

空間を考察する力を育むための投影図の指導の工夫

大田 誠*

A Study on Teaching Projected Figures in Math Education
to Develop the Ability of Special Investigation

OOTA Makoto*

(Received August 5, 2010)

キーワード：空間を考察する力、模型づくり、投影図、正八面体

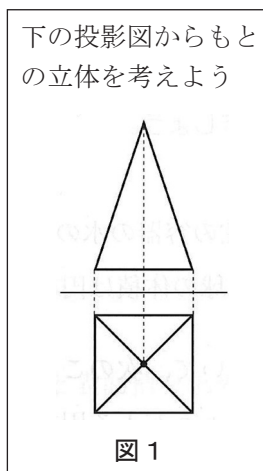
はじめに

新学習指導要領の移行期に入り、空間図形の内容として、立体の投影図を取り扱うことになった(2内容[第一学年]B図形(2)イ 3内容の取扱い(5)参照)。全国学力・学習状況調査等による生徒の実態、そして、何より教育現場からの切なる声空間図形の内容の充実につながったといえる。

教科書では、図1のような問いを扱い、生徒に投影図(投影の方向、立面図・平面図)を理解させ、投影図に該当しそうな立体を想像させている。しかしながら、果たしてこの問いだけで、本当に生徒は投影図を理解することができるのだろうか。

これまでに生徒が学習してきた立体の数は少なく、大きく分けると柱体と錐体と呼ばれる立体を中心に学習してきた。図1のような問いに挑むとき、生徒は授業で出会った数少ない立体の中から、視覚的に該当しそうな立体を選んでいるに過ぎない。確かに、視覚的な特徴からだけでも、立体を想像することも、この問いに答えることもできる。しかしそれでは、投影図の特徴を理解できないばかりか、生徒が身につけなければならない空間を考察する力を育むことはできない。

そこで、立体の投影図の指導をとおして、空間を考察する力をつけさせたいと考え、本実践を始めた。



1. 研究の内容と方法

この研究の目的は、空間を考察する力を育むという観点から、新学習指導要領の内容にある投影図の指導についての指導上の問題点を明らかにし、効果的な指導の工夫を明らか

*山口大学教育学部附属山口中学校

にすることである。そのために、次の2章で、投影図の指導に使った教材と授業の実際について(1)～(4)の手順でまとめ、3章で授業からわかったことを考察する。

- (1) 学習指導要領の変更点から、投影図の指導において生徒に身につけさせたい力を明確にする。・・・〔2-1〕
- (2) 空間を考察する力を育てるために選んだ教材選択の理由と特徴を明らかにし、投影図の指導の工夫にせまる。・・・〔2-2〕
- (3) 選択した教材の単元上の位置づけを明らかにする(単元計画の作成)。・・・〔2-3〕
- (4) (2)で選択した教材を使った授業を行い、生徒の作業の様子と教師の発問を整理する。・・・〔2-4, 2-5〕
- (5) 授業の実際から明らかになった、指導上の問題点をまとめる。・・・〔3〕

ビデオカメラ2台を使って授業の様子と生徒の発言や作業を記録し、書き起こしたものを考察する。

2. 投影図の指導に使った教材と授業の実際

この章では、まず、学習指導要領上における投影図の指導の位置づけを明らかにし、それから、「投影図の指導の工夫」における教材選択、そして、単元計画の作成を行い、最後に授業の実際をまとめる。

2-1 学習指導要領(H10)から新学習指導要領(H23)への変更点

下の表は、学習指導要領(H10)と新学習指導要領(H23)にある各学年の目標及び内容の第一学年 2 内容B図形(2)を取り出したものである¹⁾。変更点については、ゴシック体と下線で強調している。

学習指導要領(H10)	新学習指導要領(H23)
<p><u>図形を観察、操作や実験を通して考察し、空間図形についての理解を深める。また、図形の計量についての能力を伸ばす。</u></p> <p>ア 空間における直線や平面の位置関係を知ること。</p> <p>イ 空間図形を直線や平面図形の運動によって構成<u>されている</u>ものととらえたり空間図形を平面上に<u>表現したり</u>することができること。</p> <p>ウ 扇形の弧の長さや面積<u>及び</u>基本的な柱体、錐体の表面積と<u>体積を</u>求めることができること。</p>	<p>観察、操作や実験<u>などの活動</u>を通して、空間図形についての理解を深める<u>とともに、</u>図形の計量についての能力を伸ばす。</p> <p>ア 空間における直線や平面の位置関係を知ること。</p> <p>イ 空間図形を直線や平面図形の運動によって構成<u>される</u>ものととらえたり、空間を平面上に<u>表現して平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったり</u>すること。</p> <p>ウ 扇形の弧の長さや面積<u>並びに</u>基本的な柱体、錐体<u>及び球</u>の表面積と<u>体積を</u>求めること。</p>

