

# 矩形容器内の水の密度逆転対流の 3次元数値シミュレーション

国次 公司(機械工学科) 西村龍夫(機械工学科)

## 3D Numerical Simulation for Natural convection of Water with Density Inversion in a Rectangular Enclosure

Koji KUNITSUGU(Facility of Mech. Eng.) Tatsuo NISHIMURA(Facility of Mech. Eng.)

**Abstract:** 3D numerical simulation for penetrative convection of water with density inversion in a rectangular enclosure was performed by the numerical scheme with the combination of finite volume method and SIMPLE method and the results were compared with experimental ones. The inspection of numerical techniques revealed that it is important to obtain rational result that to solve the liner system for pressure correction factor in SIMPLE method accurately. The comparison between numerical results and experimental ones under the same conditions shows that the discrepancy between them becomes remarkable with increasing of hot wall temperature; it implies that the appearance of the problem not only numerical scheme but also in experimental apparatus. Moreover, the occurrence of hysteresis that depends on initial state was also found in numerical result.

**Key Words:** density inversion, natural convection, 3D numerical simulation, finite volume method, SIMPLE method, line-SOR method

### 1. 緒言

身近な物質である水は、液相である4.0℃の条件で密度が最大になるという、他の多くの物質とは異なる特異な性質を有することが知られている<sup>1)</sup>。この性質のために、0℃の凝固点付近の領域を含む系では、温度の低い領域よりも高い領域の方で密度が大きくなることに起因する『密度逆転対流』<sup>2)</sup>が出現し、湖沼や内海の凍結のような自然界の現象<sup>3)</sup>や冷媒輸送および蓄熱などの工業的な応用の場<sup>4)</sup>において興味深い挙動を示すことが報告されている。

この現象を解明するため、矩形容器内で生じる密度逆転対流に対する研究が行われてきた<sup>5-9)</sup>。

水の密度逆転対流において特徴的なのは、他の流体では安定成層を形成する天井加熱・底面冷却の系でも、水の場合は底面側の温度を0℃付近に設定することで対流が生じるという現象である。このような状況はpenetrative convectionと呼ばれ、これに対する研究が過去に幾つか行われている<sup>5,9)</sup>。

一例として、西村らは矩形容器の底面温度 $T_c$ を0℃に固定して天井側の温度 $T_h$ を変化させた時に生じるpenetrative convectionの変化を観察した<sup>9)</sup>。図

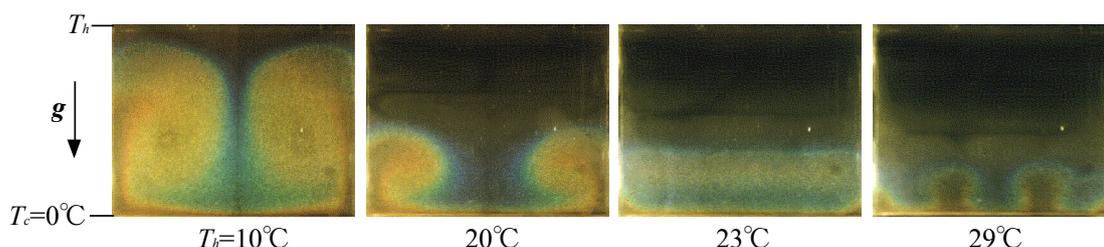


Figure 1 Results of temperature visualization of the natural convection of water with density inversion in a rectangular enclosure for different hot wall temperatures

1は異なる天井温度での流れの温度場を感温液晶粒子によって可視化した結果であり、写真より $T_h$ が10~20°Cの条件下で現れる、容器の奥行き方向に軸を持つ対流セルが、 $T_h$ を23°Cまで増大させた条件では幅方向に軸を持つセルに変化し、さらに温度を上昇させて $T_h=29$ °Cとすると、容器の奥行き方向に軸を持つ複数のセル対が並列する状態に至ることが認められる。これは温度条件の変化によって対流構造が変化する、一種の分岐現象<sup>10)</sup>の発現である。

この変化が生じる過程を観察するため、西村らは商用ソフトウェアを用いた3次元数値シミュレーションを行い、その結果より分岐現象の発現は0~4°Cの温度域にある不安定層の厚みの減少に依存することを示した<sup>9)</sup>。しかしながら、この計算で得られた解には、実験では見られなかった流れ場の非対称性が生じる、対流構造の変化が生じる $T_h$ の値が実験の場合と異なる、など現象の再現という面では不十分なものとどまっていた。

本稿では、自作コードを用いた3次元数値シミュレーションを行い、より実験に近い流れ場が得られる手法および数値的な条件の探究をおこなうと共に、さらに得られた解に基づいて矩形容器内の密度逆転対流の挙動を再検討することを目的とする。

2章では、本研究の対象とする系を示すと共に、数値シミュレーションに用いた技法の説明をおこなう。3章では、数値シミュレーションの実行過程において見出された問題点とその解決について述べる。4章では、数値シミュレーション結果を用いて密度逆転対流場を考察する。最後に、本稿での結果に基づき、今後の研究方針の検討を行う。

## 2. 系と数値シミュレーション技法

図2に、本稿で対象とした矩形容器の形状および計算に用いた座標系を示す。容器形状は、西村らが前述の可視化実験で使用した物と同じ、高さ $H$ ×幅 $L$ ×奥行き $D$ が4cm×5cm×3cmという寸法を有しており、高さ方向を $z$ 軸と取る座標を設定した。図中に示すように、容器天井で加熱、底面で冷却を行っており、また実験で用いられた容器がアクリル樹脂製であったことに基づき、側壁を断熱面としている。本稿では、冷却温度 $T_c$ を0°Cに固定して、加熱温度 $T_h$ を8~40°Cの間で変化させた条件でシミュレーションを行った。

数値シミュレーションのための支配方程式としては、速度 $U$  [m/s] に対する連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

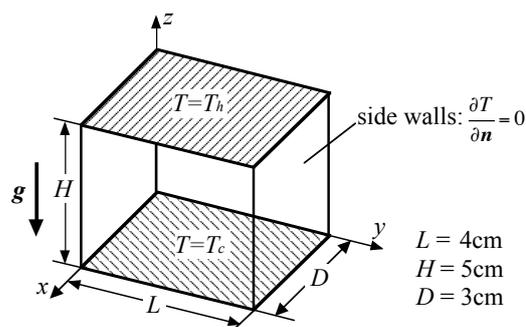


Figure 2 Schematic diagram of the enclosure

が成り立つと仮定して得られる、 $U$ と圧力 $P$  [Pa]に対するナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U}) \quad (2)$$

および温度 $T$  [°C]で表したエネルギー方程式

$$\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C_p T \mathbf{U}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (3)$$

