The 34th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2011)
Ousyuku, Iwate, Japan, Nov. 29–Dec. 2, 2011

Skew information に関するシュレーディンガー型の不確定性関係
Schrödinger uncertainty relation on skew informations

古市 茂*　　柳　研二郎†
Shigeru Furuichi　　Kenjiro Yanagi

Abstract— S.Luo introduced a new quantity (which is often called correlation measure) related to Wigner-Yanase skew information and he successfully established the Heisenberg type uncertainty relation. We show Schrödinger type uncertainty relation on this quantity defined by the use of Wigner-Yanase skew information. Our result refines Luo's one. Moreover, we show generalized results using Wigner-Yanase-Dyson skew information or metric adjusted correlation masure.

Keywords— Skew information, correlation measure and uncertainty relation

1 Introduction

近年，skew information と不確定性関係に関する数学的な研究が活発にされている [1, 2, 3, 4, 5]．特に，今年に入ってからは，既に幾つかの論文が出版されている [6, 7, 8, 9]．本講演では，昨年，出版された Furuichi の論文 [10] と今年，出版予定の Furuichi-Yanagi の論文 [11] の結果に基づいた内容（Schrödinger 型の不確定性関係）について紹介することにする．

以下，$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とし，以降，A, B を $\mathcal{H}$ 上の観測量（自己共役作用素），ρ を $\mathcal{H}$ 上の量子状態（密度作用素＝トレース１の正作用素）とする．Heisenberg の不確定性関係 [12] から始める．

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2 \tag{1.1}$$

ここで，$V_\rho(H)$ は，観測量 H の量子状態 ρ における分散で，次で定義される：

$$\begin{aligned} V_\rho(H) &\equiv Tr[\rho\,(H - Tr[\rho H]I)^2] \\ &= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho H]^2. \end{aligned}$$

Schrödinger はこの結果より強い結果として，共分散を用いて次の不等式を与えた．これを Schrödinger の不確定性関係 [13, 14] と呼ぶ．

$$\begin{aligned} &V_\rho(A)V_\rho(B) - |Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

但し，ρ における A, B の共分散は

$$Cov_\rho(A,B) \equiv Tr[\rho\,(A - Tr[\rho A]I)\,(B - Tr[\rho B]I)]$$

で定義される．

物理的には，観測量 H は非有界作用素を考えるのが一般的であるが，本稿では数学的興味の観点 (幾つかのトレース不等式の導出) から有界作用素のみを考える．少し説明を加えると，非有界作用素として，例えば Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な部分空間（急減少関数の全体）$S(\mathbb{R})$ 上の微分作用素 P_0 と掛け算作用素 Q_0：

$$(P_0 f)(t) = icf'(t), \qquad (Q_0 f)(t) = tf(t).$$

はそれぞれ，物理的には位置と運動量に相当する．また，$P = closure\{P_0\}$ と $Q = closure\{Q_0\}$ は自己共役となる．ここで，これらは以下の正準交換関係（ＣＣＲ) と呼ばれる重要な関係式を満たす．

$$PQ - QP = icI. \tag{1.3}$$

（左辺は正確には closure を意味する．）この P,Q を例えば Heisenberg の不確定性関係式における A,B とおくと，有名な不確定原理の不等式が得られる．

$$V_\rho(P)V_\rho(Q) \geq \frac{|c|^2}{4}$$

例えば，分散 $V_\rho(P)$ は状態 ρ において位置を測定した時の測定値の分散を示しており，２つの分散の積が必ず右辺以上でなければならないので，この不等式は，状態 ρ において位置と運動量を同時には正確に測定できないことを示している．なお，P や Q が有界作用素のときはＣＣＲは成立しない.（詳しくは，[15] の 60 頁.）しかしながら，本講演では，新たな不確定性原理を導出して物理的な新たな知見を得ようとするものではなく，不確定性関係のよりタイトな不等式を導出することを目的としているので，有界作用素や行列の設定で議論することにする．

