The 27th Symposium on Information Theory
and Its Applications (SITA2004)
Gero, Gifu, Japan, Dec. 14–17, 2004

Tsallis relative operator entropy の性質について
On the properties of Tsallis relative operator entropy

柳 研二郎* 古市 茂† 栗山 憲‡
Kenjiro Yanagi Shigeru Furuichi Ken Kuriyama

Abstract— Tsallis relative operator entropy is defined as a parametric extension of the relative operator entropy. Some properties of the Tsallis relative operator entropy are investigated. Also some operator inequalities related to the Tsallis relative operator entropy are shown.

Keywords— Tsallis relative entropy, relative operator entropy, operator inequality

1 はじめに

[4] において relative operator entropy が次のように定義された. invertible positive operators A, B に対して

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}.$$

$B = I$ のとき $S(A|I) = -A \log A$ は [10] によって導入された operator entropy である. この論文では relative operator entropy のある parametric extension である Tsallis relative operator entropy を定義しその性質について調べる.

Definition 1 *Hilbert space* $\mathcal{H}$ 上の任意の *invertible positive operators* A, B と任意の *real number* $\lambda \in (0,1]$ に対して *Tsallis relative operator entropy* は次の様に定義される.

$$\begin{aligned} & T_\lambda(A|B) \\ = & \frac{A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}} - A}{\lambda} \\ = & A^{\frac{1}{2}} \ln_\lambda(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ただし $\ln_\lambda(x) = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}$ とおく.

statistical physics のおいては C.Tsallis [12] は multifractal system を研究するために Shannon entropy を拡張したものを導入した. それは Tsallis entropy と呼ばれ次のように定義される.

Definition 2 *random variable* X の *probability distribution* $p(x) = P(X = x)$ に対して

$$S_q(X) = \frac{1 - \sum_x p(x)^q}{q-1},$$

ただし $q \geq 0$ とする.

Tsallis entropy の主な性質は次のものである.

(1):concavity 任意の $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ と任意の X, Y に対して

$$S_q(\alpha X + \beta Y) \geq \alpha S_q(X) + \beta S_q(Y).$$

(2):nonadditivity 任意の X, Y に対して

$$S_q(X \times Y) = S_q(X) + S_q(Y) - (1-q) S_q(X) S_q(Y).$$

(3) $\lim_{q \to 1} S_q(X) = -\sum_x p(x) \log p(x).$

これに関連して Tsallis relative entropy が定義されその性質についても調べられた. この論文では trace をとる前の operator の形のものを定義する.

2 Tsallis relative operator entropy

Tsallis relative operator entropy は次の性質をもつ.

Proposition 1 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $\lim_{\lambda \to 0} T_\lambda(A|B) = S(A|B).$

(2):homogeneity 任意の $\alpha \geq 0$ に対して

$$T_\lambda(\alpha A|\alpha B) = \alpha T_\lambda(A|B).$$

(3):monotonicity $B \leq C$ ならば

$$T_\lambda(A|B) \leq T_\lambda(A|C).$$

Proof. (1) は trivial. (2), (3) を示す. A, B についての α-power mean と呼ばれる operator を導入する.

$$A \natural_\lambda B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}}.$$

これを用いると

$$T_\lambda(A|B) = \frac{A \natural_\lambda B - A}{\lambda}.$$

operator mean の monotonicity より $A \leq B$ かつ $C \leq D$ ならば $A \natural_\lambda C \leq B \natural_\lambda D$. したがって $B \leq C$ ならば $T_\lambda(A|B) \leq T_\lambda(A|C)$. q.e.d.

*〒 755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学工学部共通講座 Dept. of Applied Science, Faculty of Engineering, Yamaguchi University, 2-16-1 Tokiwadai, Ube-shi 755-8611 Japan. E-mail: yanagi@yamaguchi-u.ac.jp

†〒 756-0884 小野田市大学通 1-1-1 山口東京理科大学基礎工学部電子・情報工学科 Dept. of Electronics and Computer Science, Faculty of Science and Engineering, Tokyo University of Science, 1-1-1 Daigaku-Dori, Onoda-shi 756-0884 Japan. E-mail: furuichi@ed.yama.sut.ac.jp

‡〒 755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学工学部共通講座 Dept. of Applied Science, Faculty of Engineering, Yamaguchi University, 2-16-1 Tokiwadai, Ube-shi 755-8611 Japan. E-mail: kuriyama@yamaguchi-u.ac.jp

Proposition 2 次の (1), (2) が成り立つ.