を用いた(式中の物性値の記号については表1を参照)。

密度逆転対流のシミュレーションにおいて重要なのは、動作流体である水の物性値、とりわけ密度 $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>]の温度依存性に対する取り扱いである。4°Cで密度が最大となる挙動を再現するものとして、本稿ではSimonsによって提案された式(4)の関係<sup>3)</sup>を使用した。

$$\rho(T) = 1000 \{1 - 6.8 \times 10^{-2} (T - 4)^2\} \quad (4)$$

これ以外の物性値は表1中に示した値を用いている。表1中の値は、水温が10°Cの条件に対するもの<sup>11)</sup>であるが、本稿に示すシミュレーションはすべてこれらの値を用いて実行した。

数値シミュレーションのために、本稿では上記(1)~(3)のままの無次元化しない保存形の方程式に、有限体積法とSIMPLE法の組み合わせ<sup>12)</sup>による数値スキームを適用した。

今回用いた有限体積法についてごく簡単に説明

Table 1 Physical properties of the system for numerical simulation

$\mu$ : Viscosity of water	$1.310 \times 10^{-3}$ Pa·s
$C_p$ : Heat capacity of water	4195 J/(kg·K)
$\lambda$ : Thermal conductivity of water	0.587 W/(m·K)
$g$ : Gravitational acceleration	9.8 m/s <sup>2</sup>

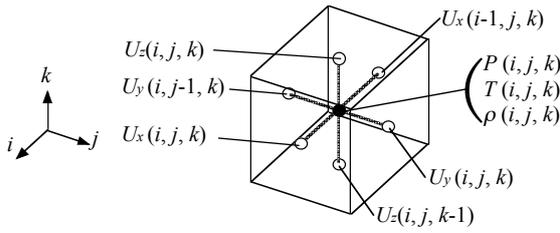


Figure 3 Illustration for volume element and the position of nodes

すると、コントロールボリュームと呼ばれる矩形体積要素内に配置した節点に対して、定数1を重み関数とした重み付き残差法<sup>13)</sup>を実施することで微分方程式を離散化するものである。図3に、本稿の有限体積法で用いた基礎的な体積要素と、体積内部の各変数の節点の配置を示す。図中の*i, j, k*はそれぞれ*x, y, z*軸方向の離散化座標であり、この体積要素の積み上げによって図2に示した計算領域が構成される形になる。なお、この要素は温度と圧力の離散化に対するコントロールボリュームと等しく、また速度と圧力の位置関係は、一般にスタaggerド格子<sup>12)</sup>と呼ばれるものとなっている。

図1に示したように、 $T_n$ の変化と共に密度逆転対流場の構造は大きく変化している。そこで、本研究ではどの条件に対しても同じ離散化格子を用いることにして、*i*方向に30分割、*j*方向に50分割、また*k*方向には40分割した、3つの座標方向のいずれにも等分割の幅を持つ格子を構成した。これは、図3に示した体積要素が、1mm角の立方体であることに相当する。

SIMPLE法に対する概略的な説明は、流れ場の変数*U*と*P*をそれぞれ

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^* + \delta\mathbf{U}, \quad \delta\mathbf{U} = f_1(\delta P) \quad (5)$$

$$P = P^* + \delta P, \quad \delta P = f_2(\delta\mathbf{U}) \quad (6)$$

のように、現在値 $\mathbf{U}^*$ 、 $P^*$ とそれに対する補正量 $\delta\mathbf{U}$ 、 $\delta P$ に分解し、 $\mathbf{U}$ が連続の式(1)を満たすために必要な $\delta\mathbf{U}$ および $\delta P$ を探索する、というものである。具体的には、まず式(5)、(6)を代入した式(2)を変形して離散化、 $\delta\mathbf{U}$ を求める式を得る。次にこれを式(1)と組み合わせることで圧力補正量 $\delta P$ に対する連立方程式を構成、その解から $\delta\mathbf{U}$ を逆算する、というプロセスを補正量が0になるまで繰り返す。

式(2)の離散化より、離散化時刻  $n+1$  における速度の解ベクトル $[\mathbf{U}^*]_{n+1}$ ( $\bullet : x, y, z$ )を陰に解く連立一次方程式系

$$[\mathbf{A}_i(\mathbf{U}^*]_{n+1})][U_x^*]_{n+1} = [\mathbf{B}_i][U_x]_n + [\mathbf{F}_i(P^*]_{n+1})] \quad (7)$$

$$[\mathbf{A}_j(\mathbf{U}^*]_{n+1})][U_y^*]_{n+1} = [\mathbf{B}_j][U_y]_n + [\mathbf{F}_j(P^*]_{n+1})] \quad (8)$$

$$[\mathbf{A}_k(\mathbf{U}^*]_{n+1})][U_z^*]_{n+1} = [\mathbf{B}_k][U_z]_n + [\mathbf{F}_k(P^*]_{n+1})] - g[\mathbf{H}] \quad (9)$$

を得る。ここで、 $[\mathbf{A}_\bullet(\mathbf{U}^*]_{n+1})$ ( $\bullet : i, j, k$  以下同じ)は対流項から生じる因子を含む、方程式の係数を成分とした正方行列、 $[\mathbf{B}_\bullet]$ は離散化タイムステップ $\Delta t$ と離散化格子によって決定される対角行列である。また、 $[\mathbf{F}_\bullet(P^*]_{n+1})]$ は式(2)中の圧力勾配項の離散化で生成される列ベクトル、 $[\mathbf{H}]$ は密度と離散化によって成分の値が決定される列ベクトルである。なお、対流項の離散化には中心差分法を適用した。

式(5)、(6)を式(7)~(9)に代入して式(1)と組み合わせることで、圧力補正量 $[\delta P]$ に対する連立方程式系

$$[\mathbf{A}_p(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_k)][\delta P] = [\mathbf{F}_p(\mathbf{U}^*]_{n+1})] \quad (10)$$

を得る。また温度*T*については式(3)を離散化して次式を得る。

$$[\mathbf{A}_T(\mathbf{U}^*]_{n+1})][T]_{n+1} = [\mathbf{B}_T][T]_n \quad (11)$$

本来、式(2)、(3)のような時間発展型の方程式を解くに際しては、離散化時刻ごとに解を収束させ、 $\delta\mathbf{U}$ と $\delta P$ を0に近づける必要がある、しかしながら、過去の観察結果<sup>9)</sup>は、図1に示した流れ場は最終的に定常状態に達していることを示している。そこで、本稿では解法として、各時刻における解の収束の確認を行わずに時間を進行させ、長時間経過した後に見られる安定な解を定常解として扱う、タイムマッチング法を用いた。