2 Luo の不確定性関係

量子状態 ρ が混合状態のとき，$V_\rho(H)$ は古典的混合と量子的不確定性からなるので，完全な量子的な不確定性関係を得ようと，ある種の量子的不確定性を表す

* 日本大学文理学部情報システム解析学科，〒 156-8550 東京都世田谷区桜上水 3-25-40，E-mail:furuichi@chs.nihon-u.ac.jp
† 山口大学大学院理工学研究科 (工学) 自然科学基盤系学域，〒 755-8611 山口県宇部市常盤台 2-16-1，E-mail:yanagi@yamaguchi-u.ac.jp

Wigner-Yanase skew information [16] を用いて，次の不等式が考察された．

$$I_\rho(A)I_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \qquad (2.1)$$

$I_\rho(A)$ の定義は定義 2.1 を見よ．しかし，この不等式は一般には成立しないことが分かった．（文献 [17, 18, 19] を参照せよ．）その反例として次の簡単な例が存在する：

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

そこで，Luo は，ある種の量子的な不確定性を表す次の量 $U_\rho(H)$ を導入した [20]．

定義 2.1 量子状態 ρ と観測量 H に対して次を定義する．

(i) The Wigner-Yanase skew information:

$$\begin{aligned} I_\rho(H) &\equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{1/2},H_0])^2\right] \\ &= Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^{1/2}H_0\rho^{1/2}H_0], \end{aligned}$$

但し，$H_0 \equiv H - Tr[\rho H]I$ であり，$[X,Y] \equiv XY - YX$ は *commutator* である．

(ii) The quantity associated to the Wigner-Yanase skew information:

$$\begin{aligned} J_\rho(H) &\equiv \frac{1}{2}Tr\left[\left(\left\{\rho^{1/2},H_0\right\}\right)^2\right] \\ &= Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^{1/2}H_0\rho^{1/2}H_0], \end{aligned}$$

但し，$\{X,Y\} \equiv XY + YX$ は *anti-commutator* である．

(iii) 古典的混合を取り除いた量子的不確定性を表す量：

$$U_\rho(H) \equiv \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2}.$$

ここで，次の関係が成り立つ．

$$V_\rho(H) = \frac{1}{2}\left(I_\rho(H) + J_\rho(H)\right), U_\rho(H) = \sqrt{I_\rho(H)J_\rho(H)}.$$

つまり，$V_\rho(H)$ は $I_\rho(H)$ と $J_\rho(H)$ の算術平均であり，$U_\rho(H)$ は $I_\rho(H)$ と $J_\rho(H)$ の幾何平均である．それゆえ，直ちに，$V_\rho(H) \geq U_\rho(H)$ が成り立つ．また，Luo は論文 [20] において次の不確定性関係を示した．

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \qquad (2.2)$$

これは，Heisenberg の不確定性関係を改善するものである．なお，不等式 (2.1) が成り立たない理由として，大小関係 $V_\rho(H) \geq U_\rho(H) \geq I_\rho(H) \geq 0$ がある．ここで，定義 2.1 の (iii) の式から，量 $U_\rho(H)$ の持つ物理的解釈を与えておく．(詳細は Luo の論文 [20] を参照せよ.）ρ が混合状態（線形凸結合）のとき，$V_\rho(H)$ は古典的な相関と量子的な相関を持つ．また，$I_\rho(H)$ は，ある種の量子的相関のみを持つので，差 $V_\rho(H) - I_\rho(H)$ は古典的な相関のみを有しており，従って，差 $V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2$ は，古典的な相関と量子的な相関を持つ $V_\rho(H)^2$ から古典的な相関のみを有する $(V_\rho(H) - I_\rho(H))^2$ を減じているので，ある種の量子的な相関を有している考えられる．それを裏付ける如く，$I_\rho(H) \leq U_\rho(H) \leq V_\rho(H)$ が成り立っているが，$I_\rho(H)$ が何らかの量子相関のみを表しているのであれば，それよりも大きい値を取る $U_\rho(H)$ には，少なからず古典的な相関も含んでいるかもしれない．しかし，$V_\rho(H)$ より小さい値を取るので，$V_\rho(H)$ よりは古典的相関を排除した量と考えても良さそうである．

