ハロッド＝ドーマーモデル再考

馬　田　哲　次
Tetsuji　UMADA

The purpose of this paper is to present some extended models of Harrod=Domar model and explain the stagnation of Japanese economy. Neoclassical growth model has big problems, so Harrod=Domar model is better than that. But Harrod=Domar model has some problems. Considering the problem, I made some extended models. Using the third extended model, we can explain the stagnation of Japanese economy.

Ⅰ　はじめに

日本経済の停滞が続いている。経済成長論は新古典派成長論を基に理論が組み立てられているようであるが，新古典派成長論は，理論的に大きな問題をもっている。本稿では，新古典派成長論がもつ問題をもたないハロッド＝ドーマーモデルを基に，それを拡張したモデルを構築し，経済の停滞を説明する新たな理論モデルを構築する試みである。

本稿の構成は次の通りである。Ⅱ節で新古典派成長論とその問題点を述べ，Ⅲ節でハロッド＝ドーマーモデルを簡単に説明する。Ⅳ～Ⅵ節で，ハロッド＝ドーマーモデルのもつ問題点を改善したモデルについて説明する。そして最後にⅦ節で本稿のまとめと今後の課題について述べる。

Ⅱ　新古典派成長論批判

新古典派成長論の要点は，次のように説明される。

ｔ期首の資本ストックをK_t，ｔ期の投資をI_tとし，簡単化の為に，資本減耗を無視すると，ｔ期とｔ＋１期の資本ストック，ｔ期の投資の間に次のような関係が成立する。

$$K_{t+1}=K_t+I_t \qquad (1)$$

政府と海外との取引を無視し，ＧＤＰをＹ，民間消費をＣとすると，財・サービス市場の需給一致式は次のように書くことができる。

$$Y_t=C_t+I_t \qquad (2)$$

ＧＤＰを分配面から見て，民間貯蓄をＳとおくと，

$$Y_t=C_t+S_t \qquad (3)$$

と書くことができる。

（２），（３）より，

$$S_t=I_t \qquad (4)$$

が成立する。

民間貯蓄はＧＤＰの一定割合だと仮定し，貯蓄率をｓ（一定）とすると，

$$S_t=sY_t \qquad (5)$$

と書くことができる。

生産関数は，資本ストックと労働Ｌとの代替が可能で，かつ収穫逓減であると仮定すると，

$$Y_t=F(K_t,\ L_t) \qquad (6)$$

と書くことができる。そして，一次同時関数を仮定し，

$$y=Y/L \qquad (7)$$

$$k=K/L \qquad (8)$$

とおくと，（６）は，

$$Y_t=L_t f(k_t) \qquad (9)$$

となる。

（１），（４），（５），（９）より，

$$K_{t+1}=K_t+sL_t f(k_t) \qquad (10)$$

を得る。

（10）式の両辺をL_tで割って，

$$\frac{K_{t+1}L_{t+1}}{L_{t+1}L_t}=\frac{K_t}{L_t}+sf(k_t) \tag{11}$$

を得る。

労働人口の成長率をλ（一定）とすると，

$$L_{t+1}=(1+\lambda)L_t \tag{12}$$

と書くことができる。

（８），（11），（12）より，

$$(1+\lambda)k_{t+1}=k_t+sf(k_t) \tag{13}$$

を得る。

ｋの運動を分析するために変形すると，

$$k_{t+1}=\frac{1}{1+\lambda}(k_t+sf(k_t)) \tag{14}$$

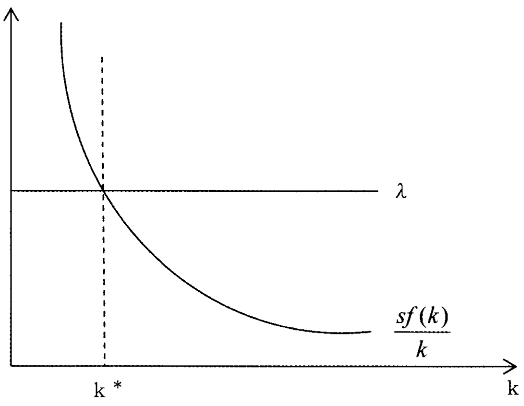
$$k_{t+1}-k_t=\frac{1}{1+\lambda}\left[sf(k_t)-\lambda k_t\right] \tag{15}$$

$$k_{t+1}-k_t=\frac{k_t}{1+\lambda}\left[\frac{sf(k_t)}{k_t}-\lambda\right] \tag{16}$$