3次元数値シミュレーションの実施に際しては、方程式を離散化して得られる極めて元数の大きな連立方程式をいかに効率良く解くかという点が最大の問題となる。本稿では基本的な解法として線状SOR法<sup>14)</sup>を用いた。これは、単一の節点を計算の基本単位とした反復解法である元来のSOR法に対し、離散化格子内の点列を基本単位とし、連立方程式系を変形して得られる一次元問題の集合に対する掃引を行うことで、計算時間と記憶容量の節減に加えて解の収束性の改善をはかるものである。本稿で用いた離散化格子は直交した3軸で構成されているので、軸に平行な列を基本単位とする。

線状SOR法の実行には、どの軸方向を計算の基本要素とするか、また、掃引の方向をどうするかといった任意性が存在する。本稿では、商用ソフトウェアを用いた計算において実験では生じない流れ場

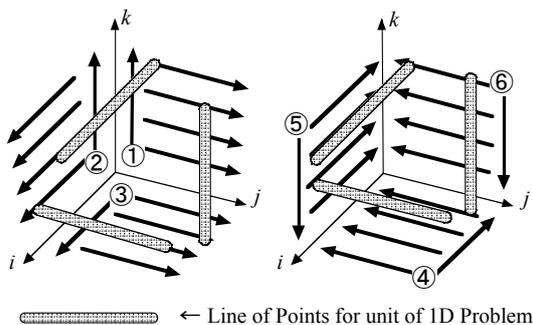


Figure 4 Sweep directions for line-SOR method in the present study

の非対称性が現れた、という過去の経験をふまえ、解の対称性の向上が期待される方法ももちいた。それはまず、 $i$  軸方向の点列を基本単位として、離散化座標の小さい方向から掃引をおこない、 $j$  軸単位、 $k$  軸単位についても同様にする。次に  $k$  軸単位について、今度は大きな離散化座標から向きを反転させて掃引し、これを  $j$  軸、 $i$  軸と先とは逆の順番で行うという一連の動作を、一組の反復単位とするものである。図 4 は具体的な掃引の方向と順番であり、図中の丸数字の位置が掃引の起点を、値が掃引を行う順番を示す。

線状SOR法のような反復解法を用いる場合に留意すべき点は、物理的に意味のある結果が得られるように解を収束させるのに必要な反復回数の評価であり、次章ではこの点について検討する。

章の最後に、数値スキームを実行するための計算コードの構成について触れる。図 5 は式(5)-(11)に基づく計算のフローチャートであり、離散化タイムステップ  $\Delta t$  を計算の 1 サイクルに対応させている。温度差による密度変化が対流を支配するという考えに基づき、温度場を最初に計算して密度を評価した後に、重力加速度が作用する  $z$  方向の速度成分を計算するという手順を用いた。温度場に関しては、側壁部の断熱条件が計算途中でも近似的に満たされるように、断熱壁面上の温度の値の更新を行ないながらの反復計算が可能のようにしている。ただし、本稿の結果にはこのループを使用していない。

図 5 のフローチャートに基づき、Fortran77 のコードを作成した。Intel 社製 Fortran (Apple 社製 MacOS 10.6.2 上) で並列化なしのコンパイルを行い、Intel 社製 CPU Xeon5482 3.2GHz 搭載の PC により実行した結果、第 4 章に示す結果が得られる計算条件下で、図 5 の 1 サイクルを完了するのに 8 秒弱の時間を要した。

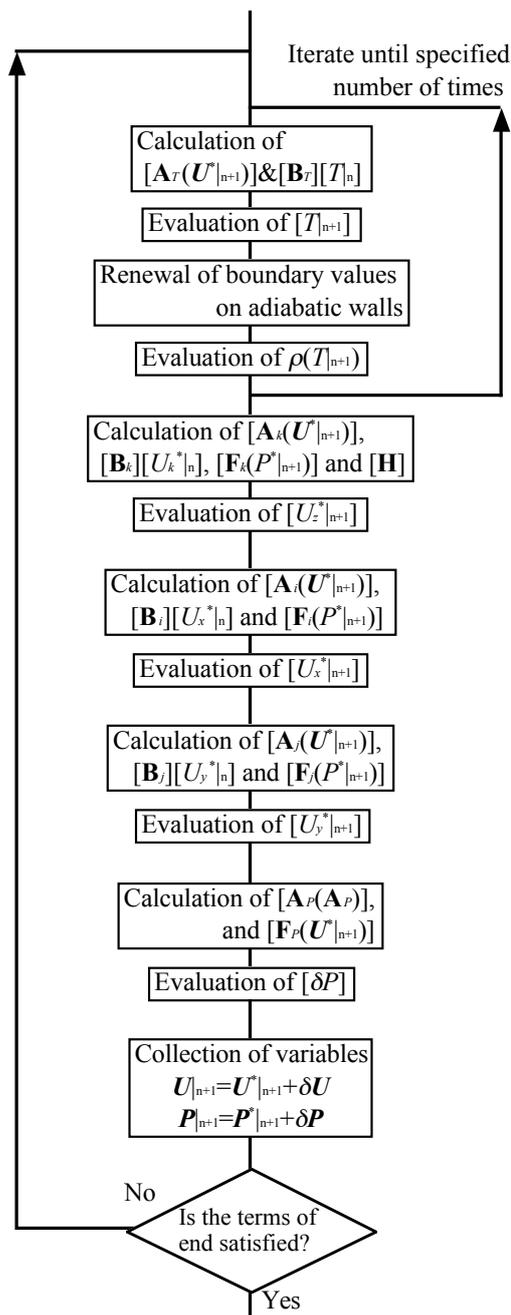


Figure 5 Schematic flow chart of numerical solver used in the present study

### 3. 数値的スキームの挙動と解の収束性

数値的スキームの挙動に対する検討の最初に、図 4 に示した掃引法が実際に解の空間対称性を向上させることを示す。掃引法が解に与える影響は、図 2 中の温度境界条件を適用した 1 辺 1m の立方体領域内で、熱伝導方程式

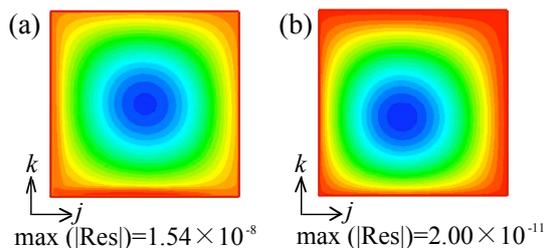


Figure 6 Contours of residual for 3D numerical solution of thermal conduction  
 (a) After 50 iteration with the scheme for sweep shown in Fig.4  
 (b) 200 iteration with  $i$ - $j$ - $k$  sweep

$$\nabla \cdot \nabla T = 0 \quad (12)$$

を線状SOR法により、 $i \times j \times k = 30 \times 50 \times 40$ 分割した格子上で数値解析した結果に見ることができる。図6は、解が収束していない段階で計算された各節点上の残差Resを、 $i$ 方向中央断面上の等高線で示したものである。(a)は図4に示した掃引法を50回反復した後に得られた物であり、一方、(b)は図4の左半分に示した掃引のみを200回反復して得られた結果である。残差自体は掃引回数の多い(b)の方が小さいが、分布は(a)の方が均等になっていることが認められ、図4に示した掃引方法には、確かに数値的な誤差による非対称な解の出現を抑制する効果が認められる。

