え，x 財の価格を $p\,(>0)$，所得を $M(>0)$ とする．以下，x 財の需要を求める．

[6] では，効用関数ではなく無差別曲線で議論している．その方が計算が楽になるようだが，試みとして，ここでは効用関数から議論を始め，通常のように2階の条件と1階の条件を考える．

効用関数としては，[6] で与えられた1つの例である

$$U = U(x,y) = y + 2 + \sqrt{(y+2)^2 - 4e^{-x}}$$

を採用する．$f(t)$ を狭義単調増加な1変数関数とすると，$f(U(x,y))$ も $U(x,y)$ と同じ点で条件付きの最大値をとるので $f(U(x,y))$ を考えても同じことである．

平方根の中は0以上でなければならないので，以下

$$y + 2 \geqq 2e^{-x/2} \tag{1}$$

を仮定する．従って，$U > 0$ となる．尚，命題 2.3 よりこの条件は満たされることが分かる．

まず，2階の条件を調べる．[6] で与えられた，U を少し一般化した関数に対して示しておく．

命題 2.1. c を定数，$\phi(x)$ を2回微分可能な1変数関数とする．このとき，効用関数 $y + c + \sqrt{(y+c)^2 - 4\phi(x)}$ の縁付きヘッセ行列の行列式は

$$\frac{2\phi''(x)\{y + c + \sqrt{(y+c)^2 - 4\phi(x)}\}^2}{\sqrt{\{(y+c)^2 - 4\phi(x)\}^3}}$$

となる．特に，$\phi''(x) > 0$ ならば2階の条件は満たされている．ただし，$(y+c)^2 - 4\phi(x) > 0$ とする．

証明. $\phi=\phi(x)$, $T=1/\sqrt{(y+c)^2-4\phi}$, $Y=y+c$, $u=Y+\sqrt{Y^2-4\phi}$ とおく. $u_x=-2\phi' T$, $u_y=1+YT$ である. $T_x=2\phi' T^3$, $T_y=-YT^3$ なので,

$$u_{xx}=-2\{\phi''+2(\phi')^2T^2\}T,\quad u_{xy}=2\phi' YT^3,\quad u_{yy}=T-Y^2T^3$$

となる. 従って u の縁付きヘッセ行列の行列式は,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & u_x & u_y\\ u_x & u_{xx} & u_{xy}\\ u_y & u_{xy} & u_{yy}\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}0 & -2\phi' T & 1+YT\\ -2\phi' T & -2\{\phi''+2(\phi')^2T^2\}T & 2\phi' YT^3\\ 1+YT & 2\phi' YT^3 & T-Y^2T^3\end{vmatrix}\\ &=2\phi''(1+YT)^2T\\ &=\frac{2\phi''\{y+c+\sqrt{(y+c)^2-4\phi}\}^2}{\sqrt{\{(y+c)^2-4\phi\}^3}}\end{aligned}$$

となる. □

1 階の条件の解は次のようになる.

命題 2.2. $p>0$, $M>0$ とし, $U=y+2+\sqrt{(y+2)^2-4e^{-x}}$ を効用関数とする. 1 階の条件の解の x は, 方程式

$$e^{-x}=-p^2(x-A)$$

の解で $0<x<M/p$ を満たすもののうち

$$2e^{-x}-p(y+2)\geqq 0$$

となるものである. ただし, $A=(M+2-p)/p$ とする.

証明. 「限界代替率 = 価格比」は

$$\frac{U_x}{U_y}=\frac{\dfrac{2e^{-x}}{\sqrt{(y+2)^2-4e^{-x}}}}{1+\dfrac{y+2}{\sqrt{(y+2)^2-4e^{-x}}}}=\frac{2e^{-x}}{y+2+\sqrt{(y+2)^2-4e^{-x}}}=p$$

なので,

$$2e^{-x}-p(y+2)=p\sqrt{(y+2)^2-4e^{-x}}\geqq 0$$

となる. 2 乗して整理すると

$$e^{-x}=py+2p-p^2$$

となる．予算制約 $y=-px+M$ を代入して

$$e^{-x}=-p^2\Big(x-\frac{M+2-p}{p}\Big)$$

が得られる．予算制約と $x>0$，$y>0$ より $0<x<M/p$ となる．

また，逆にたどることができる． □

注意． 2 乗しているので，$2e^{-x}-p(y+2)=-p\sqrt{(y+2)^2-4e^{-x}}$ の解も $e^{-x}=-p^2(x-A)$ の解に含まれる．後に命題 3.7 によりこの場合は除かれる．