となる。

（16）式のかっこの中をグラフで描くと，次の図１のようになる。

図１



初期値のｋが均衡のｋ＊よりも大きければｋは小さくなりｋ＊に収束する。また，初期値のｋが均衡のｋ＊よりも小さければ，ｋは大きくなり，ｋ＊に収束する。

なぜこのようになるかといえば，

$$\frac{sf(k)}{k}=\frac{sY}{K}=\frac{S}{K}=\frac{I}{K}=\frac{\Delta K}{K} \tag{17}$$

であるから，$sf(k)/k$は，資本ストックの増加率である。また，λは労働力人口の増加率である。従って，資本の増加率が労働力人口の増加率よりも大きければ，ｋは大きくなる。これは当たり前のことであるが，それが均衡値に収束するのは，生産関数が，資本と労働の代替が可能で，なおかつ，収穫逓減の生産関数だからである。生産関数が固定係数の場合は，必ずしもｋ＊に収束するとは限らない。このことを次に示す。

生産関数が，

$$Y=\min\left[\frac{K}{u},\frac{N}{v}\right] \tag{18}$$

の場合で，同様に収穫不変を仮定すると，

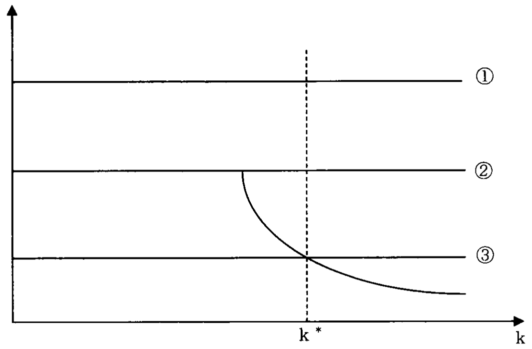
$$y=\frac{Y}{N}=\min\left[\frac{k}{u},\frac{1}{v}\right] \tag{19}$$

となる。この場合は，（16）に対応する式は，

$$k_{t+1}-k_t=\frac{k_t}{1+\lambda}\left[\frac{s\cdot\min\left(\frac{k}{u},\frac{1}{v}\right)}{k_t}-\lambda\right] \tag{20}$$

となる。図１に対応するものは，図２となり，λの大きさにより，三つの場合に分けられる。λが大きく①の場合は，ｋは一方的に小さくなり，０に収束する。λが②の場合は，初期値にとどまる。そして，λが③の場合は，ｋ＊に収束する。そして，ｋ＊において，使用されない資本ストックが存在し続けることになる。

図2



もう一つの重要な想定は，（4）式を，貯蓄がそのまま投資になると読んでいることである。

各変数の決定関係を考察してみる。まず，初期の資本ストックと労働力人口が与えられると，（6）式より，それらは完全に利用されて生産量が決定する。生産量が決まると（5）式より，貯蓄関数から貯蓄が決定され，（4）式より貯蓄が決定されるとそれがそのまま投資の大きさになる。投資量が決まると（1）式より次期の資本ストック量が決まる。また，労働力人口は一定率で増加しているので，(12) 式より次期の労働力人口も決まる。これが繰り返される。