既述のように、本稿では反復法を一次方程式の解法に用いている。教科書に掲載されている自然対流問題のプログラム例においては、流れ場の結果の収束状況にのみ注目して、一次方程式の解の収束を重視していない例<sup>12)</sup>が見られた。しかしながら、密度逆転対流に対する計算を実行する過程において、一次方程式の解の収束が不十分だと、流れ場全体に対する有意な解が得られないことが判明した。以下では、一次方程式の解の収束状況が流れ場に与える影響について述べる。

図7は、水の初期温度4°C、天井温度 $T_h=8^\circ\text{C}$ という条件で $y$ - $z$ 平面上の2次元流を仮定して得られた、密度逆転対流の温度場である。この結果は、連立一次方程式の解法として、線状SOR法の代わりに直接解法であるガウスの消去法<sup>14)</sup>を用いて得られており、反復解法の結果を近似解とした場合の『厳密解』として扱いうる。なお、3次元系に対応する $j \times k = 50 \times 40$ の格子を用いた計算では解が発散しやすい傾向が見られたので、格子分割を $150 \times 120$ に増やしたところ安定した解が得られるようになった。

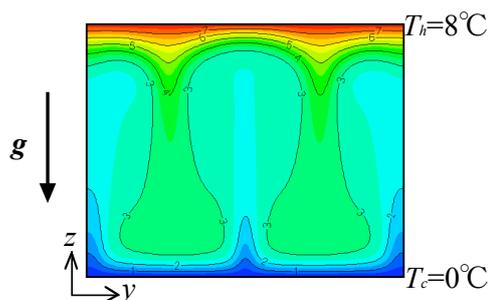


Figure 7 Contours of temperature from the “rigorous” solution for natural convection with density inversion in a 2D area obtained by Gauss elimination

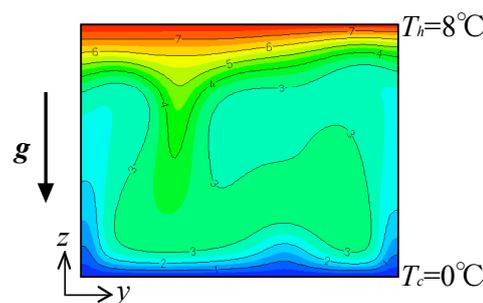


Figure 8 Contours of temperature in a 2D area obtained by line-SOR solver with 500 iteration for evaluation of  $\delta P$

図7の解は明らかに左右対称であり、しかも流れは定常な状態に到達することが見出せた。しかしながら、線状SOR法を用いて解析した場合には、状況が変化した。図8に示す温度場は、図7と同じ温度条件下の密度逆転対流場を、線状SOR法で解析した得られた結果であり、解の対称性を高めるために $j$ 軸単位で $k$ 方向、 $k$ 軸単位で $j$ 方向、 $k$ 軸反転、 $j$ 軸反転という掃引方向の組み合わせを反復単位としてもちいた。図8の結果の計算に用いた反復回数は、温度について100回、速度現在値 $U^*$ の成分毎に25回、圧力補正值 $\delta P$ では500回としている。図8より明らかに見て取れるのは、流れ場の非対称性である。さらに、解の挙動に対する観察より、流場が一定の状態に収束せずに変動を繰り返すことが判明した。

図7と8で、同じ問題を解いているにもかかわらず解の挙動が異なるのは、両者の相違点である連立方程式の解法に起因すると考えるのが自然である。そこで、一次連立方程式の収束状況を検討するために、解の残差を評価した。残差の評価に用いる具体的な指標として、全節点上で評価された残差の絶対値の和 $\sum |\text{Res}|$ を計算した。

Table 2 The comparison of the order of  $\Sigma|\text{Res}|$  for each variables between two linear system solvers for 2D problem

	Gauss elimination	line-SOR
for $T$	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-14}$
for $U_x^*$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-18}$
for $U_y^*$	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-18}$
for $\delta P$	$\sim 10^{-22}$	$\sim 10^{-13}$

表2は図7と8の解が得られた状況下で評価された各変数の $\Sigma|\text{Res}|$ のオーダーを比較した物である。表中で、ガウスの消去法を用いた場合の速度成分 $V$ の残差和が他の変数に比べて特に大きいのが、同様の挙動は後述する3次元計算においても出現しており、本稿作成時点では原因不明である。他の変数に対するガウスの消去法と線状SOR法の結果から評価された残差和の比較は、線状SOR法で計算された $\delta P$ の残差和の値が特に大きいことを示しており、これより、 $\delta P$ の値の収束が他の変数よりも不十分であることが判明した。そこで、他の変数に対する反復回数を固定し、 $\delta P$ についての回数を増大させた場合に生じる解の挙動の変化を調べた。

表3は、 $\delta P$ の計算に用いた反復回数を増大させたときの残差和のオーダーの変化を示す。回数を倍の1000回にした時には、残差和は大きく変化しないが、10000回の反復を用いた条件下では、値が表2中に示したガウスの消去法による解から評価された値と同程度にまで減少している。

図7と8の解の挙動の違いが $\delta P$ の収束度合の差に起因するならば、反復回数を10000に増大して得られる解は、ガウスの消去法で得られるものと基本的に同じになるはずである。図9に示すのは、 $\delta P$ の計算に対する線状SOR法の反復回数を増大させた他は図8と同じ条件の計算を行って得られた、密度逆転対流の温度場である。(a)が1000回、(b)が10000回の反復を用いた結果であり、(a)では図8の場合と同様に、非対称かつ一定値に安定せず変動を繰り返す解を得たが、(b)では明らかに図7に類似した解となっており、しかも変動を生じずに図示した

Table 3 The variation of the order of  $\Sigma|\text{Res}|$  for pressure correction factor in 2D problem by the increasing of number of iteration in line-SOR method

number of iteration	500	1000	10000
for $\delta P$	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-22}$