以下，この論文では

$$A=\frac{M+2-p}{p}$$

と書くことにする．

ここで，条件式 (1) を確認しておく．

命題 2.3. $p>0$，$M>0$ とし，方程式 $e^{-x}=-p^2(x-A)$ が実数解 x を持ったとする．この x に対して $y=-px+M$ とおく．このとき，点 (x,y) は条件式 (1) を満たす．ただし，$A=(M+2-p)/p$ とする．

証明． $A=(M+2-p)/p$ より $M+2=pA+p$．よって，相加・相乗平均を用いて

$$\begin{aligned}y+2=-px+M+2=-px+pA+p=\frac{1}{p}\{-p^2(x-A)\}+p=\frac{e^{-x}}{p}+p\\ \geqq 2\sqrt{\frac{e^{-x}}{p}p}=2e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

となる． □

3 Lambert W 関数

命題 2.2 で与えられた方程式の解は，Lambert W 関数を用いて書き表すことができる．

ここでは，まず Lambert W 関数に関してこの論文で必要となることを中心に説明し，次に方程式 $e^{-x}=-p^2(x-A)$ の解の基本的なことを調べる．Lambert W 関数に関するその他のことは [5] や [1] などを参照してもらいたい．

x を実数とし，$f(x) = xe^x$ とおく．$f'(x) = (x+1)e^x$ より，$x > -1$ ならば $f'(x) > 0$ なので $f(x)$ は単調増加である．従って，逆関数を持つ．この逆関数を

$$W_0(x)$$

と書くことにする．$f(-1) = -e^{-1}$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ なので，$W_0(x)$ は $[-e^{-1}, \infty)$ から $[-1, \infty)$ の上への単調増加な関数である．尚，$f(-1) = -e^{-1}$ より $W_0(-e^{-1}) = -1$，$f(0) = 0$ より $W_0(0) = 0$ となる．

また，$x < -1$ ならば $f'(x) < 0$ なので $f(x)$ は単調減少である．従って，逆関数を持つ．この逆関数を

$$W_{-1}(x)$$

と書くことにする．$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x/e^{-x} = 0$ なので，$W_{-1}(x)$ は $[-e^{-1}, 0)$ から $(-\infty, -1]$ の上への単調減少な関数である．尚，$f(-1) = -e^{-1}$ より $W_{-1}(-e^{-1}) = -1$ となる．

$W_0(x)$ は W 関数の主要な枝と呼ばれることがあるが[注3]，この論文では $W_0(x)$ ではなく $W_{-1}(x)$ が重要な役割を果たす．以下，

$$W(x) = W_0(x) \quad \text{または} \quad W_{-1}(x)$$

により関数 $W(x)$ を定義する．

尚，$f(x) = xe^x$ は $x = -1$ のとき最小値 $-e^{-1}$ をとることを注意しておく．

命題としてまとめておく．

命題 3.1. 以上の記号の下で次が成り立つ．

(1) $W_0(0) = 0$，$W_0(-e^{-1}) = W_{-1}(-e^{-1}) = -1$.

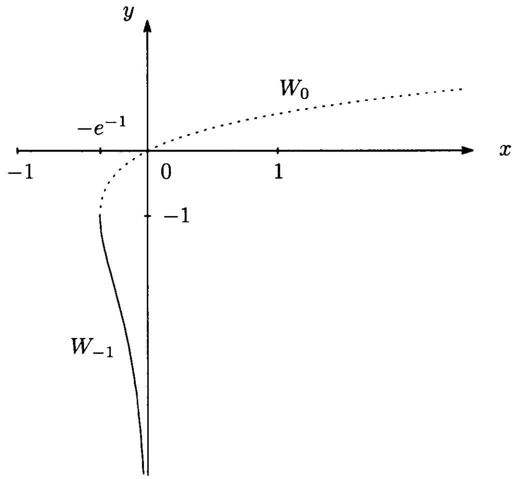
(2) $-e^{-1} \leqq x < 0$ のとき，$W_{-1}(x) \leqq -1 \leqq W_0(x) < 0$ である．等号は $x = -e^{-1}$ のときのみ成立する．