Ⅲ　ハロッド＝ドーマーの経済成長論

次に，ハロッド＝ドーマーの成長論について説明する。ハロッド＝ドーマーと同じもののように言われることが多いが，ドーマーの考え方の方がわかりやすいようである。

資本ストックと生産量の間に，

$$\sigma K_t = Y_t \tag{21}$$

という関係がある。

t期に投資がなされると，それはt＋1期に生産能力の増加となる。つまり，

$$Y_{t+1} - Y_t = \sigma(K_{t+1} - K_t) = \sigma I_t \tag{22}$$

という関係が成立する。

他方で，投資が増えると，乗数効果により，需要の増加を生み出す。つまり，

$$Y_{t+1} - Y_t = \frac{I_{t+1} - I_t}{s} \tag{23}$$

が成立する。

需要量と供給量が等しくなるためには，(22)，(23) より，

$$s\sigma = \frac{I_{t+1} - I_t}{I_t} \tag{24}$$

が成立していなければならない。

ところで，(21) より，σが一定であると仮定すると，

$$\sigma \Delta K = \Delta Y \tag{25}$$

が成立するので，(21)，(25) より，

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta Y}{Y} \tag{26}$$

が成立する。

また，（4），（5）より，

$$I = sY \tag{27}$$

が成立し，貯蓄率が一定だと仮定すると，(27) より，

$$\Delta I = s\Delta Y \tag{28}$$

が成立するので，(27)，(28) より，

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta Y}{Y} \tag{29}$$

が成立する。(26)，(29) より，資本ストックが正常稼働している状態では，

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta Y}{Y} \tag{30}$$

が成立する。

その状態から外れた場合には，経済は不安定になるということは，例えば，資本ストックが正常稼働しているときの産出資本比率（資本係数の逆数）をσ_rと書き，投資関数を，

$$g_{t+1} = g_t + \alpha\ (\sigma_t - \sigma_r) \tag{31}$$

$$g_t=\frac{I_t}{K_t} \tag{32}$$

とすれば，(21)，(27)，(32) より，

$$\sigma=\frac{Y}{K}=\frac{I}{sK}=\frac{g}{s} \tag{33}$$

となるので，(33) を (31) に代入して，

$$g_{t+1}=g_t+\alpha\left(\frac{g_t}{s}-\sigma_r\right) \tag{34}$$

を得る。ｓとσ_rが一定であれば，初期値のｇがｓσ_rに等しくない限り，ｇは発散する。これは，現実の産出資本比率が資本家が望ましいと思う産出資本比率を上回れば（下回れば），企業家は資本が不足していると（過剰だと）思って，蓄積率を増加（減少）させるからである。

ここでの一つの疑問は，投資関数は，(31) ではなくて，

$$I_{t+1}=I_t+\alpha\ (\sigma_t-\sigma_r) \tag{35}$$

ではないかというものである。つまり，資本家が望ましいと思う状態であれば，蓄積率ｇではなくて，投資Ｉを今期と同じだけ来期も行うのではないかという疑問である。しかしながら，ドーマーの理論は，投資は生産の能力を増やし，その能力の増加率に等しいだけ投資が増加しなければならないということなので，投資水準で考える (35) 式ではなくて，蓄積率で考える (35) 式の方が正しいと思われる。

ここで，各変数の決定関係を考察してみる。まず，今期の投資が決まると（１）式より来期の資本ストックが増加し，来期の生産能力が決まる。来期の投資が決まると，乗数効果により，来期の需要量の増加が決まり，今期の需要量にそれを加えて，来期の生産量が決まり，現実の産出資本係数が決まる。現実の産出資本比率と資本家が望ましいと思う産出資本比率により蓄積率，つまり投資が決まる。これが繰り返される。

新古典派成長論との違いの一つは，生産関数である。σ_rが一定であるという仮定は，資本と労働の代替を認めていない。新古典派の成長論で，生産関数を固定係数の生産関数にすれば，Ⅱ節で説明したように，ｋがｋ*に収束しない状況をモデル化することができる。ただし，ｋが上方に発散するような状況はそこでのモデルには出てこない。

もう一つの重要な違いは，（４）式の読み方である。新古典派成長論ではそれを貯蓄がそのまま投資になると読むが，ハロッド＝ドーマーの成長論の場合は，投資が貯蓄を決定すると読む。つまり，投資により需要面から見たＧＤＰが決まり，それに等しいだけの生産がなされ，それに等しい所得が生み出される。所得の一部が消費され，残りが貯蓄されると考えるのである。

この決定関係の読み方は，投資が貯蓄を決定すると読むほうが正しいと思う。経済が成長するか停滞するかは，貯蓄がうまく投資につながるかどうかであり，現実の日本経済の場合は，大企業が内部留保を積み増し，うまく投資に結びつかない点にあると思われるからである。貯蓄が投資に繋がるというときに注意しなければならないことは，今期の貯蓄と来期の投資の繋がりを考えているということである。今期の貯蓄が来期の投資になるか，それとも現金として保有されるか，債券・株式等の金融資産として保有されて，来期の投資には結びつかないかどうかということが，経済の成長を考えるときに，決定的に重要である。そういう意味で，経済の成長を考える場合にベースとする理論は，新古典派の成長論ではなくて，ハロッド＝ドーマーの成長論である。