(1):superadditivity 任意の A_1, A_2, B_1, B_2 に対して

$$T_\lambda(A_1 + A_2|B_1 + B_2) \geq T_\lambda(A_1|B_1) + T_\lambda(A_2|B_2).$$

(2):joint concavity 任意の A_1, A_2, B_1, B_2 と任意の $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ に対して

$$\begin{aligned} & T_\lambda(\alpha A_1 + \beta A_2|\alpha B_1 + \beta B_2) \\ \geq \; & \alpha T_\lambda(A_1|B_1) + \beta T_\lambda(A_2|B_2). \end{aligned}$$

Proof. (1) すべての mean m に対して

$$(A + B)m(C + D) \geq AmC + BmD.$$

したがって次を得る.

$$\begin{aligned} & T_\lambda(A_1 + A_2|B_1 + B_2) \\ = \; & \frac{1}{\lambda}\{(A_1 + A_2)\natural_\lambda(B_1 + B_2) - (A_1 + A_2)\} \\ \geq \; & \frac{1}{\lambda}(A\natural_\lambda B_1 - A_1 + A_2\natural_\lambda B_2 - A_2) \\ = \; & T_\lambda(A_1|B_1) + T_\lambda(A_2|B_2). \end{aligned}$$

(2) については superadditivity と homogeneity から得られる. q.e.d.

Theorem 1 $\mathcal{H}$ 上の *bounded linear operators* の全体からそれ自身への *unital positive linear map* Φ に対して次が成り立つ.

$$\Phi(T_\lambda(A|B)) \leq T_\lambda(\Phi(A)|\Phi(B)).$$

Proof. $X = A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}, \ln_\lambda t = -t^\lambda \ln_\lambda t^{-1}$ とおくと Tsallis relative operator entropy は次のように計算される.

$$\begin{aligned} & T_\lambda(A|B) \\ = \; & A^{\frac{1}{2}}(\ln_\lambda A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\ = \; & A^{\frac{1}{2}}\{-(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda \ln_\lambda(A^{\frac{1}{2}}B^{-1}A^{\frac{1}{2}})\}A^{\frac{1}{2}} \\ = \; & A^{\frac{1}{2}}\{-(XX^*)^{-\lambda} \ln_\lambda(XX^*)\}A^{\frac{1}{2}} \\ = \; & A^{\frac{1}{2}}\{-(XX^*)^{-\lambda} \ln_\lambda(XX^*)X\}B^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

一般に $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operators A と interval $[0, ||A||^2]$ 上の continuous function f に対して $Af(A^*A) = f(AA^*)A$ が成り立つので次を得る.

$$\begin{aligned} & T_\lambda(A|B) \\ = \; & A^{\frac{1}{2}}\{-X(X^*X)^{-\lambda} \ln_\lambda(X^*X)\}B^{\frac{1}{2}} \\ = \; & B^{\frac{1}{2}}\{-X^*X(X^*X)^{-\lambda} \ln_\lambda(X^*X)\}B^{\frac{1}{2}} \\ = \; & B^{\frac{1}{2}}\{F(X^*X)\}B^{\frac{1}{2}} \\ = \; & B^{\frac{1}{2}}\{F(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})\}B^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ただし F は $F(t) = -t^{1-\lambda} \ln_\lambda t \; (0 < \lambda \leq 1)$ によって定義される concave function である. したがって Tsallis relative operator entropy は次のように書ける.

$$T_\lambda(A|B) = F(A/B)/B^{-1},$$

ただし $X/Y = Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}}$ である. ゆえに [2] の Theorem 7 の proof と同様にすればよい. q.e.d.

3 Inequalities as bounds for $T_\lambda(A|B)$

Theorem 2 任意の *invertible positive operator* A, B, 任意の $0 < \lambda \leq 1$ に対して次が成り立つ.

$$T_{-\lambda}(A|B) \leq S(A|B) \leq T_\lambda(A|B).$$

Proof. 任意の $x > 0, \lambda > 0$ に対して

$$\frac{x^{-\lambda} - 1}{-\lambda} \leq \log x \leq \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}.$$

したがって

$$\begin{aligned} & \ln_{-\lambda}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \\ \leq \; & \log(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \leq \ln_\lambda(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

両辺に $A^{\frac{1}{2}}$ をかければよい.

q.e.d.

Proposition 3 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $T_\lambda(A|B) \leq H_\lambda(A) + A^{1-\lambda} \ln_\lambda ||B||$.