3 Schrödinger 型の不確定性関係

不等式 (2.2) の Schrödinger 版の不確定性関係とでもいうべき次の定理を示す．

定理 3.1 ([10]) 量子状態 ρ と 2 つの観測量 A 及び B に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &U_\rho(A)U_\rho(B) - |Re\{Corr_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2 \quad , \end{aligned} \qquad (3.1)$$

但し，*correlation measure* は任意の作用素 X と Y に対して次で定義される：

$$Corr_\rho(X,Y) \equiv Tr[\rho X^*Y] - Tr[\rho^{1/2}X^*\rho^{1/2}Y]$$

Remark 3.1 不等式 *(3.1)* は，不等式 *(2.2)* を改善するものである．

Remark 3.2 純粋状態 $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ の場合，$I_\rho(H) = V_\rho(H)$ なので $U_\rho(H) = V_\rho(H)$ 及び $Corr_\rho(A,B) = Cov_\rho(A,B)$ が成り立つ．従って，定理 *3.1* は *Schrödinger* の不確定性関係 *(1.2)* に一致する．

Remark 3.3 次の例

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は，以下を示す：

$$\begin{aligned} &V_\rho(A)V_\rho(B) - |Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2 \\ &- \left(U_\rho(A)U_\rho(B) - |Re\{Corr_\rho(A,B)\}|^2\right) \simeq -0.232051. \end{aligned}$$

また，次の例

$$\rho = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

は，以下を示す：

$$\begin{aligned} &V_\rho(A)V_\rho(B) - |Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2 \\ &- \left(U_\rho(A)U_\rho(B) - |Re\{Corr_\rho(A,B)\}|^2\right) \simeq 13.7862. \end{aligned}$$

従って，$V_\rho(A)V_\rho(B)-|Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2$ と $U_\rho(A)U_\rho(B)-|Re\{Corr_\rho(A,B)\}|^2$ の間には一般には大小関係はない．つまり，定理 *3.1* が常に *Schrödinger* の不確定性関係 *(1.2)* よりも良いとも悪いとも言えない．

以上の状況を踏まえて，Wigner-Yanase skew information と Schrödinger 型の不確定性関係について一つコメントを与える．これまでに次の事実が分かっている．ここで，関係（記号）$x \ngeq y$ は,「一般には $x \geq y$ は成り立たない」，ということを意味することにする．

- 本節でも例を与えた（下記の 2 つ目の関係式）ように，次の関係が得られている [17, 18, 19].

$$\begin{aligned} &V_\rho(A)V_\rho(B)-|Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\geq I_\rho(A)I_\rho(B)-|Re\{Corr_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\ngeq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \end{aligned}$$

- また，次の結果も得られている.（定理 3.1 及び，Remark 3.3.）

$$\begin{aligned} &V_\rho(A)V_\rho(B)-|Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\ngeq U_\rho(A)U_\rho(B)-|Re\{Corr_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \end{aligned}$$

- $Corr_\rho(A,A)=I_\rho(A)$ 及び $Cov_\rho(A,A)=V_\rho(A)$ は成り立つが，一般に $Corr_\rho(A,A)\neq U_\rho(A)$ である．

上記の 3 点を考慮すれば，2 つの観測量 A, B と量子状態 ρ に対して，次の関係式をを満たす新たな量 $\Lambda_\rho(A,B)$ が存在するか否かという問題が残る．

$$\begin{aligned} &V_\rho(A)V_\rho(B)-|Re\{Cov_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\geq \Lambda_\rho(A,A)\Lambda_\rho(B,B)-|Re\{\Lambda_\rho(A,B)\}|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \end{aligned}$$