Ⅳ　ハロッド＝ドーマー理論の拡張１

ハロッド＝ドーマー理論に対する批判は，貯蓄

率と保証成長率が一定という仮定に対する批判である。本稿のモデルでいえば，sとσ_rが一定ということに対する批判である。

1990年代以降の日本経済を見てみると，失われた20年と言われるように，ＧＤＰが横ばいを続けている。つまり，ある種の均衡状態に陥っていて，少なくとも上方への発散運動を起こしているとは思われない。下方への発散運動を起こしているのを政府支出の下支えで，そうならなくなっているのかもしれない。これについては，データによる検証が必要とされる。

ハロッド自身は，「ナイフの刃」の理論と言われるのを心外だと思っていたようである。ハロッドは，三つの基本方程式で経済の運動を分析している。その三つの方程式とは，

$$GC = s \tag{35}$$

$$G_w C_r = s_d \tag{36}$$

$$G_n C_r = s_0 \tag{37}$$

である。ＧはＧＤＰの成長率，Ｃは現実の資本産出比率，ｓは現実の貯蓄率，G_wは保証成長率，C_rは資本家が望ましいと考える資本産出比率，s_dは望ましい貯蓄率，G_nは自然成長率，s_0は，自然成長率と保証成長率から決定される貯蓄率である。そして，s_dやG_w，したがってC_rが変化する可能性を認めていた。

この節では，貯蓄率の変化の可能性について考察してみる。

第一に，この貯蓄率が平均貯蓄率か限界貯蓄率か考える。ドーマーの成長論によると，投資が乗数効果により需要が増えるということを考えているので，彼によるとこの貯蓄率は，限界貯蓄性向のようである。ハロッドの場合は，基本方程式から考えると，ＧＤＰに平均貯蓄性向をかけたものが貯蓄になるので，平均貯蓄性向のようである。

第二に，不安定性を生み出しているのは，望ましい貯蓄率か現実の貯蓄率かである。ドーマーの場合は，乗数効果を考えているので，現実の貯蓄率である。ハロッドの場合は，２番目の基本方程式をみると，望ましい貯蓄率のようである。

ここでは，貯蓄率を現実の平均貯蓄率だと考えてモデルを作り，安定化する可能性を考察してみる。モデルは次のようにあらわされる。

財・サービス市場の需給一致式として，次の式が書ける。

$$Y = C + I \tag{38}$$

消費関数を簡単なケインズタイプとして，基礎消費をＡとし，

$$C = A + cY \tag{39}$$

とする。

基礎消費は，労働力人口の一定割合だと仮定して，

$$A = \gamma L \tag{40}$$

とする。

労働力人口は一定の率λで成長すると仮定すると，

$$L_{t+1} = (1 + \lambda) L_t \tag{41}$$

と書くことができる。

投資関数は，

$$g_{t+1} = g_t + \alpha (\sigma_t - \sigma_r) \tag{42}$$

を仮定する。σは産出資本係数であり，

$$\sigma = \frac{Y}{K} \tag{43}$$

である。ｇは資本蓄積率で，

$$g = \frac{I}{K} \tag{44}$$

である。

基本ストックと投資の間には，

$$K_{t+1} = K_t + I_t \tag{45}$$

の関係がある。

変数は，Ｙ，Ｋ，Ｉ，σ，Ｌ，Ｃ，ｇ，Ａの８

個であり，8本の方程式からなるモデルである。ここで，計算の為に，

$$h=\frac{L}{K} \tag{46}$$

を導入する。

（38），（39），（40）より，

$$s=1-c \tag{47}$$

とおくと，

$$Y=\frac{\gamma L+I}{s} \tag{48}$$

となる。

（43），（48）より，

$$\sigma=\frac{\gamma L+I}{sK}=\frac{1}{s}(\gamma h+g) \tag{49}$$

を得る。

（49）を（42）に代入すると，

$$g_{t+1}=g_t+\alpha\left[\frac{1}{s}(\gamma h_t+g_t)-\sigma_r\right] \tag{50}$$

を得る。

また，

$$h_{t+1}=\frac{L_{t+1}}{K_{t+1}}=\frac{(1+\lambda)I_t}{K_t+L_t}=\frac{(1+\lambda)L_t}{(1+g_t)K_t}=\frac{1+\lambda}{1+g_t}h_t \tag{51}$$