(3) $x \geqq -e^{-1}$ とする．$y = W(x)$ であるための必要十分条件は $x = ye^y$ である．ただし，$-e^{-1} \leqq x < 0$ のときは $W(x) = W_{-1}(x)$ または $W_0(x)$ で，$0 \leqq x$ のときは $W(x) = W_0(x)$ だけとする．

(4) $W(xe^x) = x$ となる．ただし，$x \geqq -1$ のときは $W(x) = W_0(x)$ とし，$x \leqq -1$ のときは $W(x) = W_{-1}(x)$ とする．

[注3] 複素関数としては $W_0(x)$ と $W_{-1}(x)$ 以外にも枝がある．[1] 参照．

図 1: $W_{-1}(x)$ (実線) と $W_0(x)$ (点線) のグラフ



(5) $W_0(x)$ は $[-e^{-1}, \infty)$ から $[-1, \infty)$ の上への単調増加な関数である．導関数は

$$\frac{d\,W_0(x)}{dx} = \frac{W_0(x)}{x\{1+W_0(x)\}} > 0$$

となる．ただし，$x \neq 0,\ -e^{-1}$ とする．

(6) $W_{-1}(x)$ は $[-e^{-1}, 0)$ から $(-\infty, -1]$ の上への単調減少な関数である．導関数は

$$\frac{d\,W_{-1}(x)}{dx} = \frac{W_{-1}(x)}{x\{1+W_{-1}(x)\}} < 0$$

となる．ただし，$x \neq -e^{-1}$ とする．

グラフは図 1 のようになる．

証明. (3) は逆関数の定義である．(5) と (6) の導関数のところを確認する．$x = ye^y$ すなわち $y = W(x)$ として逆関数の微分を用いる．

$$\frac{d\,W(x)}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d(ye^y)}{dy}} = \frac{1}{ye^y + e^y} = \frac{1}{x + \dfrac{x}{y}} = \frac{y}{x(1+y)} = \frac{W(x)}{x\{1+W(x)\}}$$

となる．他の点は説明済みか容易に示される．　□

Lambert W 関数を考える 1 つの利点は次の方程式が解けることである．

命題 3.2. α を定数とし，β と γ を 0 でない定数とする．方程式

$$e^{-\gamma x} = \beta(x-\alpha) \tag{2}$$

の実数解を考える．

(1) $-e^{-1} > \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta$ のとき，実数解は存在しない．

(2) $-e^{-1} = \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta$ のとき，実数解は 1 個でそれは

$$\alpha + \frac{1}{\gamma}W_{-1}\Big(\frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha\gamma}\Big) = \alpha + \frac{1}{\gamma}W_0\Big(\frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha\gamma}\Big) = \alpha - \frac{1}{\gamma}$$

である．

(3) $-e^{-1} < \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta < 0$ のとき，実数解は 2 個でそれらは異なり

$$\alpha + \frac{1}{\gamma}W_{-1}\Big(\frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha\gamma}\Big) \quad \text{と} \quad \alpha + \frac{1}{\gamma}W_0\Big(\frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha\gamma}\Big)$$

である．

(4) $0 \leqq \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta$ のとき，実数解は 1 個でそれは

$$\alpha + \frac{1}{\gamma}W_0\Big(\frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha\gamma}\Big)$$

である．

証明．式 (2) の両辺に $\gamma e^{\gamma(x-\alpha)}/\beta$ を掛けると

$$\frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha\gamma} = \gamma(x-\alpha)e^{\gamma(x-\alpha)} \tag{3}$$

となる．ここで，命題 3.1 の直前で述べたように $ye^y \geqq -e^{-1}$ なので，$\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta < -e^{-1}$ ならば実数解を持たない．以下，$\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta \geqq -e^{-1}$ とする．このとき式 (3) は実数解を持ち，命題 3.1(3) より，$0 \leqq \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta$ ならば $\gamma(x-\alpha) = W_0(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)$ だけで，$-e^{-1} \leqq \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta < 0$ ならば $\gamma(x-\alpha) = W_{-1}(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)$ と $\gamma(x-\alpha) = W_0(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)$ の高々 2 個となる．$-e^{-1} = \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta$ ならば $\gamma(x-\alpha) = W_{-1}(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta) = W_0(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta) = -1$ の 1 個だけとなる．命題 3.1(2) より $-e^{-1} < \gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta < 0$ ならば，$W_{-1}(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)$ と $W_0(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)$ は異なるので 2 個となる．また，$\gamma(x-\alpha) = W(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)$ は $x = \alpha + W(\gamma e^{-\alpha\gamma}/\beta)/\gamma$ と同じである．□