(2) $\mu A \leq B$ ならば $T_\lambda(A|B) \geq (\ln_\lambda \mu)A$.

証明は省略する.

Tsallis relative operator entropy に対する次のような bounds が成り立つ.

Theorem 3 任意の *invertible positive operators* A, B, 任意の $0 < \lambda \leq 1$ に対して次が成り立つ.

$$A - AB^{-1}A \leq T_\lambda(A|B) \leq -A + B.$$

さらに $T_\lambda(A|B) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $A = B$ である.

Proof. 任意の $x > 0, 0 < \lambda \leq 1$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln_\lambda x \leq x - 1.$$

したがって

$$\begin{aligned} & I - A^{\frac{1}{2}}B^{-1}A^{\frac{1}{2}} \\ \leq \; & \ln_\lambda(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \leq -I + A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

両辺に $A^{\frac{1}{2}}$ をかけると

$$\begin{aligned} & A^{\frac{1}{2}}(I - A^{\frac{1}{2}}B^{-1}A^{\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & A^{\frac{1}{2}} \ln_\lambda(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & A^{\frac{1}{2}}(-I + A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

したがって

$$A - AB^{-1}A \leq T_\lambda(A|B) \leq -A + B.$$

後の必要十分条件は明らか. q.e.d.

λ-power mean $\natural_\lambda$ をもつ Tsallis relative operator entropy に対する bounds をえる.

Theorem 4 任意の *invertible positive operators* A, B, 任意の $\alpha > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & A\natural_\lambda B - \frac{1}{\alpha}A\natural_{\lambda-1}B + (\ln_\lambda \frac{1}{\alpha})A \\ \leq\ & T_\lambda(A|B) \\ \leq\ & \frac{1}{\alpha}B - A - (\ln_\lambda \frac{1}{\alpha})A\natural_\lambda B. \end{aligned}$$

Proof. 任意の $\alpha > 0, x > 0, 0 < \lambda \leq 1$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & x^\lambda(1 - \frac{1}{\alpha x}) + \ln_\lambda \frac{1}{\alpha} \\ \leq\ & \ln_\lambda x \\ \leq\ & \frac{x}{\alpha} - 1 - x^\lambda \ln_\lambda \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} & (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda - \frac{1}{\alpha}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\lambda-1} + (\ln_\lambda \frac{1}{\alpha})I \\ \leq\ & \ln_\lambda(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \\ \leq\ & \frac{1}{\alpha}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) - I - (\ln_\lambda \frac{1}{\alpha})(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda. \end{aligned}$$

両辺に $A^{\frac{1}{2}}$ をかければよい. q.e.d.

Tsallis relative oprtator entropies の和についての bound を得る前に次の operators に関する Jensen's inequality [7] の Proposition 3.1 が必要である.

Lemma 1 f を J 上の *continuous real function* とするとき次は同値である.

(1) f*: operator concave*

(2) $\sum_{j=1}^n C_j^* C_j = I$ なる任意の *operators* C_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ と $\sigma(X_j) \subset J$ なる任意の *self-adjoint operators* X_j に対して

$$f(\sum_{j=1}^n C_j^* X_j C_j) \geq \sum_{j=1}^n C_j^* f(X_j) C_j.$$

Theorem 5 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ を *invertible positive operators* の列とする. ただし $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 \ \geq\ & \sum_{j=1}^n T_\lambda(A_j|B_j) \\ \geq\ & \frac{(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j)^{-\lambda} - I}{\lambda}. \end{aligned}$$

Proof. $\dfrac{t^\lambda - 1}{\lambda} \leq t - 1$ より

$$\begin{aligned} & \frac{A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}} - A}{\lambda} \\ \leq\ & A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} - I)A^{\frac{1}{2}} \\ =\ & B - A. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n T_\lambda(A_j|B_j) \\ =\ & \sum_{j=1}^n \frac{A_j^{\frac{1}{2}}(A_j^{-\frac{1}{2}}B_j A_j^{-\frac{1}{2}})^\lambda A_j^{\frac{1}{2}} - A_j}{\lambda} \\ \leq\ & \sum_{j=1}^n (B_j - A_j) = 0. \end{aligned}$$

次にもう1つの不等式を得るために Lemma 1 において $f(x) = -x^{-\lambda}$, $C_j = A_j^{\frac{1}{2}}$, $X_j = A_j^{\frac{1}{2}} B_j^{-1} A_j^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned} & -(\sum_{j=1}^n A_j^{\frac{1}{2}}(A_j^{\frac{1}{2}}B_j^{-1}A_j^{\frac{1}{2}})A_j^{\frac{1}{2}})^{-\lambda} \\ \geq\ & -\sum_{j=1}^n A_j^{\frac{1}{2}}(A_j^{\frac{1}{2}}B_j^{-1}A_j^{\frac{1}{2}})^{-\lambda}A_j^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

したがって

$$(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j)^{-\lambda} \leq \sum_{j=1}^n A_j^{\frac{1}{2}}(A_j^{-\frac{1}{2}}B_j A_j^{-\frac{1}{2}})^\lambda A_j^{\frac{1}{2}}$$

q.e.d.