上の表の新学習指導要領(H23)で、投影図の指導に関係していることは、「観察、操作や実験などの活動を通して、空間図形についての理解を深める」と「空間における直線

や平面の位置関係を知ること」と「空間を平面上に表現して平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりすること」が該当する。「観察、操作や実験などの活動をとおして」とあるので、この研究では模型づくりをとおして、立体の点・辺・面の位置や、面の形、点や辺の重なりを考察させる。そのことが、「空間における直線や平面の位置関係を知ること」になり、「平面上の表現から空間図形の性質を読み取る」ことにつながると考えたからである。

2-2 空間を考察する力を育むための投影図の教材選択とその教材の特徴

教科書で扱っている図1の問いでは、前時までの学習で出会った数少ない立体の中から、視覚的に該当しそうな立体を選んでいくに過ぎない。かといって、生徒が今まで目にしたこともないような特殊な立体では、一部の生徒のみしか力をつけることができない可能性があり、トピック的な扱いになりかねない。したがって、教材選択の視点は、

- ①(特殊な立体ではなく)教科書にのっている立体を使う。
- ②生徒が思わず考えたいような切り口がある立体を使う。

この2点を大切に、投影図の指導の工夫を考える。

教材は、教科書にのっている立体の中から、正八面体を選択した。正八面体は、(教科書では)正多面体の例で扱われる以外には、あまり登場する機会がなく、生徒にとっては知識として知っている程度にすぎない。むしろ、あまりなじみのない立体の方が、生徒が点・辺・面の情報から立体を想像しようとする意欲を引き出すことができると考えたからである。

正八面体の代表的な投影図として、図2と図3があげられる。しかし、これだけでは、前述のように、視覚的に該当しそうな立体を選ぶにすぎない。そこで、平面図・立面図に側面図を加えた、3方向の投影図から模型づくりをさせることにした(図4)。しかも、生徒が多様に考えることができるような課題を設定した。

下の投影図からものと立体を考えよう

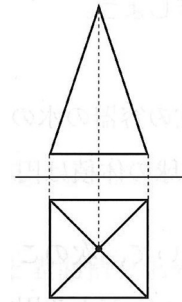


図1

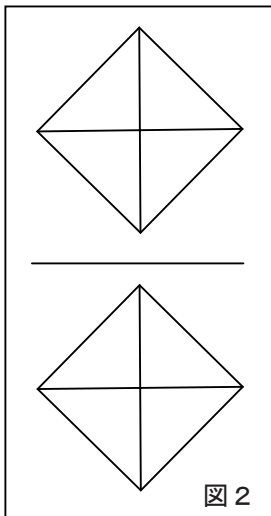


図2

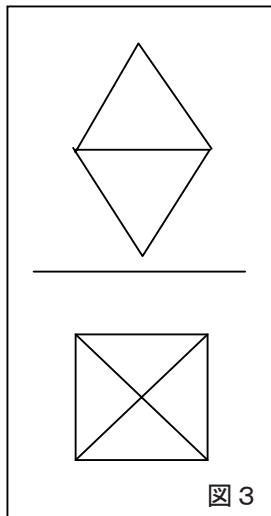


図3

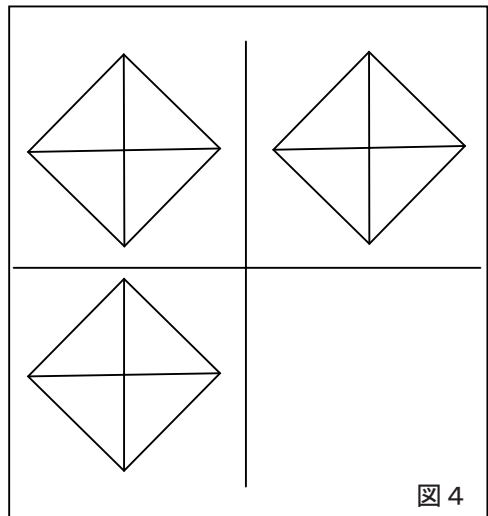


図4

課題は、右のように設定した(図5)。この課題では、投影図の形についての情報を与えているが、図の向きについての情報を与えていない点の特徴であり、このことが生徒が多様に考えることができる部分でもある。