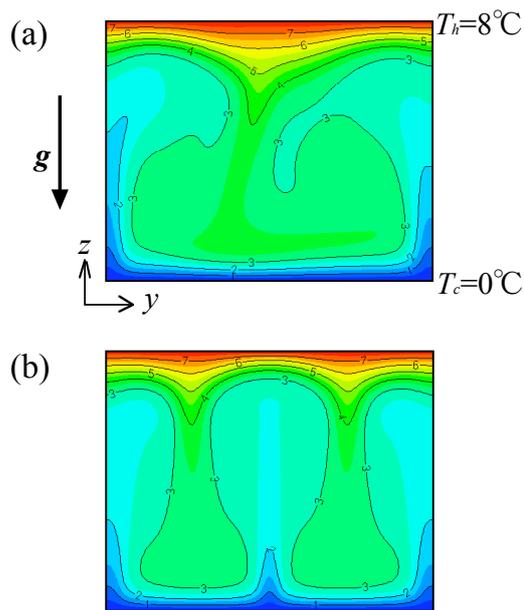


Figure 9 Contours of temperature in a 2D area obtained by line-SOR solver with different iteration for evaluation of  $\delta P$ ; (a) by 1000 iteration, (b) by 10000 iteration

状態へ収束していくことが確認された。この結果は、密度逆転対流場の有意な結果を得るためには連立方程式をできる限り正確に解く必要があり、この点は特に圧力補正值の計算において重要であることを意味している。

上述した2次元系の計算では、ガウスの消去法による離散化時間ステップ当たりの計算時間を1としたときに、線状SOR法の反復を10000回実行した場合のそれは16となってしまう、結果として、SOR法に期待される計算時間の節減という効果は得られていない。しかし、本稿の主題である3次元系に対する計算では、ガウスの消去法に対する線状SOR法の優位性を確認することができた。以下では、3次元系の計算における連立方程式の解の収束性と最終的に得られる解の関係について述べる。

表4は、水の初期温度4°C、天井温度 $T_h=10^\circ\text{C}$ という条件下で異なる連立方程式の解法を用いて得られた温度 $T$ と圧力補正值 $\delta P$ に対して評価された残差和のオーダーを比較した物である。なお、表中に示したガウスの消去法については、後述する計算時間の問題から線状SOR法で得られた解を初期値とした計算を行うことで、残差のみを評価している。また、線状SOR法による計算は $\delta P$ についての反復を400回にした場合と1000回にした場合を示している。線状SOR法の計算において、 $T$ についての反復回数

Table 4 The variation of the order of  $\Sigma|\text{Res}|$  for  $T$  and  $\delta P$  in 3D problem which depend on the difference in linear system solver

	Gauss elimination	line-SOR (400 iter.)	line-SOR (1000 iter.)
for $T$	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-16}$
for $\delta P$	$\sim 10^{-23}$	$\sim 10^{-20}$	$\sim 10^{-23}$

は両方とも30回としているが、速度現在値 $U^*$ に対しては $\delta P$ が400回るときに成分ごとに20回、1000回の際には10回としている。

残差和の比較より、温度についてはガウスの消去法の解よりも線状SOR法の方が残差が小さく、解は十分収束していることがわかる。一方、線状SOR法での $\delta P$ は反復回数の増大により残差和が減少することが認められるが、ガウスの消去法の結果と比較した時の値の違いは表2に示した2次元系の場合に比べると小さく、さらに、反復回数を1000回に増大させた時点で残差和はガウスの消去法と同程度に減少している。なお、ここには示していない $U^*$ については、線状SOR法の反復回数を変化させても残差和は大きく変化していないことを確認しており、 $\delta P$ に比べて速く収束することがわかった。

表3にみられるような収束性の良さは、解にも反映されている。図10は、 $\delta P$ についての反復回数が異なる線状SOR法を用いて得られた密度逆転対流場

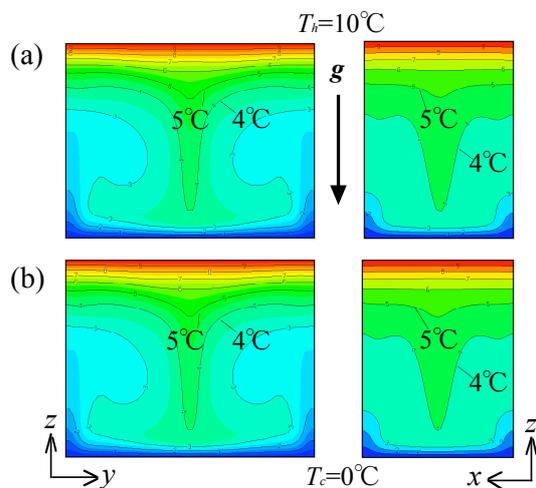


Figure 10 Contours of temperature on the mid-plane in  $x$ - and  $y$ -direction obtained in 3D domain at  $T_h=10^\circ\text{C}$  by line-SOR method; (a) with 400 iteration, (b) with 1000 iteration for evaluation of  $\delta P$

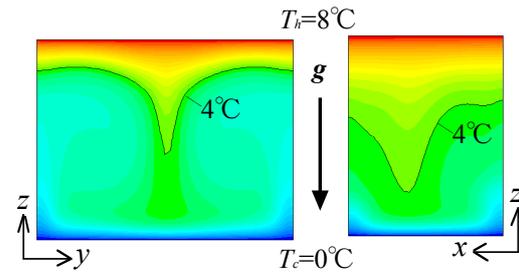


Figure 11 Contours of temperature on the mid-plane in  $x$ - and  $y$ -direction obtained in 3D domain at  $T_h=8^\circ\text{C}$  by Fluent 4.0 commercial code

の等温線を、 $x$ 軸方向中央および $y$ 軸方向中央断面上で示した物であり、両者にはほとんど違いが認められない。この結果は、 $\delta P$ の反復回数を400回とした計算の解は十分収束しているという判断を与える。

ここで3次元系の計算に要する時間について述べておくと、図5の1サイクルの計算に必要な所要時間は図10(a)の場合を1とした時に、(b)の場合は2.3程度であったが、ガウスの消去法の場合には250もの時間を必要としたことより、計算時間の面における線状SOR法の明らかな優位性を確認できる。

図11は、過去の研究<sup>9)</sup>において商用ソフトウェアFluent4.0を用いて得られた、図10の結果と対応する密度逆転対流場の等温線である。図10では対称であった $xz$ 平面上の温度場が非対称化していることが見て取れ、 $T_h$ が $8^\circ\text{C}$ という条件の違いはあるものの、本研究で用いた計算手順が解の空間的な対称性を向上させる効果があることの判断材料の一つになると考える。

最後に、本章に示した2次元系と3次元系の計算を実行する過程において、3次元計算の方が安定な傾向があったことを指摘したい。既述のように、2次元系で計算を安定に実行するためには、格子の分割数を3次元系での対応する平面上のそれよりも増大させる必要があり、また、表3と表4に示したように、反復法による連立方程式の解の収束も2次元系よりも3次元系の方が速かった。加えて、離散化タイムステップ $\Delta t$ についても3次元系ならば0.1 sで安定に計算することができたが、2次元系では発散をさけるために0.01sまで小さくする必要があった。なお、2次元系の計算にガウスの消去法を用いた場合には、流れ場の変動が鈍化した安定した状態に近づくと、 $\Delta t$ を0.01よりもさらに小さくしないと計算が発散してしまう状況が多くみられた事も付記しておきたい。