Remark 1 *Theorem 5* で $\lambda \to 0$ とすると *Furuta* の結果 *[7]* を得る.

4 Generalized Tsallis relative operator entropy

A, B: strictly positive に対して次のように記号を導入する.

(1) $S_\lambda(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$

(2) $S_0(A|B) = S(A|B)$

(3) $A \natural_0 B = A$

(4) $A \natural_1 B = B$

Definition 3 $\mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$ に対して *generalized Tsallis relative operator entropy* $\tilde{T}_{\mu,k,\lambda}(A|B)$ を次のように定義する.

$$\tilde{T}_{\mu,k,\lambda}(A|B) = \frac{A \natural_{\mu+k\lambda} B - A \natural_{\mu+(k-1)\lambda} B}{\lambda}.$$

このとき

$$\tilde{T}_{0,1,\lambda}(A|B) = T_\lambda(A|B).$$

このとき次の不等式を得る.

Theorem 6 $\lambda > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して次が成り立つ.

(1) $S_{\mu-(k+1)\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,k+1,-\lambda}(A|B) \leq S_{\mu-k\lambda}(A|B)$.

(2) $S_{\mu+k\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,k+1,\lambda}(A|B) \leq S_{\mu+(k-1)\lambda}(A|B)$.

Proof. 任意の $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して次の不等式が成り立つ.

任意の $t > 0$ に対して

$$t^{\mu-(k+1)\lambda} \log t \leq \frac{t^{\mu-(k+1)\lambda} - t^{\mu-k\lambda}}{-\lambda} \leq t^{\mu-k\lambda} \log t,$$

$$t^{\mu+k\lambda} \log t \leq \frac{t^{\mu+(k+1)\lambda} - t^{\mu+k\lambda}}{\lambda} \leq t^{\mu+(k+1)\lambda} \log t.$$

ここで t を $A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$ とおき両辺に $A^{\frac{1}{2}}$ をかければよい. q.e.d.

operators の列に対する次の不等式を得る.

Theorem 7 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ を *invertible positive operators* の列とする. ただし $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすとする. このとき $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n S_{\mu-(k+1)\lambda}(A_j|B_j) \\ \leq\ &\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,k+1,-\lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu-k\lambda}(A_j|B_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n S_{\mu+k\lambda}(A_j|B_j) \\ \leq\ &\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,k+1,\lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu+(k+1)\lambda}(A_j|B_j). \end{aligned}$$

参考文献

[1] S.Abe, Monotone decrease of the quantum nonadditive divergence by projective measurements, Physics Letters A. 312(2003), 336-338.

[2] T.Ando, Topics on operator inequality, Lecture Notes, Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.

[3] N.Bebiano, J.da Providencia Jr. and R.Lemos, Martix inequalities in statistical mechanics, Linear Algebra Appl., 376(2004), 265-273.

[4] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japonicae, 34(1989), 341-348.

[5] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, Fundamental properties for Tsallis relative entropy, to appear in J. Math. Phys.

[6] T.Furuta, Invitation to Linear Operators: From Matrix to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space, CRC Pr I Lc, 2002,

[7] T.Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, Linear Algebra App. 381(2004), 219-235.

[8] F.Hiai and D.Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, Linear Algebra Appl., 181(1993), 153-185.

[9] F.Hiai and H.Kosaki, Means of Hilbert Space Operators, Springer, 2003.

[10] M.Nakamura and H.Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad., 37(1961), 149-154.

[11] A.Renyi, On the foundation of information theory, Rev.Int.Stat.Inst., 33(1965), 1-14.

[12] C.Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, J.Stat.Phys., 52(1988), 479-487.

[13] C.Tsallis et al., Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, edited by S.Abe and Y.Okamoto, Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.

[14] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV, (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep., 14(1962), 59-85.

[15] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, to appear in Linear Algebra Appl.

[16] X.Zhann, Matrix Inequalities, Spribger, 2002.