箱の中に、ある立体があります。この立体の3方向からの投影図は、すべて「正方形に対角線を加えた図」です。この立体の模型をつくりなさい。

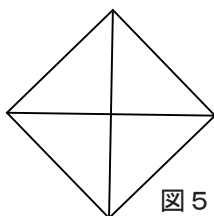

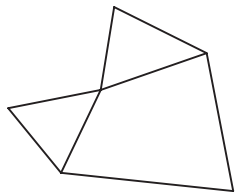


図 5

2-3 投影図の指導の単元での位置づけ

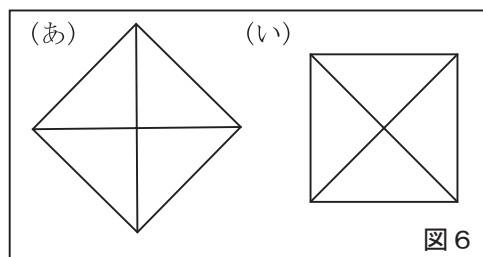
この単元では、模型づくりや具体物の操作による活動を中心にした。それは、大人でも空間を理解することは難しく、ましてや平面図形ほど根拠をもたない生徒にとっては、空間を論理的に説明することは難しいと考えたからである。模型や具体物を与えることで、模型づくりに対する生徒の抵抗感を減らすことにつながり、さらには、空間を考察する力を育むことができると考えた。単元「空間図形」の中での投影図の位置づけを以下の表のようにした。

節 (時)	学 習 内 容 お よ び 学 習 活 動	
立方体の点・辺・面 (4)	<ul style="list-style-type: none"> ・課題「立方体の展開図Ⅰ」に取り組み、11種類の展開図をみつける。 ・課題「立方体の展開図Ⅱ」に取り組み、点・線・面の位置関係を意識する。 ・課題「立方体を3つの合同な四角錐に分解しよう」に取り組み、3つの合同な四角錐の模型をつくる(2時間)。 	<p style="text-align: center;">課題「立方体の展開図Ⅱ」</p> <p>下のような面A～Fをもつ立方体があります。まこと君はこの立方体の展開図をかきました。アルファベットの向きを考えて次の展開図を完成させよう。</p> 
立体と調べ方 (4)	<ul style="list-style-type: none"> ・多面体の模型をつくり、面の形や数、辺の数に目を向ける。 ・課題「立体のグループ分け」に取り組み、グループ分けの視点を得る。 ・角柱・円柱の模型をつくり、面の特徴をつかみ、展開図にまとめる。 ・角錐・円錐の模型をつくり、面の特徴をつかみ、展開図にまとめる。 	<p style="text-align: center;">課題「立体のグループ分け」</p> <p>右のア～カの立体をいくつかのグループに分けよう。</p> 

<p style="writing-mode: vertical-rl; text-orientation: upright;">立体の投影 (3)</p>	<p>・シルエットクイズに取り組み、立面図、平面図をかく。</p> <p>・課題「投影図から模型をつくろう」に取り組み、側面図をかく。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center;">課題「投影図から模型をつくろう」</p> <p>右の投影図で示される立体をいろいろ考え、その模型をつくりなさい。</p>  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>・課題「正八面体の投影図」に取り組み、同じ投影図をもつ模型をつくり、投影図上の点・辺・面について考察する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>箱の中に、ある立体があります。この立体の3方向からの投影図は、すべて「正方形に対角線を加えた図」です。この立体の模型をつくりなさい。</p> </div> </div>
<p style="writing-mode: vertical-rl; text-orientation: upright;">位置関係 (2) 点・辺・面の</p>	<p>・空間にある点・直線・平面それぞれの位置関係をつかむ。</p> <p>・立体の辺・面それぞれの位置関係を説明する。</p> <p>・空間における垂直関係・平行関係を理解する。</p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; text-orientation: upright;">空間図形の応用 (5)</p>	<p>・課題「アリの最短コース」に取り組み、展開図で最短コースを説明する。</p> <p>・課題「四角錐の展開図」に取り組み、展開図に残る図形の特性に気づく。</p> <p>・課題「立方体の切断」に取り組み、切断面を説明する。</p> <p>・多面体の模型づくり（デルタ多面体・準正多面体）を行い、オイラーの多面体定理を導く。</p> <p>・課題「立方体を6つの合同な四角錐に分解しよう」に取り組み、模型をつくる。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center;">課題「四角錐の投影図」</p> <p>右はある四角錐の展開図です。この四角錐の展開図を完成しなさい。</p>  </div>