4 Schrödinger 型の不確定性関係の拡張

Yanagi は不等式 (2.2) の一般化として，Wigner-Yanase-Dyson skew information を用いて，次の不等式を示した [21]：

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B)\geq \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2. \qquad (4.1)$$

ここで，$0<\alpha<1$ であり，$U_{\rho,\alpha}(H)$ は次で定義される．

$$U_{\rho,\alpha}(H)\equiv\sqrt{V_\rho(H)^2-(V_\rho(H)-I_{\rho,\alpha}(H))^2}, \qquad (4.2)$$

ただし Wigner-Yanase-Dyson skew information $I_{\rho,\alpha}(H)$ は次で定義される．

$$I_{\rho,\alpha}(H)\equiv\frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^\alpha,H_0])(i[\rho^{1-\alpha},H_0])\right] \qquad (4.3)$$

(4.1) は，Heisenberg 型の不確定性関係の一径数拡大に相当するものであるが, 次では，Wigner-Yanase-Dyson skew information $I_{\rho,\alpha}(H)$ を用いて，Schrödinger 型の不確定性関係（定理 3.1）の一径数拡張を与える．

定理 4.1 (**[11]**) $\alpha\in[1/2,1)$ のとき, 量子状態 ρ と 2 つの観測量 A 及び B に対して

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B)\geq 4\alpha(1-\alpha)|Corr_{\rho,\alpha}(A,B)|^2 \qquad (4.4)$$

が成り立つ．但し，一般化 *correlation measure [18, 19]* は任意の作用素 X,Y に対して次で定義される：

$$Corr_{\rho,\alpha}(X,Y)\equiv Tr[\rho X^*Y]-Tr[\rho^\alpha X^*\rho^{1-\alpha}Y]$$

なお，$\alpha\in(0,1/2)$ のときは不等式 (4.4) が成り立たない例が存在する．さらに次のような二径数拡張も可能である．

定理 4.2 (**[11]**) もし $0\leq\alpha,\beta\leq\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2}\leq\alpha,\beta\leq 1$ ならば，量子状態 ρ と 2 つの観測量 A 及び B に対して，次が成り立つ：

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B)\geq 4\alpha(1-\alpha)|Corr_{\rho,\alpha,\beta}(A,B)|^2$$

但し，

$$\begin{aligned} &Corr_{\rho,\alpha,\beta}(X,Y) \\ &\equiv(1-\beta)Corr_{\rho,\alpha}(X,Y)+\beta Corr_{\rho,1-\alpha}(X,Y). \end{aligned}$$

5 Schrödinger 型の不確定性関係のさらなる拡張

Hansen によって導入された metric adjusted correlation measure [22] を用いれば，更なる一般形を示すことができる.（このためには多少の準備を要するため，時間があれば本講演で取り上げることにする．以下，我々の論文 [11] で得られた主結果のみを示しておく.）

定理 5.1 (**[11]**) f を次を満たす *regular symmetric normalized operator monotone function* とする．ただし，$x>0$ とする．

$$\begin{aligned} &\frac{x+1}{2}+\tilde{f}(x)\geq 2f(x), \\ &\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\left\{(x+1)-(x-1)^2\frac{f(0)}{f(x)}\right\}. \end{aligned} \qquad (5.1)$$

そのとき，密度行列 ρ とエルミート行列 A,B に対して次が成り立つ：

$$U_\rho^f(A)U_\rho^f(B)\geq 4f(0)|Corr_\rho^f(A,B)|^2, \qquad (5.2)$$

但し，

$$\begin{aligned} &Corr_\rho^f(A,B)\equiv\frac{f(0)}{2}\langle i[\rho,A],i[\rho,B]\rangle_{\rho,f}, \\ &I_\rho^f(A)\equiv Corr_\rho^f(A,A), \\ &U_\rho^f(A)\equiv\sqrt{V_\rho(A)^2-(V_\rho(A)-I_\rho^f(A))^2}. \end{aligned}$$