4. 数値シミュレーション結果に見る  
密度逆転対流

本章では、前章の検討に基づいて設定された計算パラメーターを用いて実行された、密度逆転対流場の3次元数値シミュレーションの結果を、現時点で実験と比較可能な温度場に注目して紹介する。以下に示す結果には、全て線状SOR法が用いられており、連立一次方程式を解くために温度について30回、速度3成分のそれぞれについて20回、圧力補正值について400回という反復回数を用了。また、離散化タイムステップ $\Delta t$ は0.1sとした。

実験において、水の温度を4°Cに保った初期状態から、天井温度を $T_h$ に設定してから図1に示す状態に達するまでに $10^4$ s程度の時間を要したが、3次元数値シミュレーションにおいても初期温度を4°Cに設定した状態から安定した状態に達するまでに、実験での時間に相当する $10^5 \times \Delta t$ 程度の離散化時間を必要とした。なお、本稿においては流れ場の定量的な分析を行わないため、流れ場に対する収束判定は設定していない。

図12は、水温4°Cの状態を初期値として計算された $T_h=10^\circ\text{C}$ の密度逆転対流場の奥行き方向中央断面上の等温線図を、対応する実験の可視化温度場と比較したものである。可視化にもちいられた感温液晶粒子は5°C以下で発色する仕様のもの<sup>15)</sup>であり、これと比較するために等温線図中に5°Cと4°Cの位置を示した。両者の比較より、数値シミュレーションは基本的な流れ構造の再現に成功していることが

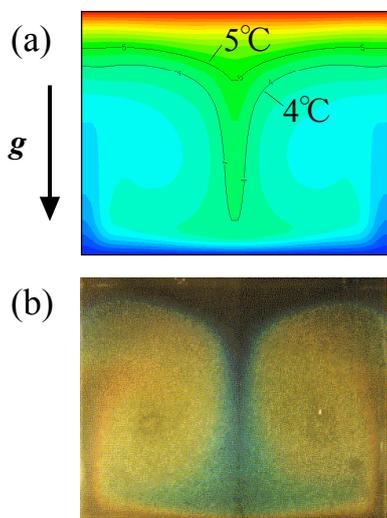


Figure 12 Contours of temperature on the mid-plane in depth at  $T_h=8^\circ\text{C}$ ; (a) result of 3D-numerical simulation, (b) visualized temperature field

認められる。一方、細部の比較からは、実験において液晶の発色が生じる境界がシミュレーションの5°Cと4°Cの等温線の間にある、実験では側壁付近の上昇流がシミュレーションにみられるものよりも発達している、といった相違点が認められる。また、シミュレーションの等温線における容器中央での高温流体の下層への貫入の状況からは、格子の解像度が温度場を再現するのには不十分であることも判明する。なお、これ以降の図では実験結果との対応を容易にする目的で0°Cと10°Cの間でのみ等温線場の分割を行い、それ以上の温度は赤色であらわすものとする。

図13は、初期温度4°Cの系に異なる $T_h$ を設定して得られた温度場を、対応する実験結果と比較したものである。(a)は $T_h$ を実験における設定値の上限である40°Cに設定した場合である。不安定層の厚みの減少が限界を超えたために対流が消滅しており、この状況は実験結果でも認めることができる。また、両者の比較より液晶が発色する境界は5°Cの線よりも低温側にあると判断され、それ

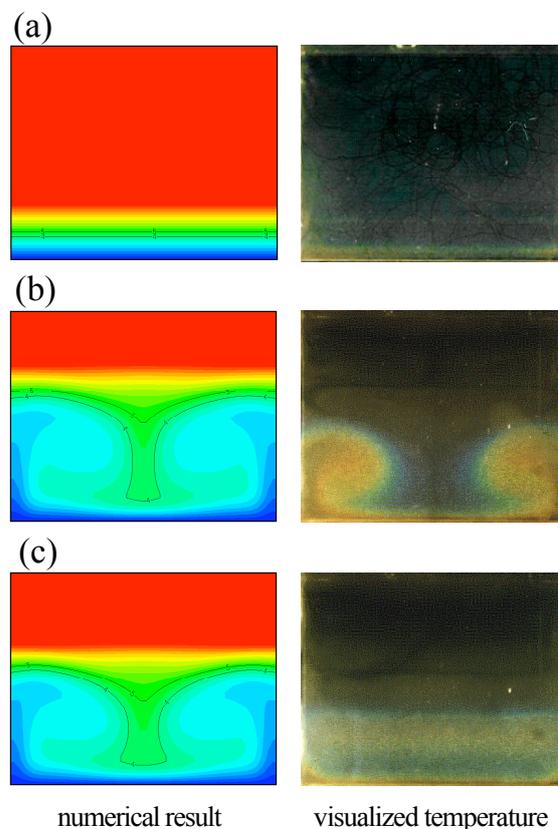


Figure 13 Compare of temperature fields between numerical result and experimental visualization on the mid-plane in depth; (a) at  $T_h=40^\circ\text{C}$ , (b) $20^\circ\text{C}$ , (c) $23^\circ\text{C}$

に従えば図 12 に示した結果のうち、容器中央での高温流体の下層への貫入の状況については、既述した評価よりも一致している可能性が予想される。(b)は、 $T_i=20^\circ\text{C}$ とした条件での温度場であり、奥行き方向に軸をもつ対流セルが容器の下層側に縮小している状況は両方で確認できるが、対流が生じている範囲には明らかに違いが現れており、実験の方がより狭い領域で対流を生じることがわかる。3次元数値シミュレーションと実験結果の間の差異は、(c)の  $T_i=23^\circ\text{C}$ において明確な物となる。すなわち、数値シミュレーションでは奥行き方向に軸をもつ対流セルが維持されているが、実験ではすでに幅方向に軸を持つセルへと変化していることが確認できる。

幅方向に軸を持つ対流セル自体は数値シミュレーションの結果にも出現している。図 14 は初期水温  $4^\circ\text{C}$  で  $T_i=29^\circ\text{C}$ とした時の温度場であり、(c)に示した  $xz$  平面上の等温線図と(d)の  $4^\circ\text{C}$ の等値面の形状より、対流セルの軸が完全に容器幅方向に向いていることがわかり、(a)の  $yz$  平面上の等温線図と図 13(c)の  $23^\circ\text{C}$ の等温線との比較からは、これが実験で生じているものと類似した現象であることを確認できる。しかしながら、 $T_i=29^\circ\text{C}$ の実験結果は、(b)に示すような容器底部付近に奥行き方向の軸を持つ複数の対流セル対が並列する状態へと移行した状態を示している。