2-4 授業の実際（前半（模型づくり））

授業では、図6の投影図を見せ、「箱の中にいくつかの立体を作ってきました。この立体の平面図・立面図・側面図は、このようになっています。では、立体の模型を作ってください。」と発問した。すると、生徒は、「あの対角線は何?」「正方形の形があやしい」とい



ながら、意欲的に考え始めた。3方向の投影図がすべて合同な図形であるという点がさらに生徒の意欲をかきたてたようであった。投影図が図6の(あ)の向きなのか、(い)の向き

なのかについての指示はしていなかったもので、生徒はいろいろな立体を想像していた様子であった。あくまで模型をつくることが目的なので、つくる際、立体の面は展開図からつくらなくてもよいことと班の中で話し合いながらつくることを指示した。以下、各班の作業の様子の中で特徴的なものを取り上げる。

2-4-1 投影図の実線から立体の面について想像する生徒

右は、作業開始直後のある班の生徒の会話である。生徒は実線と破線の違いについて、前時までに学習している。投影図の正方形の対角線に目を向け、対角線が実線であることから、教科書で扱うへこみのない多面体のような立体か、または、へこみのある立体を想像している。へこんだ立体には実線があらわれることを話題にしている班は他にもあった。

S1「この図で見たら、へこんだ立体か、でっばった立体ってことよね」
 S2「それしかないよ」
 S1「へこんでたら実線だっけ？」
 S2「実線だよ」

2-4-2 へこんだ立体を実際につくってみた生徒

生徒は、まず立方体をつくり、適当に直角二等辺三角形をつくり、立方体の面をへこませた立体を考えた。この生徒は、投影図を図7のように考えている。生徒は、実際に立方体の面をへこませた立体をつくった(図8, 図9)。しかし、困惑した表情だったので、何を考えるのか聞いてみた。すると、「立方体をへこませたらできると思って作ってみました。でも、つくってみると、この立体では、破線がでてしまいます。」と言った。同じようなことが他の班でも起こっていた。1辺5cmの立方体を各面2cmずつへこませようとしたが、破線がでるため、破線がでない工夫を考えたようだ。すると、骨組みだけのようになってしまうということであった。投影図の様子をみて、直角二等辺三角形を切り出す生徒は予想以上に多かった。投影図自体が直角二等辺三角形が4つあるように見えることが原因だろう。そして、直角二等辺三角形では、平面になってしまうことから面を二等辺三角形に変えていったという生徒も意外に多かった。