次の関数 f_{WYD} は定理 5.1 の条件 (5.1) を満たすので，以下の系を得る．

$$f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \quad \alpha \in (0,1).$$

系 5.1 ([11]) 密度行列 ρ とエルミート行列 A,B に対して次が成り立つ：

$$U_\rho^{f_{WYD}}(A) U_\rho^{f_{WYD}}(B) \geq 4\alpha(1-\alpha)|Corr_{\rho,\alpha,\frac{1}{2}}(A,B)|^2.$$

謝辞

The author (S.F.) was partially supported by the Japanese Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists (B), 20740067. Also the author (K.Y.) was partially supported by the Japanese Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (C), 20540175 and 23540208.

参考文献

[1] K.Audenaert, L.Cai and F.Hansen, Inequalities for quantum skew information, Lett. Math. Phys., Vol.85(2008), pp.135-146.

[2] L.Cai and S.Luo, On convexity of generalized Wigner-Yanase-Dyson information, Lett. Math. Phys., Vol.83(2008), pp.253-264.

[3] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information, J. Math. Anal. Appl., Vol.356(2009), pp.179-185.

[4] C.K.Ko, Comments on conjectures of trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information, J. Math. Anal. Appl., Vol.369(2010), pp.164-167.

[5] M.Lin, On a conjecture of S.Furuichi et al., personal communications. (unpublished)

[6] S.Furuichi, Inequalities for Tsallis relative entropy and generalized skew information, to appear in Linear and Multilinear Algebra.

[7] C.K.Ko and H.J.Yoo, Uncertainty relation associated with a monotone pair skew information, J. Math. Anal. Appl., Vol.383(2011), pp.208-214.

[8] K.Yanagi, Metric adjusted skew information and uncertainty relation, J. Math. Anal. Appl., Vol.380(2011), pp.888-892.

[9] P.Gibilisco and T.Isola, How to distinguish quantum covariances using uncertainty relations, J. Math. Anal. Appl., Vol.384(2011), pp.670-676.

[10] S.Furuichi, Schrödinger uncertainty relation with Wigner-Yanase skew information, Phys. Rev. A, Vol.82(2010), 034101.

[11] S.Furuichi and K.Yanagi, Schrödinger uncertainty relation, Wigner-Yanase-Dyson skew information and metric adjusted correlation measure, to appear in J. Math. Anal. Appl..

[12] W.Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantummechanischen Kinematik und Mechanik, Zeitschrift für Physik, Vol.43(1927), pp.172-198.

[13] H.P.Robertson, The uncertainty principle, Phys.Rev.,Vol.34(1929),pp.163-164.

[14] E.Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, Proc. Prussian Acad. Sci., Phys. Math. Section, Vol.XIX(1930), pp.293.

[15] 日合文雄，柳研二郎，ヒルベルト空間と線形作用素，牧野書籍，1995 年．

[16] E.P.Wigner and M.M.Yanase, Information content of distribution, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol.49(1963), pp.910-918.

[17] S.Luo and Q.Zhang, On skew information, IEEE Trans. Information Theory, Vol.50(2004), pp.1778-1782, and Correction to "On skew information", IEEE Trans. Information Theory, Vol.51(2005), p.4432.

[18] H.Kosaki, Matrix trace inequality related to uncertainty principle, International Journal of Mathematics, Vol.16(2005), pp.629-646.

[19] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation, IEEE Trans. Information Theory, Vol.51(2005), pp.4401-4404.

[20] S.Luo, Heisenberg uncertainty relation for mixed states, Phys. Rev. A, Vol.72(2005), 042110.

[21] K.Yanagi, Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information, J. Math. Anal. Appl., Vol.365(2010), pp.12-18.

[22] F.Hansen, Metric adjusted skew information, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., Vol.105(2008), pp.9909-9916.