参考． この方程式以外の方程式で Lambert W 関数を用いて解けるものが [5] でいくつか与えられている．

補題 3.3. $p>0$ とすると $p-p\log p-1 \leqq 0$ となる．等号は $p=1$ のときのみ成立する．従って，$M>0$ とすると常に $M>2(p-p\log p-1)$ が成り立つ．

証明. $f(p)=p-p\log p-1$ とおく．$f'(p)=-\log p$. よって，$0<p<1$ なら $f'(p)>0$ となり，$p>1$ なら $f'(p)<0$ となる．よって，$f(p)$ は $p=1$ で最大値 $f(1)=0$ をとる．従って，結論が言える．□

一般に $x>0$ としたとき $x=e^{\log x}$ となることを注意しておく．

系 3.4. $p>0$, $M>0$ とすると $-e^{-1}<-e^{-A}/p^2<0$ となる．ただし，$A=(M+2-p)/p$ とする．

証明. $-e^{-1}<-e^{-A}/p^2$ は $e<p^2e^A=e^{\log p^2+A}$ と同値である．よって，$1<\log p^2+A=2\log p+(M+2-p)/p$. 整理すると $M>2(p-p\log p-1)$ となるが，補題 3.3 よりこの式は常に成り立つ．□

命題 3.2 と系 3.4 より直ちに次を得る．

系 3.5. $p>0$, $M>0$ とする．このとき，方程式

$$e^{-x}=-p^2(x-A)$$

は 2 つの相異なる実数解

$$A+W_{-1}\Big(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\Big) \quad と \quad A+W_0\Big(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\Big)$$

を持つ．ただし，$A=(M+2-p)/p$ とする．

証明. 命題 3.2 において $\alpha=A$, $\beta=-p^2$, $\gamma=1$ とする．系 3.4 より $-e^{-1}<-e^{-A}/p^2<0$ なので結論が言える．□

以下，$p>0$, $M>0$ に対して

$$x_{-1}=A+W_{-1}\Big(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\Big), \qquad x_0=A+W_0\Big(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\Big)$$

とおく．命題 3.1(2) より $-e^{-1}<x<0$ ならば

$$W_{-1}(x)<W_0(x)$$

なので，

$$x_{-1}<x_0$$

に注意しておく.

次の命題により，下級財の候補が分かる.

命題 3.6. $p > 0$，$M > 0$ とする．上の記号の下で

$$\frac{\partial x_{-1}}{\partial M} < 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial x_0}{\partial M} > 0$$

となる.

証明. $x = x_{-1}$ かつ $W = W_{-1}$，または $x = x_0$ かつ $W = W_0$ とする．$\partial A/\partial M = 1/p$ なので命題 3.1 より

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{1}{p} + \frac{W}{-\frac{1}{p^2}e^{-A}(1+W)}\Big(-\frac{1}{p^2}\Big)e^{-A}\Big(-\frac{1}{p}\Big) = \frac{1}{p} - \frac{W}{p(1+W)} = \frac{1}{p(1+W)}$$

となる．$W = W_{-1}$ ならば $W < -1$ なので $\partial x_{-1}/\partial M < 0$ となり，$W = W_0$ ならば $W > -1$ なので $\partial x_0/\partial M > 0$ となる． □

ここで，命題 2.2 の条件 $2e^{-x} - p(y+2) \geqq 0$ を調べておく.

命題 3.7. $p > 0$，$M > 0$ とする．このとき，$x = x_{-1}$ とし $y = -px + M$ とおくと $2e^{-x} - p(y+2) > 0$ となる.

証明. $F = 2e^{-x} - p(y+2)$ とおく．系 3.5 より $e^{-x} = -p^2(x - A)$．また，$A = (M + 2 - p)/p$ より $M + 2 = pA + p$．これらと $y = -px + M$ を F に代入して，$F = -2p^2(x - A) - p(-px + pA + p) = -p^2(x - A + 1)$ となる．ここで，$x - A = W_{-1}(-e^{-A}/p^2) < -1$ なので $F > 0$ となる． □

参考. 上の証明を見ると，x_0 は方程式 $2e^{-x} - p(y+2) = -p\sqrt{(y+2)^2 - 4e^{-x}}$ の解であることが分かる．このことから x_0 を除いてもよい.