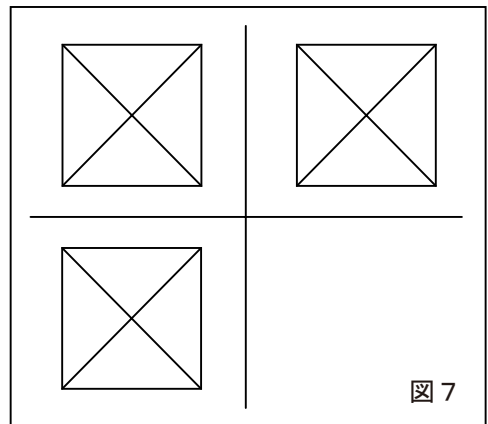


図7

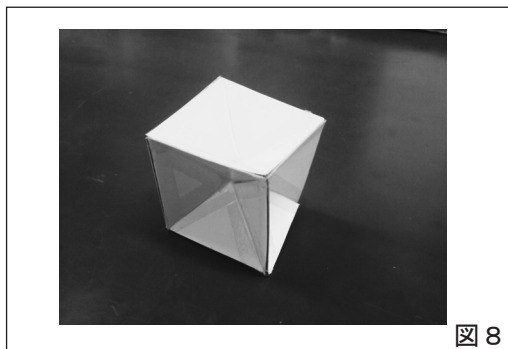


図8

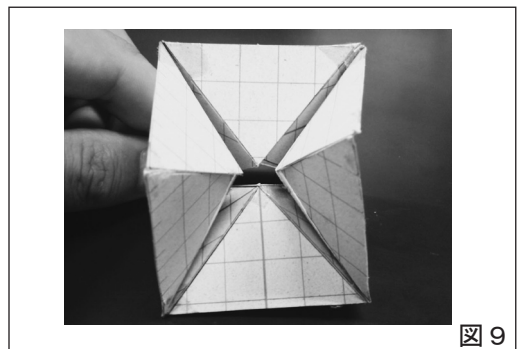
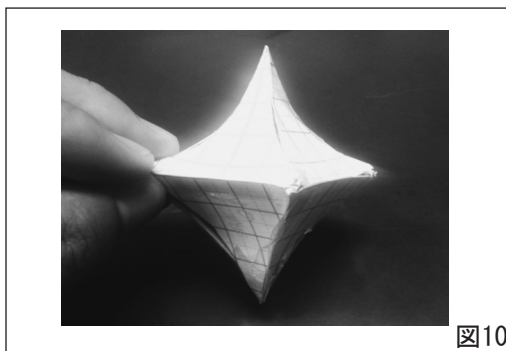


図9

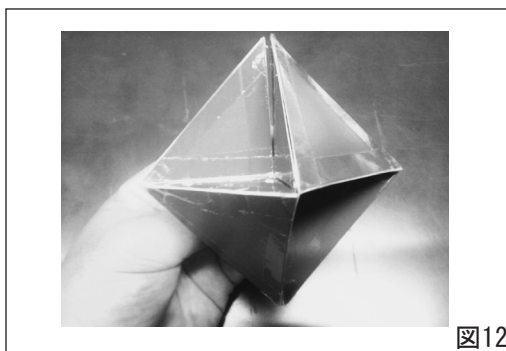
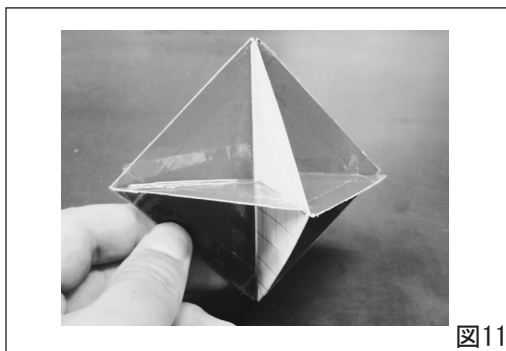
2-4-3 正八面体の各面を曲面に変えようとした生徒

前時の授業で、投影図から立体模型をつくったときに、曲面をもつ立体模型にこだわる生徒がいた。今回の投影図では、まず最初に投影図から正八面体をつくり、それから、正八面体の各面を曲げることを考えた。つまり、立体の点と辺が投影図上に現れていると考へ、面の曲がり具合には自由度があるはずだと考えたのである。正八面体を変形すれば、他にもたくさんの模型がつかれると考えたようだが、実際には各辺が曲がってしまい、できなかった(図10)。しかしながら、前時の授業と関わらせたことと、点と辺に目を向けたことを大いに評価した。



2-4-4 まず骨組みからつくった生徒

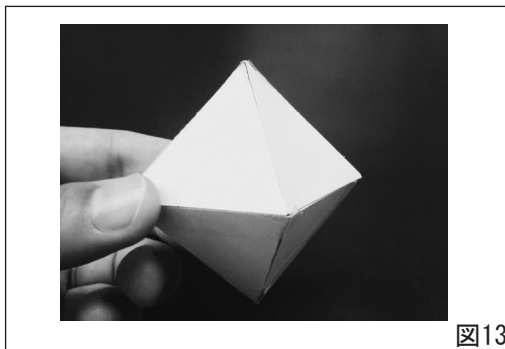
正方形の面を組み合わせせて、図11のような骨組み模型をつくった。ある生徒は、「先生、1面潰してもいいですか。潰したら、他の模型もつくれます。」と言った。投影図の対角線が突き出していると考え、投影図はすべて合同な正方形であることから、正方形の面を使った骨組みを考えたのである。この生徒は、骨組みの模型をもとにして考えれば、他にもいくつかの立体模型がつかれることを指摘している。ただし、立体の定義等については生徒は知らない。よって、あまり立体の定義にはこだわらずに、模型づくりであるということから、このような模型でもよいと許可している。