図 15 の  $T_i=36^\circ\text{C}$ の結果は、図 14(b)のような状況

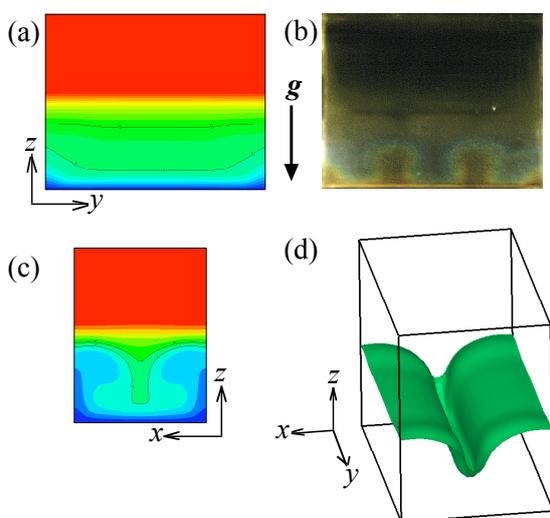


Figure 14 Temperature fields at  $T_i=29^\circ\text{C}$ ; (a) numerical contour on the mid plane in depth, (b) experimental visualization, (c) numerical contour on the mid plane in width, (d) iso-surface of  $4^\circ\text{C}$

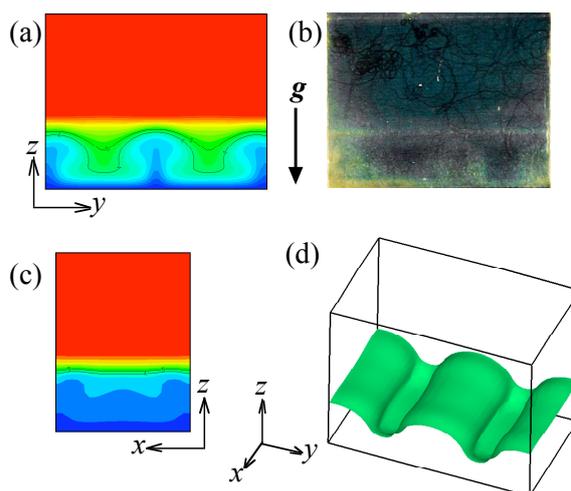


Figure 15 Temperature fields at  $T_i=36^\circ\text{C}$ ; (a) numerical contour on the mid plane in depth, (b) experimental visualization at  $T_i=30^\circ\text{C}$  (for reference), (c) numerical contour on the mid plane in width, (d) iso-surface of  $4^\circ\text{C}$

の数値シミュレーションにおける出現例を示している。(a)に示す  $x$  方向中央断面上の等温線図からは、底面上に 2 対の対流セルが存在することがわかる。これは、3 対の対流セルの存在を予想させる図 14(b)とは異なり、むしろ、図 15(b)に示した  $T_i=30^\circ\text{C}$ での実験結果と類似している。(c)に示す  $y$  方向中央断面上の等温線図は、対流セル領域での複雑な流れの出現を示唆しており、その影響は(d)に示した  $4^\circ\text{C}$ の等値面上に現れている。すなわち、等値面は流れ場が奥行き方向に 2 次元であることを示しているが、面上には微妙な湾曲が生じており、これが(c)図に見られる、側壁付近の上昇流が存在する結果であると考えられる。

図 14(b)と 15(b)において、 $T_i$ が  $1^\circ\text{C}$ しか違わないにもかかわらず流れ構造に顕著な変化がみられることは、密度逆転対流場がその不安定性のために分岐現象を生じ、同一温度条件下であっても外乱などの影響に依存して、異なる流れの状況を顕在化させる可能性が示唆される。

異なる流れ状況の存在が顕在化する現象として、初期条件に依存して解が変化する履歴現象<sup>10)</sup>がある。これによって別の解の存在が判明すれば、これを用いて、図 13(c)で見られたような数値シミュレーションと実験の間の温度場の違いを説明できる可能性が生じる。そこで、 $T_i=23^\circ\text{C}$ の条件に対する計算を、図 14 に示した  $T_i=29^\circ\text{C}$ の解を初期値として実行してみた。図 16 にその結果を示す。図

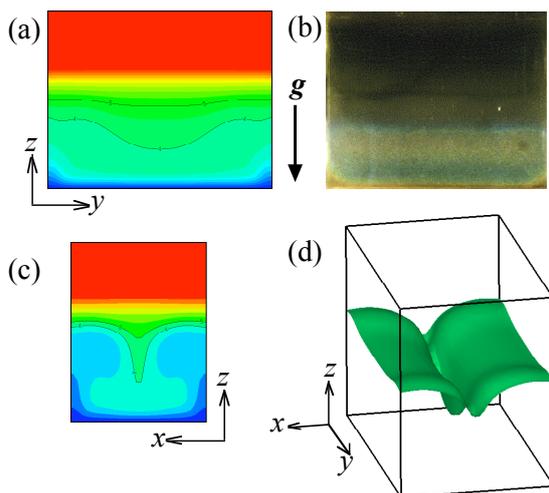


Figure 16 Temperature fields at  $T_h=23^\circ\text{C}$  obtained from the solution at  $29^\circ\text{C}$  as initial condition; (a) numerical contour on the mid plane in depth, (b) experimental visualization at  $T_h=23^\circ\text{C}$  (for reference), (c) numerical contour on the mid plane in width, (d) iso-surface of  $4^\circ\text{C}$

16(a), (c), (d)に示されるように、温度場は図13(c)に示したものと明らかに異なっており、 $T_h=29^\circ\text{C}$ で生じていた幅方向に軸を持つ対流セルが $T_h=23^\circ\text{C}$ に変化させた状態でも維持されていることが認められ、密度逆転対流場における履歴現象の発現が示される。しかしながら、図16(b)に再掲した $T_h=23^\circ\text{C}$ の実験結果と比較した場合には、対流セルの高さが両者で明らかに異なることがわかり、これは、不安定性による別の解の発現だけでは数値シミュレーションと実験結果の違いを説明できないことを意味している。なお、図15に示した $T_h=36^\circ\text{C}$ の解を初期値とした $T_h=29^\circ\text{C}$ の条件に対する計算も行ったが、最終的な対流場は図14に示したのと同様な状態に落ち着き、履歴現象の発現は認められなかった。

## 5. 今後の課題

本稿では、過去の密度逆転対流の3次元数値シミュレーションに存在した問題を改善すべく、自作のコードを用いて計算をおこなった結果、商用ソフトウェアを用いた過去の結果に表れた、実験では確認できなかった対流場の非対称性の問題を改善することに成功した。しかしながら、同一温度条件における対流場の形態が実験とシミュレーションで異なるという、もう一つの問題は改善できなかった。