4 解の範囲

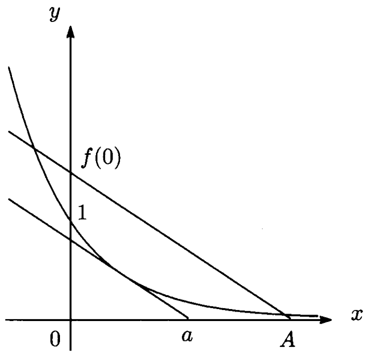
ここでは方程式 $e^{-x} = -p^2(x - A)$ の実数解が

$$0 < x < \frac{M}{p}$$

に存在する条件を定める.

まず，x_{-1} と x_0 の符号を調べる.

図 2: 相異なる 2 つの実数解



命題 4.1. $p > 0$, $M > 0$ とする．このとき，方程式 $e^{-x} = -p^2(x - A)$ の相異なる 2 つの実数解 x_{-1} と x_0 の符号は次のようになる．ただし，$A = (M + 2 - p)/p$ とする．

(1) $0 < p < 1$ のときは $x_0 > 0$ である．このとき，x_{-1} は次のようになる．

(i) $M < p + 1/p - 2$ ならば $x_{-1} > 0$ である．

(ii) $M = p + 1/p - 2$ ならば $x_{-1} = 0$ である．

(iii) $M > p + 1/p - 2$ ならば $x_{-1} < 0$ である．

(2) $p = 1$ のときは $x_0 > 0$ で $x_{-1} < 0$ である．

(3) $p > 1$ のときは $x_{-1} < 0$ である．このとき，x_0 は次のようになる．

(i) $M > p + 1/p - 2$ ならば $x_0 > 0$ である．

(ii) $M = p + 1/p - 2$ ならば $x_0 = 0$ である．

(iii) $M < p + 1/p - 2$ ならば $x_0 < 0$ である．

証明. グラフで考える．まず，相異なる 2 つの実数解を持つ条件をグラフで検討してみせる．この部分は，系 3.5 のうち相異なる 2 つの実数解を持つことの別証となっている．

曲線 $y = e^{-x}$ の接線のうち傾きが $-p^2$ であるものを考える．接点の x 座標は，$(e^{-x})' = -e^{-x} = -p^2$ より $x = -\log p^2 = -2\log p$．よって，接点の y 座標は $e^{-x} = e^{\log p^2} = p^2$．接線と x 軸との交点の x 座標を a とすると，接線の方程式は

$y=-p^2(x-a)$ となる．これが点 $(-2\log p, p^2)$ を通るので，$p^2=-p^2(-2\log p-a)$．よって，$a=1-2\log p$ となる．方程式 $e^{-x}=-p^2(x-A)$ が相異なる 2 つの実数解を持つための必要十分条件は $a<A$ (図 2 参照)．従って，$1-2\log p<(M+2-p)/p$．この式は $2(p-p\log p-1)<M$ と同じである．補題 3.3 よりこれは常に成り立つ．従って，相異なる 2 つの実数解を持つ．系 3.5 より 2 つの解は x_{-1} と x_0 になる．

ここで，$f(x)=-p^2(x-A)$ とおく．

(1) $0<p<1$ のとき．
このときは，$-2\log p>0$ となる．1 つの解は $-2\log p$ より小さく，もう 1 つの解は $-2\log p$ より大きいので，$x_0>0$ である．図 2 を考えると，もう 1 つの解 x_{-1} も正である条件は $f(0)<1$，0 である条件は $f(0)=1$，負である条件は $f(0)>1$ であることが分かる．$f(0)=p^2A=p(M+2-p)<1$ は $M<p+1/p-2$ と同じである．他の条件も同様．

(2) $p=1$ のとき．
このときは $-2\log p=0$ となる．従って，$x_0>0$ で $x_{-1}<0$ である．

(3) $p>1$ のとき．
このときは $-2\log p<0$ である．1 つの解は $-2\log p$ より小さいので，$x_{-1}<0$ となる．図を考えると，もう 1 つの解 x_0 が正である条件は $f(0)>1$，0 である条件は $f(0)=1$，負である条件は $f(0)<1$ であることが分かる．以下 (1) と同様である．　□