2-4-5 正八面体の模型をつくった生徒

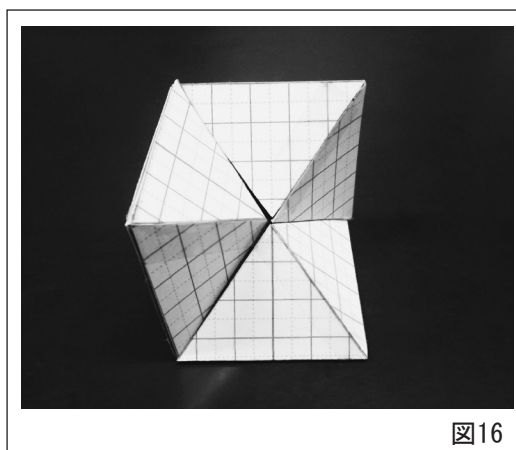
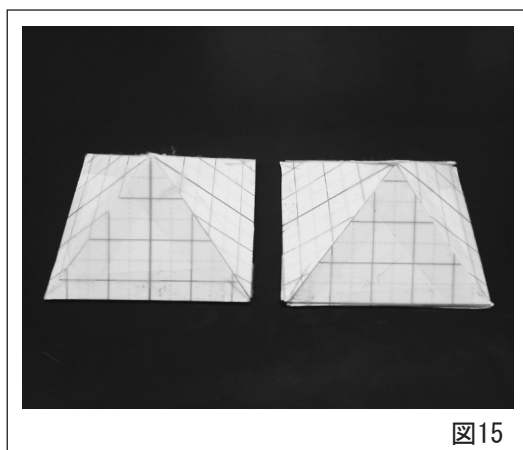
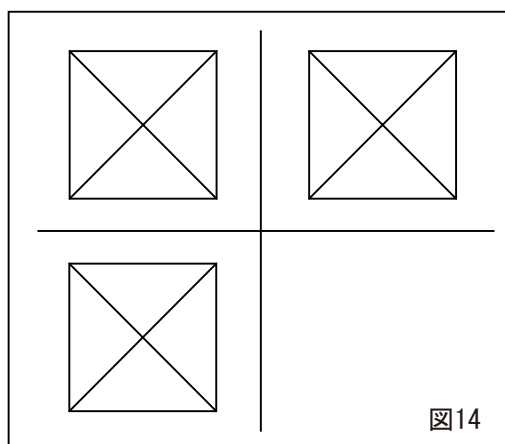
正八面体(図13)の模型をつくった生徒には、次のタイプがいた。投影図から「自分が知っている立体から正八面体を選択した」生徒。「2-4-4の骨組みからつくった」生徒。「投影図の三角形をつくっているうちに、正三角形の面であることを見いだした」生徒である。

ただし、この授業では、「正三角形の面になるか」という点については議論していない。



2-4-6 へこませた立体から立体模型を考えた生徒

まず、この生徒は正八面体の立体模型をすぐにつくっていた。しかし、正八面体にはあまり興味を示さず、「投影図が右であるならば、どんな立体か」ということを考えていた。立方体をベースにして考えていたが、単純にへこませただけでは破線がでてしまう。そこで考えたのが、立方体を合同な6等分の四角柱(図15)にわけて、その内四角錐を3つ取り出したときにできる立体(図16)である。立方体の内側の四角錐の辺の長さは、この単元の頭に、立方体から3つの合同な三角柱を作り出す授業で、立方体の対角線をつくりだす場面があった。このことを利用したことで自由につくることができたようだ。



2-5 授業の実際（後半）

模型づくりを行った後、できた立体模型を紹介させた。紹介された立体模型のうち、正八面体を取り上げ、プリントに投影図をかくように指示した。

このとき、正方形の向きについて困惑している生徒やさらには、正方形の向きについて気にもしていない生徒がいた。正八面体をどの位置において、どの向きから見たらよいか理解できていないのである。正八面体のおき方によっては、上から見たら、図17や18のようになるが、横から見たら、その立面図や側面図には図17は表れず、図18が表れたからである。

そこで、まず正八面体をどの向きから見たときに、課題の投影図になるのかを確認させた。さらに、点の位置関係を確かめるために、図19(立面図・平面図)を見せながら、「立面図の点㊸と点㊹は、平面図ではどこですか？」と発問した。すると、点㊸については図20のように考えたが、点㊹については、㊸、㊹、㊺のように意見がわかれた。㊹については、単純に考えてしまったようで、模型を見ながら考えるとすぐにイの考えはなくなった。問題は、㊸と㊺である。最初は、㊺が圧倒的に多かったのだが、ある生徒の「点㊹の位置は、立面図の情報だけではわからない」という意見と「点㊹は奥側の重なっている点かもしれない」という意見で、㊸と㊹の両方の可能性があるということになった。また、側面図の情報があれば決まるのではないかという意見もでた。

次の時間に前時の続きということで、図21の投影図を出し、今度は平面図上の点㊸、㊹、㊺を立面図に書き加えさせた。この時には、点㊹、㊺は図22のように重なるはずだと納得している。このような活動をとおして、投影面に対して垂直な投影の光線と平行な関係にある線分は点となることがわかってくるのである。