となるので，

$$h_{t+1}-h_t=\frac{\lambda-g_t}{1+g_t}h_t \tag{52}$$

を得る。

モデルは，（50），（52）に集約された。

均衡点は，

$$g=\lambda \tag{53}$$

$$h=\frac{s\sigma_r-\lambda}{\gamma} \tag{54}$$

となる。

正の均衡点が存在するためには，

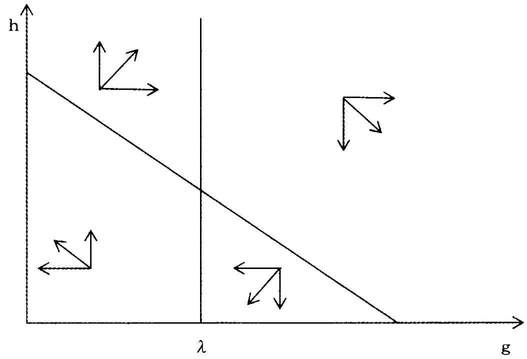
$$s\sigma_r>\lambda \tag{55}$$

でなければならない。

このことの意味は，ハロッド流に表現すると，現実の成長率は自然成長率に等しく，自然成長率は保証成長率よりも小さいということである。

位相図を描くと次の図3のようになる。

図3

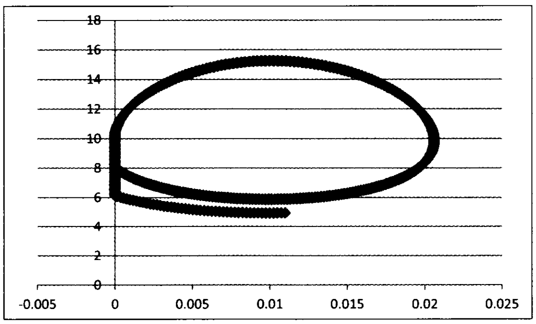


これらは非線形の差分方程式を含んでいるので，エクセルで数値計算をして動きを分析した。その結果，均衡点に収束することはないようであるが，投資関数を，（42）に代えて，

$$g_{t+1}=\max(0,\ g_t+\alpha(\sigma_t-\sigma_r)) \tag{56}$$

という負にはならないという制約を加えて数値計算をすると，次の図4ような結果を得た。横軸がg，縦軸がhである。なお，パラメータの値は，$s=0.4$，$\alpha=0.0001$，$\gamma=0.2$，$\sigma r=5$，$\lambda=0.01$で，初期値は，$g=0.01$，$h=4.95$である。なお，均衡値は，$g=0.01$，$h=9.95$である。

図4

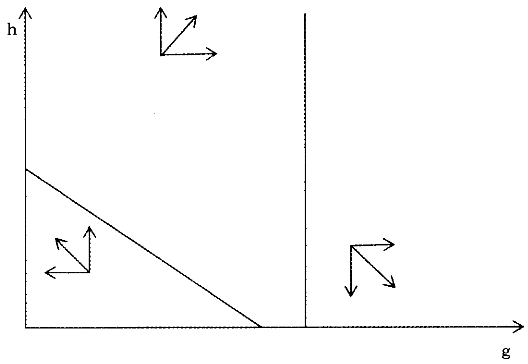


また，

$$s\sigma_r < \lambda \tag{57}$$

の場合は，位相図は，図５のようになり，正の領域で均衡点はなく，上方に発散していく。

図５



この二つの位相図は示唆的であり興味深い。つまり，貯蓄率が変化することを考慮に入れると，自然成長率が小さいときには，均衡点の周りを循環し，経済が上方に発散することはなく，逆に自然成長率が大きいときには，経済が上方に発散していくことを示唆しているからである。

Ⅴ　ハロッド＝ドーマー理論の拡張２

次に，σ_rの変動による安定化作用について考察する。

ハロッドは，また，保証成長率が変動することも考えていた。保証成長率の低下により，下方への発散過程が上方への発散過程に変わることも考えていたようである。

そのことを本稿のモデルで考えると，σ_rが変化することを意味する。新古典派的に考えると，上方への累積過程では，資本ストックが増え，資本の限界生産力が低下する。資本の限界生産力が低下するので，生産要素が資本から労働にシフトする。現実には，上方への累積過程では労働需要が増加し，実質賃金率が上昇するので，できるだけ労働を使わない生産方法が採用されるかもしれない。もしそうであれば，生産要素は逆に労働から資本の方にシフトしようとするかもしれない。また，上方への累積過程では利子率も上昇するので，生産要素のシフトは起こらないかもしれない。様々なケースが考えられるが，ここではσ_rの安定化機能を分析するために，gが上昇すればσ_rが上昇すると仮定する。このことを簡単に一次式で，