注意． 相加・相乗平均より，$p>0$ ならば $p+1/p-2\geqq 0$ である．$p=1$ のときのみ等号が成り立つ．

例 4.1. 命題 4.1 の具体例を与える．尚，計算には数式処理システム Mathematica を用いた[注4]．

(1) $p=1/2\ (<1)$ のとき．
$p+1/p-2=1/2$ である．

(i) $M=1/3\ (<p+1/p-2)$ とすると，$x_{-1}=0.12\cdots>0$，$x_0=3.55\cdots>0$．

(ii) $M=1/2(=p+1/p-2)$ とすると，$x_{-1}=0$，$x_0=3.92\cdots>0$．

[注4] Mathematica では $W_0(x)$ と $W_{-1}(x)$ は組み込まれていて，各々 ProductLog[x]，ProductLog[-1,x] と入力する．

(iii) $M = 1\ (> p+1/p-2)$ とすると，$x_{-1} = -0.27\cdots < 0$，$x_0 = 4.97\cdots > 0$.

(2) $p = 1$ のとき.

$M = 2$ とすると，$x_{-1} = -1.50\cdots < 0$，$x_0 = 2.94\cdots > 0$.

(3) $p = 2\ (> 1)$ のとき.

$p + 1/p - 2 = 1/2$ である.

(i) $M = 1\ (> p+1/p-2)$ とすると，$x_{-1} = -2.47\cdots < 0$，$x_0 = 0.31\cdots > 0$.

(ii) $M = 1/2 (= p + 1/p - 2)$ とすると，$x_{-1} = -2.33\cdots < 0$，$x_0 = 0$.

(iii) $M = 1/3\ (< p+1/p-2)$ とすると，$x_{-1} = -2.28\cdots < 0$，$x_0 = -0.11\cdots < 0$. □

ここで，命題 3.6 より下級財の候補は x_{-1} である．従って，$x_{-1} > 0$ を満たす必要がある．その条件は命題 4.1 より

$$0 < p < 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < M < p + \frac{1}{p} - 2$$

となる．

次に

$$x < \frac{M}{p}$$

となる条件を考える．まず，x_0 を除いておく．

命題 4.2. $0 < p < 1$，$0 < M$ とすると $M/p < x_0$ となる．従って，x_0 は解の候補にはならない．

証明. $W_0(-e^{-A}/p^2) > -1$ なので $-1 + W_0(-e^{-A}/p^2) > -2$. ここで，$0 < p < 1$ より $2/p > 2$. よって，$x_0 = A + W_0(-e^{-A}/p^2) = M/p + 2/p - 1 + W_0(-e^{-A}/p^2) > M/p + 2/p - 2 > M/p$. □

以下 x_{-1} を調べる．

命題 4.3. $0 < p < 1$，$0 < M$ とする．このとき，$x_{-1} < M/p$ であるための必要十分条件は $-p\log\{p(2-p)\} < M$ である．

証明. 条件 $x_{-1} = A + W_{-1}(-e^{-A}/p^2) = M/p + (2-p)/p + W_{-1}(-e^{-A}/p^2) < M/p$ は，命題 3.1(4) より

$$W_{-1}\Big(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\Big) < \frac{p-2}{p} = W_{-1}\Big(\frac{p-2}{p}e^{\frac{p-2}{p}}\Big)$$

となる．ただし，$0 < p < 1$ より $(p-2)/p < -1/p < -1$ に注意する．W_{-1} は単調減少なので，これは $-e^{-A}/p^2 > e^{(p-2)/p}(p-2)/p$ と同じことである．よって，$e^{-A} < p(2-p)e^{(p-2)/p} = e^{\log\{p(2-p)\}+(p-2)/p}$ となる．よって，$-A = -(M+2-p)/p < \log\{p(2-p)\} + (p-2)/p$ となる．これより，$M > -p\log\{p(2-p)\}$ が出てくる． □

注意． $0 < p < 1$ のとき，$p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2 > 0$ より $p(2-p) < 1$ となる．従って $-p\log\{p(2-p)\} > 0$ に注意しておく．