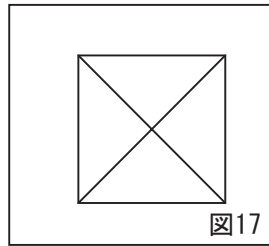


図17

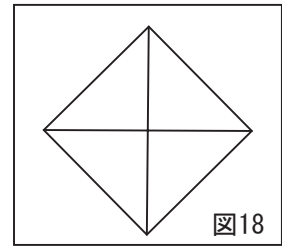


図18

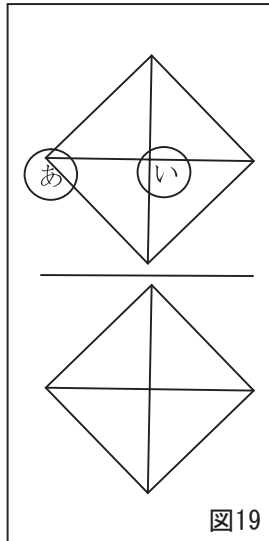


図19

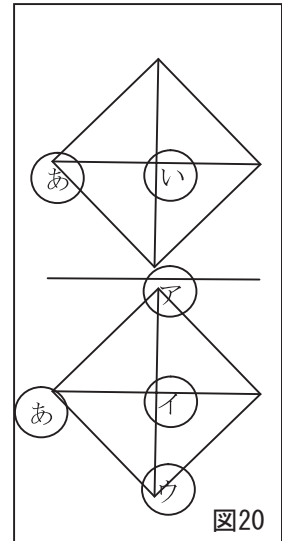


図20

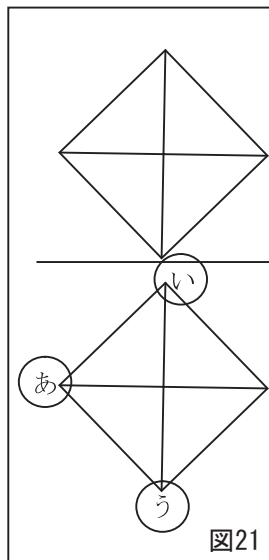


図21

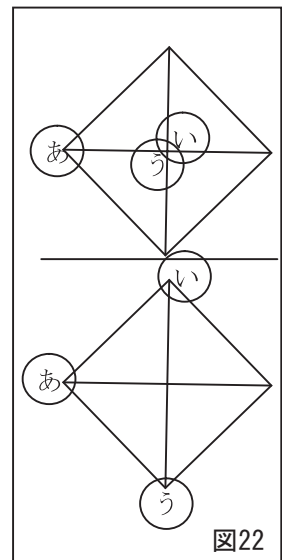


図22

3 授業の考察

実際に、投影図から立体模型づくりをさせてみて、いくつか指導上の問題点が見えてきた。生徒の活動にある問題点と、授業の中の発問について考察する。

3-1 模型づくりには、生徒の作業に大きな時間差がうまれる。

授業は50分しかないのだから、生徒の作業に時間差がうまると、作っている生徒を待つ生徒が出てくる可能性がある。特に答えが1つに決まってしまう立体だと時間差があり、授業により雰囲気もうまれない。作業時間に差がでることをうまく利用することを考えなければならない。そこで、作らせる立体模型の対象は、生徒の見方次第でいろいろな立体が出てくる方がよいと思われる。

3-2 仲間に説明する際、本人以外は投影方向から見るができない。

右の写真(図23)をみるとわかるように、説明している生徒は投影面に対して垂直な方向から説明しているが、その考えを聞く周りの生徒は投影方向がわからないばかりか、投影面もうまくみえていない。このことが生徒が理解するのをさまたげている。さらに、生徒は立体模型をクルクルと回して説明するため、基準となる面がないまま説明することもある。したがって、全員で1つの投影図や立体を考察するよりも、一人一つの立体模型を使って、少人数で議論する方が、説明する活動がうまくいくと考えられる。今回の授業でいえば、模型づくりの後は、ポリドロンなどの教具を利用することを考えた方がよかったように思う。



図23

3-3 投影図の特徴に迫らせるような発問を一時間で扱うことは難しい。

授業の後半に、投影図上の点の位置関係を考察させる場面がある。点や辺の重なり、投影方向と線分について考えさせるための発問をしたのであるが、それ以外にも投影図の特徴に迫る発問はあるので、この授業で考えさせたい話題を整理しておく。