$$\sigma_r = fg + e \tag{58}$$

と仮定する。そのほかは，Ⅲ節のモデルと同様だと仮定すると，モデルは次の式に集約される。

$$g_{t+1} = g_t + \beta\left(\frac{1}{s}g_t - (fg_t + e)\right)$$

$$= \left[1 + \beta\left(\frac{1}{s} - f\right)\right]g_t - \beta e \tag{59}$$

従って，

$$1 + \beta\left(\frac{1}{s} - f\right) > 1 \tag{60}$$

つまり，

$$1 - sf > 0 \tag{61}$$

であれば，

$$g = \frac{e}{1 - sf} \tag{62}$$

という均衡点を持ち，初期値が均衡点以外であれば，上方または下方へ発散する。

逆に，

$$1 - sf < 0 \tag{63}$$

であれば，正の均衡値をもたず，初期値のいかんにかかわらず，図６のように，gは常に下方へ発散する。

図６

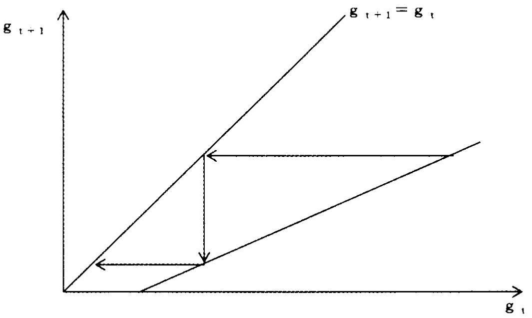
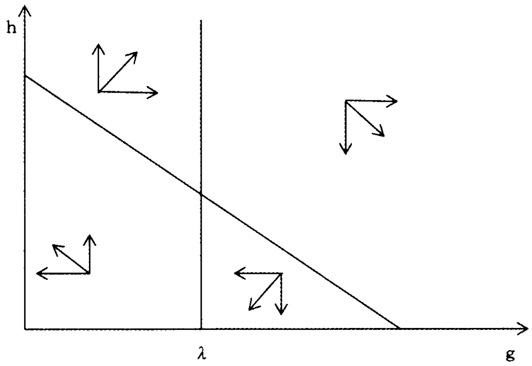


図７



Ⅵ　ハロッド＝ドーマー理論の拡張３

次に，平均貯蓄率とσ_rの二つが変化する場合について考察する。消費関数についてⅣ節と同様に仮定し，σ_rの変化は，(58) を仮定すると，次の二本の式に集約される。