例 4.2. 命題 4.3 を具体例で確認してみる．

$p = 1/2$ とする．

$$-p\log\{p(2-p)\} = 0.143\cdots, \qquad p + \frac{1}{p} - 2 = \frac{1}{2}$$

である．

$M = 1/6$ とすると

$$-p\log\{p(2-p)\} < 0.166\cdots = M < p + \frac{1}{p} - 2$$

で，確かに

$$0 < x_{-1} = 0.265\cdots < \frac{M}{p} = 0.333\cdots$$

となっている．

$M = 1/7$ とすると

$$\frac{1}{7} = 0.142\cdots < -p\log\{p(2-p)\}$$

で，

$$\frac{M}{p} = 0.285\cdots < 0.288\cdots = x_{-1}$$

となる． □

今までの結果をまとめて次を得る．

表 1: $p = 1/10$ のときの x_{-1} の値

M	0.5	1	3	5	7	8
x_{-1}	1.49	1.28	0.72	0.37	0.11	0.01

定理 4.4. 効用関数を $U = y + 2 + \sqrt{(y+2)^2 - 4e^{-x}}$ とし，x 財の価格を p，y 財の価格を 1，所得を M とする．$0 < p < 1$ で $-p\log\{p(2-p)\} < M < p + 1/p - 2$ ならば，x 財の需要は

$$A + W_{-1}\Big(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\Big)$$

となる．更に，これは下級財となる．ただし，$A = (M + 2 - p)/p$ とする．

注意． (1) $0 < p < 1$ ならば $-p\log\{p(2-p)\} < p + 1/p - 2$ である．このことを示す．$f(p) = p + 1/p - 2 + p\log\{p(2-p)\}$ とおく．$f(1) = 0$ なので，$f'(p) < 0$ を示せばよい．

$$f'(p) = 1 - \frac{1}{p^2} + \log\{p(2-p)\} + \frac{2(1-p)}{2-p} = -\frac{(p-1)^2(3p+2)}{p^2(2-p)} + \log\{p(2-p)\}$$

となる．$-(p-1)^2(3p+2)/\{p^2(2-p)\} < 0$，$p(2-p) < 1$ なので $f'(p) < 0$ となる．

(2) 命題 4.1 より，$p \geqq 1$ あるいは，$0 < p < 1$ で $M \geqq p + 1/p - 2$ のときは，$x_{-1} \leqq 0$ となる．また，命題 4.3 より，$0 < p < 1$ で $0 < M \leqq -p\log\{p(2-p)\}$ のときは $M/p \leqq x_{-1}$ となる．

例 4.3. 具体例を計算してみる．まず，$0 < p < 1$ となる p を定める．ここでは，$p = 1/10$ とする．このとき，

$$0.16\cdots = -p\log\{p(2-p)\} < M < p + 1/p - 2 = 8.1$$

となる．表 1 でいくつかの M の値に対応する x_{-1} の値を与えた．ただし，x_{-1} の値は小数点以下 2 桁まで表示している (3 桁以下は切り捨て)．　□

5　ギッフェン財にはならない

需要が $x_{-1} = A + W_{-1}(-e^{-A}/p^2)$ と具体的に書き表されたので，ギッフェン財かどうか判定できる可能性がある．ここでは，ギッフェン財にはならないことを計算により示す．

補題 5.1. $p > 0$，$M > 0$ とする．x_{-1} の p に関する偏導関数は

$$\frac{\partial x_{-1}}{\partial p} = -\frac{M + 2 + 2pW_{-1}}{p^2(1 + W_{-1})}$$

となる．ただし，$W_{-1} = W_{-1}(-e^{-A}/p^2)$，$A = (M + 2 - p)/p$ とする．

証明. $A = (M + 2 - p)/p = (M + 2 - p)p^{-1}$ の偏導関数は

$$\frac{\partial A}{\partial p} = -p^{-1} + (M + 2 - p)(-p^{-2}) = -\frac{1}{p} - \frac{M + 2 - p}{p^2} = -\frac{M + 2}{p^2}$$

となる．また，

$$\frac{\partial(e^{-A}p^{-2})}{\partial p} = e^{-A}\frac{M + 2}{p^2}p^{-2} - 2e^{-A}p^{-3} = \frac{e^{-A}}{p^4}(M + 2 - 2p)$$

なので，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}W_{-1}\left(-\frac{1}{p^2}e^{-A}\right) &= \frac{W_{-1}}{-\frac{1}{p^2}e^{-A}(1 + W_{-1})}(-1)\frac{e^{-A}}{p^4}(M + 2 - 2p) \\ &= \frac{W_{-1}}{p^2(1 + W_{-1})}(M + 2 - 2p) \qquad (4)\end{aligned}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_{-1}}{\partial p} &= \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial W_{-1}}{\partial p} = -\frac{M + 2}{p^2} + \frac{W_{-1}}{p^2(1 + W_{-1})}(M + 2 - 2p) \\ &= -\frac{M + 2 + 2pW_{-1}}{p^2(1 + W_{-1})}\end{aligned}$$