① (投影図から正八面体を作った段階で) なぜ正三角形の面だといえるのか。

この発問をすることで、投影図の特徴である、立体の実際の長さがどんなときにあらわれるのかを考えることができる。この授業では、投影図の辺の長さ、立体模型の立体の長さについて議論していない(議論する時間もなかった)。大きな検討事項である。また、投影図

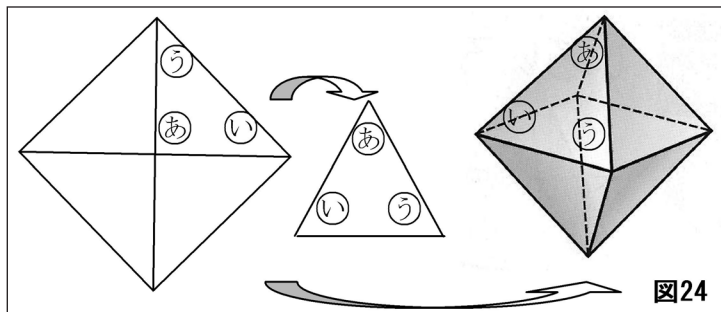
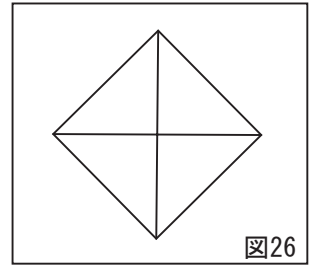
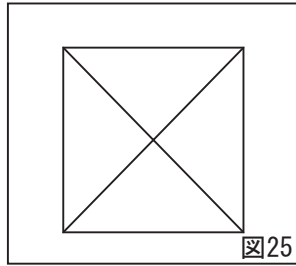


図24

では対角線が垂直に交わっており、図24でいえば、角 θ は 90° になっているが、実際は 60° である。このことは、面が正三角形になることを議論した後に、必ず話しておきたいことである。同じ立体であっても3次元での表現と2次元での表現は異なるということを理解させたい。

② 平面図が図(図25, 図26)のようになっているときの立面図と側面図をかきなさい。

授業の実際からわかることであるが、生徒は立体をどの位置において、どの方向に投影しているのかという意識が薄いことがわかる。一つ



の立体であっても、立体の置き方や投影の方向によって、あらわれる投影図が異なることも投影図の特徴の一つである。このことは、投影図をただの形の議論に終わらせるのではなく、点の対応を考えることにつながる。

3-4 2時間続きの授業の方が望ましい。

この時間に限ったことではないが、模型づくりをする際、単元の中で可能な限り2時間続きの授業にした方がよいことがわかった。50分では作業のみに時間を割かれてしまい、全員で共有する場面を作り、その授業のねらいにせまりにくくなる。次の時間に続きをやることになるが、次の時間まで時間があきすぎたり、思考がとぎれたり、作業の効果が充分に出てこないように思う。2時間続きで模型づくりをした方が、作業にじっくり取り組むことができ、考えたい話題に時間をかけることができる。

以上、授業の実際から浮かび上がってきた問題点についてまとめた。

おわりに

模型づくりの初期は、最初はなかなかはさみやカッターが動かないことが多い。一度切ってしまうと、やり直しがきかないという気持ちが最初の切り口を入れるのを躊躇させるようだ。模型づくりに慣れてくると、「失敗するかもしれないけど、まず作ってみよう」という生徒が出てくる。それまではじっくり見守り、「工作用紙を切って、失敗することは無駄なことではない」ということを生徒に伝えたい。学習する際、失敗は大前提であるはずだし、そして、この失敗した工作用紙が新しい知識の理解をうみ、さらには、空間に対する認識の変容、広がりをもたらすからである。

つい先日、ある生徒が「2年生の教科書を見たら、空間図形がありませんでした。ということは、今年は模型づくりはないのですか?」と聞いてきた。詳しく聞くと、「図形の学習のところで、もう一回やりたい」と言う。生徒は、どこでもできることではなく、授業ならでは、数学の授業ならではの学習活動に期待しているのだ。生徒がやりたいと意欲的になっていることを中心にして学習活動を展開したいものである。

参考文献

東京書籍：新編 新しい数学 2，東京書籍，2005.

文部科学省：中学校学習指導要領解説 数学編，教育出版，2008.

島田 茂：教師のための問題集，共立出版，1990.

引用文献

- 1) 東京書籍：東書教育シリーズ 中学校数学科学習指導要領 新旧対照表，東京書籍