$$g_{t+1}=g_t+\alpha\left[\frac{1}{s}(\gamma h_t+g_t)-(fg_t+e)\right] \tag{64}$$

$$h_{t+1}-h_t=\frac{\lambda-g_t}{1+g_t}h_t \tag{65}$$

となる。

均衡点は，

$$g=\lambda \tag{66}$$

$$h=\frac{(sf-1)\lambda+se}{\gamma} \tag{67}$$

である。

位相図は，

$$sf-1<0 \tag{68}$$

の場合は，図７のようになる。

この場合は，

$$\lambda>\frac{se}{1-sf} \tag{69}$$

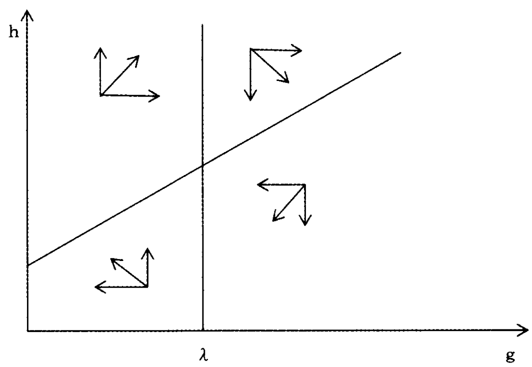
であれば，正の均衡点がなくなり，位相図は図５のようになり発散する。

また，

$$sf-1>0 \tag{70}$$

の場合は，位相図は，図８のようになる。この場合は，λがどんなに大きくても，正の均衡値が存在する。

図８

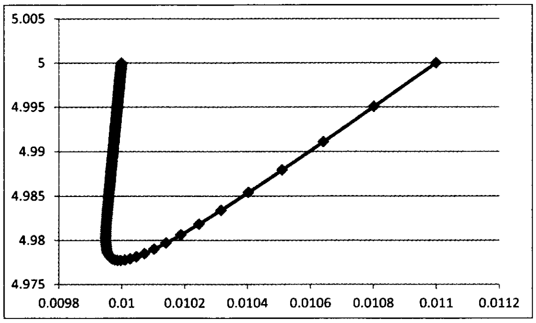


均衡値に収束するかどうか数値計算をしたところ，次の図９のように均衡点に収束した。パラメータの値は，$s=0.4$，$\alpha=0.001$，$\gamma=0.2$，$\lambda=0.01$，$f=200$，$e=0.525$で，初期値の値は，

$g = 0.011$, $h = 5$である。なお，均衡値の値は，$g = 0.01$, $h = 5$である。

収束するかどうかを決めているのは主として f の大きさである。f が大きければ収束しやすくなる。つまり，蓄積率 g が変化したときに，その変化に応じて σ_r が大きく変動すれば，経済は均衡点に収束する。

図9



Ⅶ　まとめと今後の課題

本稿では，新古典派成長論の問題点を指摘し，ハロッド＝ドーマーモデルを基に，それを拡張したモデルを構築し，日本経済の停滞の原因を考察した。

日本経済の停滞を本稿Ⅵ節のモデルを使って説明すれば，ＧＤＰが増加したときに平均貯蓄性向が増加し，企業家が望ましいと考える生産資本比率が上昇することによって，なかなか上方への発散過程にはいらず経済は均衡点にとどまるようになる。そして，その均衡点が自然成長率に等しく，その自然成長率は低いので，低成長率にとどまっていることになる。

貯蓄率の上昇は，耐久消費財需要の飽和と将来不安による消費の抑制や，富裕層への分配が増えることにより全体として貯蓄率が増加していること，大企業の内部留保の増加により貯蓄が増加していることが考えられる。

自然成長率は，通常，労働力人口の増加率と技術進歩率の和で表される。そして，技術進歩はプロセスイノベーションとプロダクトイノベーションに分けられる。プロダクトイノベーションで技術進歩率を定義するのは難しい問題ではあるが。

プロセスイノベーションは今までよりも安いコストで生産することであるが，需要飽和が想定される現状では，安く生産することにより需要を増やすことは難しいと思われる。そう考えると，新しい生産技術を体化した資本設備を投資することはあまりないと考えられる。また，生産工程の見直しにより歩留まり率を上げることができれば，新たな設備投資は必要とされない。

従って，自然成長率を上げる可能性があるのはプロダクトイノベーションであろう。プロダクトイノベーションにより，新しい消費財，中間投入財等を開発しそれを生産するための設備投資が必要とされれば，σ_r が低下し，上方への発散運動も始まる可能性がある。しかしながら，新しい消費財そのものが小さくなっているので，その生産の為に必要とされる中間投入財や生産財も小さくて済むようであれば，それほど多くの設備投資は必要とされないかもしれない。技術的に作るのが難しく，世界中で使用されているものの中間投入財の開発が重要になるのではないだろうか。

また，設備投資が少なくて済むのならば，労働分配率を高めることにより，消費性向を高めることが重要になる。資本主義経済の下でこれをどのように達成するかは，経済学の理論的な再構築を含んだ大きな課題である。

本文でも述べたが，経済の成長を考えるときには，今期の貯蓄がいかにして来期の設備投資に結びつくかが重要なポイントである。今期の貯蓄はただ金融資産の増加につながるだけで，来期の設備投資につながらないだけでなく，金融面の攪乱が実体経済に影響を及ぼす側面もある。本稿では

この側面の分析がなされていない。今後の大きな課題である。

参考文献

Ｅ．Ｆ．ドーマー『経済成長の理論』宇野健吾訳，東洋経済新報社，1959

Ｒ．Ｆ．ハロッド『ハロッド　経済動学』宮崎義一訳，丸善株式会社，1976

宮沢健一『第二版　経済学全集11　国民所得理論－改訂版』筑摩書房，1976

中谷巌『入門マクロ経済学　第３版』日本評論社，1993

大住圭介・川畑公久・筒井修二編『現代経済学のコア　経済成長と動学』勁草書房，2006