第4章に示した数値シミュレーションと実験の結果を再検討してみると、 $T_h$ が高温になるほど両者の不一致が顕在化するという傾向が認められる。この観点より、本稿で示した数値シミュレーションを改善するために、以下のような方針が与えられる。

### 1) 物性値の扱いの再検討

本稿のシミュレーションで用いた密度以外の水の物性値は $10^\circ\text{C}$ という低い温度における値に固定されており、このことが $T_h$ を高温に設定した場合の解の挙動に重要な影響を及ぼす可能性は否定できない。また、本稿で用いた水密度の温度依存式(4)が今回検討した温度の範囲に対してどこまで有効なのか、という点についても確認の必要がある。

### 2) 熱的境界条件の再検討

本稿のシミュレーションでは第2章に示したように側壁に断熱条件を与えているが、もちろんこれは実際の装置においては保証されない条件である。そして、図12での数値シミュレーションと実験結果の比較から見出された、側壁付近での上昇流の発達は、側壁からの熱の流入が無視できない大きさにあることを示唆している。

また、温度場に対する再検討は、図15(a)に示した $T_h=36^\circ\text{C}$ と(b)に示した $30^\circ\text{C}$ の等温線図の比較で明らかのように、実験における対流セル高さが低くなる傾向の存在をしめす。これは、天井からの熱が側壁側にも流れるために上層側の水が全体的に加熱された状態になっており、その結果として、水の層の温度がシミュレーションでの予想よりも上昇している可能性が示唆される。

これらの疑問を明確にするためには、数値シミュレーション側だけでなく、実験についても再検証を行う必要がある。

### 3) 数値的手法の改善

本稿で用いられた数値スキームは極めて単純な物であり、より精度の高い手法を用いた場合に解がどうなるのか、という問題を検討しなければならない。また、図12の結果から示唆されるように、本稿で用いた格子の分割はまだ不十分な物であるため、離散化解の収束性を確認する必要がある。さらに、反復解法によって得られた連立一次方程式の解の収束判定も現時点では恣意性があるため、精度保証付き計算<sup>16)</sup>の技法を応用するなどした、より適切な判定法が要求される。

本稿で取り扱った問題は、基本的には式(1)~(3)のような方程式に代表される系の性質によってその挙動が決定されるが、一方で、履歴現象の存在に見

られるように、外乱によってその挙動を変化させる可能性もある。そのような系は工学の分野において多く出現する物であり、これを適切に再現する手法が確立できれば、基礎及び応用の両面で有用であると思われる。また近年では、流れをともなう機器の設計において、大局的な収支だけではなく流れ場の詳細についての情報が要求されるようになっており、その意味で、本稿で行ったような密度逆転対流に対する適切な再現手法の探究は、実質的な意味を持つものと考えられる。

また、本稿で用いた数値的技法の検討過程で、計算精度を変える事で不安定な解が生成される事が見出された。この不安定性が生じる機構の解析に基づいて、計算精度の操作による外乱を受けた状態の再現に利用するなど、積極的な活用の可能性もあり、これについても検討の余地があるといえる。

## 6. 結言

有限体積法と SIMPLE 法を組み合わせた数値スキームによる計算コードを用いた、penetrative convection 型の水の密度逆転対流に対する 3次元数値シミュレーションに対する検討を行い、以下の結果を得た

- 1) SIMPLE 法を用いて妥当な解を得るためには、連立一次方程式、とりわけ圧力補正量に対するそれを正確に特必要があることが判明した。また反復解法の掃引方向の組み合わせによって、数値誤差による非対称な解の出現を抑制できることも示した。
- 2) 天井温度  $T_h$  を変化させて計算を行った結果、 $T_h$  が大きくなるほど実験と数値シミュレーション結果の差異が大きくなる傾向が見られた。
- 3) ある  $T_h$  の条件下では、初期状態に依存して解が変化する履歴現象の出現が見られた。

## 謝辞

第3章で用いたガウスの消去法の Fortran コードは岡山理科大学工学部 平野 博之先生が、文献<sup>14)</sup>付属の CD-ROM において公刊されたものをそのまま用いた。ここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- 1) 国立天文台編, 理科年表 平成 21 年机上版, 2008, 丸善
- 2) T. Nishimura and K. Kunitsugu "Nonlinear behavior of natural convection of water with density inversion" *Current Res. Adv. in Physics of Fluids*, 1,

p.21-40, 2002

- 3) T. J. Simons, Canadian bulletin of fisheries and aquatic sciences: Circulation models of lakes and inland seas, 1980, Ottawa: Dept. of Fisheries and Oceans
- 4) D. Lin and N. W. Nansteel, Natural convection heat transfer in a vertical annulus containing water near the density maximum, *J. Heat Transfer*, 109, 4, p.899-905, 1987
- 5) D. R. Moore and N. O. Weiss, Nonlinear penetrative convection, *J. Fluid Mech.*, 61, 3, 553-581, 1973
- 6) N. W. Nansteel, K. Medjani, and D. S. Lin, Natural convection of water near its density maximum in a rectangular enclosure: Low Rayleigh number calculations, *Phys. Fluids*, 30, 2, p.312-317, 1987
- 7) T. Nishimura, A. Wake and E. Fukumori, Natural convection of water near the density extremum for a wide range of Rayleigh numbers, *Num. Heat Transfer A*, 27, p.433-499, 1995
- 8) T. Nishimura, Y. Hayashida, M. Mineoka and A. Wake, Oscillatory natural convection of water near the density extremum at high Rayleigh numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40, 14, p.3449-3465, 1997
- 9) 西村龍夫・国次公司・木下実, 3次元容器内に満たされた水の密度逆転を伴う自然対流解析, 第38回日本伝熱シンポジウム講演論文集, D153, 2001
- 10) 水島二郎・藤村 薫, 流体力学シリーズ5 流れの安定性, 2003, 朝倉書店
- 11) 西川兼康・藤田恭伸, 機械工学基礎講座 伝熱学, 1982, 理工学社
- 12) 荒川忠一, 数値流体力学, 1994, 東京大学出版会
- 13) O.C.ジェンケヴィッチ・K.モーガン, 有限要素と近似, 1984, ワイリー・ジャパン
- 14) 平野博之, 流れの数値計算と可視化 第2版 - Tecplot で見る流体力学, 2004, 丸善
- 15) T. Nishimura, M. Fujiwara, N. Horie and H. Miyashira, "Temperature visualizations by use of liquid crystals of unsteady natural convection during supercooling and freezing of water in an enclosure with lateral cooling", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34, 10, p. 2663-2668, 1991
- 16) 大石進一, 現代非線形科学シリーズ6, 精度保証付き数値計算, 2000, コロナ社

(平成21年 12月28日 受理)