となる．□

$W_{-1} < -1$ なので，$\partial x_{-1}/\partial p < 0$ を示すためには，$M + 2 + 2pW_{-1} < 0$ を示せばよい．ただし，次に示すように $x_{-1} > 0$ である必要があるので $0 < p < 1$ かつ $0 < M < p + 1/p - 2$ でなければならないが，$x_{-1} \geqq M/p$ であっても $\partial x_{-1}/\partial p$ は計算できるので，ここでは $-p\log\{p(2 - p)\} < M$ である必要はない．

補題 5.2. $0 < p < 1$，$0 < M < p + 1/p - 2$ とする．このとき $M + 2 + 2pW_{-1} < 0$ である．ただし，$W_{-1} = W_{-1}(-e^{-A}/p^2)$，$A = (M + 2 - p)/p$ とする．

証明. M を固定して，$f = f(p) = M + 2 + 2pW_{-1}$ とおく．式 (4) より，

$$\begin{aligned}\frac{df}{dp} &= 2\left\{W_{-1} + p\frac{W_{-1}}{p^2(1+W_{-1})}(M+2-2p)\right\}\\ &= \frac{2W_{-1}}{p(1+W_{-1})}(M+2-p+pW_{-1}) = \frac{2W_{-1}}{1+W_{-1}}\left(\frac{M+2-p}{p} + W_{-1}\right)\\ &= \frac{2W_{-1}}{1+W_{-1}}x_{-1}\end{aligned}$$

となる．命題 4.1 より $x_{-1} > 0$ である．また，$W_{-1} < -1$ なので $df/dp > 0$ となる．従って，$f(1) < 0$ が示されれば，$0 < p < 1$ で常に $f(p) < 0$ となる．ここで，命題 3.1(4) より，$f(1) = M + 2 + 2W_{-1}(-e^{-(M+1)}) < 0$ は

$$W_{-1}(-e^{-(M+1)}) < -\frac{M+2}{2} = W_{-1}\left(-\frac{M+2}{2}e^{-\frac{M+2}{2}}\right)$$

と同値となる．ただし，$-(M+2)/2 < -1$ に注意．W_{-1} は単調減少なので，この式は $-e^{-(M+1)} > -e^{-(M+2)/2}(M+2)/2$，すなわち $1 < e^{M/2}(M+2)/2$ と同値である．$M > 0$ なので最後の式は常に成り立つ．　□

補題 5.1 と補題 5.2 より直ちに次が言える．

系 5.3. $0 < p < 1$，$0 < M < p + 1/p - 2$ とする．このとき，$\partial x_{-1}/\partial p < 0$ である．

6　まとめ

y 財の価格が 1 に基準化され，効用関数が $U = y + 2 + \sqrt{(y+2)^2 - 4e^{-x}}$ のとき，x 財の需要は下級財になることが [6] で示されたがそれは具体的には与えられなかった．この論文では Lambert W 関数を用いて x 財の需要を具体的に表し，更に解の存在条件を明示した．また，ギッフェン財にはならないことも示した．解が具体的に表されているので，計算は少し大変だが，機械的な計算で証明ができる．

謝辞

山口大学経済学部の藤井先生にはミクロ経済学について色々と教えて頂きました．特に，参考文献の [2] や [4] を紹介して頂き，今回の論文を書く背景とともに下級財の具体例を考える 1 つの動機となりました．感謝いたします．

参考文献

[1] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey and D. E. Knuth, On the Lambert W function, Adv. Comput. Math. 5, pp.329–359, 1996.

[2] D. W. Katzner, *Static Demand Theory*, MacMillan, NY, 1970.

[3] 黒岩和夫「消費と生産の理論(パソコンによるミクロ経済学①)」『経済セミナー』, 1991 年 1 月号, pp.81–86.

[4] 西村和雄『ミクロ経済学』東洋経済新報社, 1990.

[5] Lambert W function (http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function), あるいは, ランベルトの W 関数 (http://ja.wikipedia.org/wiki/ランベルトのW関数)

[6] 佐々木宏夫「下級財とギッフェン財 —若干の例」『オイコノミカ』第 29 巻, pp.1–24, 1992.

[7] H. Wold and L. Juréen, *Demand Analysis : A Study in Economics*, Wiley, NY, 1953.