



中空円筒形岩石供試体を用いたトランジェント法 による浸透率測定における数理的基礎*

栗山 憲¹ 水田 義明² 土井 昭仁³

The Mathematical Principles of Permeability Measurement by Transient Method for Hollow Cylinder Specimen Made of Low-Permeability Rock

by Ken KURIYAMA^a, Yoshiaki MIZUTA^b and Akihito DOI^c

a. Professor, Dr. of Science, Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Tokiwadai, Ube 755-8611, Japan

b. Professor, Dr. of Engineering, Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Tokiwadai, Ube 755-8611, Japan

c. Tohkok Construction Co., 1-13-5, Minami-Kannon, Nishi-ku, Hiroshima 733-0035, Japan

The authors have established strict formulation of mathematical equations for permeability determination by transient pulse method and extended the formulation to the specified cases, i. e., the authors have applied the transient pulse method to the hollow cylinder specimen and extended its application to the case where fluid leakage from the pressure cell is taken into account. In the hollow cylinder specimen, fluid leakage along specimen boundary can be easily prevented.

Intrinsic permeability k was given by the following formula:

$$k = \alpha \kappa \mu \frac{\log(R_0 / R_i)}{2\pi L} \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}$$

where α is the value to be determined from test data, κ is fluid compressibility, μ is fluid viscosity, R_0 , R_i and L are the outer radius, the inner radius and the height of the hollow cylinder specimen, respectively. V_1 and V_2 are capacity of the spaces communicating with the inside and the outside of the hollow cylinder specimen in the pressure cell.

The authors developed a simple apparatus for permeability measurement. Pneumatic permeability tests using the apparatus were carried out and the permeability of a specimen made of limestone was determined. The permeability test takes only a few hours even for a specimen made of low-permeability rock because of low viscosity of air.

KEY WORDS : Mathematical Formulation, Permeability Test, Transient Pulse Method, Hollow Cylinder Specimen, Pneumatic Test

1. はじめに

従来、岩石などの浸透率測定には円柱供試体を用いた測定が広く行われてきた。しかしながら、円柱供試体を用いる浸透率測定においては、浸透流体は供試体の軸方向に流れるので、供試体側面における流体漏れの防止に工夫を要する。一方、中空円筒供試体を用いる浸透率測定においては、流体は供試体の軸と直角方向に流れるので、供試体端面における流体漏れを防げばよく、それには両端面の位置にある圧板をシーリング材を介して押しつけるだけでよい。また、低浸透性の供試体に対して浸透率試験を行う場合、大きな圧力差がなければ試験時間が非常に長くなるという問題がある。

本論文では、これらの問題点を取り除くため、中空円筒供試体を用いた浸透率試験による測定方法確立のための数理的基礎とそ

れに基づく測定システムの有効性について述べる。

本研究において実際に行われた実験は透気試験である。それは、一般には低透水性の岩石供試体に対して、小さな圧力差でも短時間のうちに試験を終えることができ、かつ試験システムを簡便にすることができるからである。しかし、数理的基礎については、透水試験であっても透気試験であっても理論の展開はほとんど同じである。ただし、透水試験においては外力（体積力）として重力を考慮する必要があり、また水の静粘性係数と空気の静粘性係数の値が異なる。

円柱（または角柱）供試体による測定に関しては、Brace et al.(1968)が測定の基礎付けおよびその有効性について示した研究がある。供試体の形状が円柱であっても角柱であっても、算定式を構築する上で関係するのは、流れの方向に垂直な断面積であって、断面形（円または四角）による差異はない。彼等は円柱状の試験片を密閉した円筒状の容器内に設置し、試験片の両側の容器内の流体の初期圧力差に起因するその後の容器内圧力の時間的経緯を測定することにより浸透率を求める手法を提案している。その数理的基礎は供試体内の流体の圧力に関する常微分方程式を導出し解を導くことであるが、常微分方程式の導出に関してその詳細は彼等の論文の中では明らかにされていない。

* 2002年4月25日受付 10月16日受理

1. 理博 山口大学教授 工学部共通講座
2. 普通会员 工博 山口大学教授 工学部社会建設工学科
3. 東興建設(株)

[著者連絡先] FAX 0836-85-9392 (山口大・工)

E-mail: ymizuta@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp

キーワード: 数理的基礎, 透気試験, トランジェント法, 中空円筒供試体, 浸透率測定

Brace et al.(1968)により提案された円柱(角柱)供試体に対するトランジェントパルス法による浸透率の測定法は、その後 Hsieh et al.(1981)により1次元拡散方程式の初期値・境界値問題として基礎付けられ、その解の境界での値の特別な場合が Brace et al.(1968)による常微分方程式の解に対応することが示された。

また、円柱供試体を用いた浸透率の測定には、トランジェントパルス法以外に定水位法、変水位法、フローポンプ法が使用されており、定水位法に関しては Zhang et al.(1998)により、この方法による浸透率測定の理論的裏付けがなされている。また、フローポンプ法に関しては Esaki et al.(1996)により、トランジェントパルス法の場合と同様に1次元拡散方程式の初期値・境界値問題として、この方法による浸透率測定の理論的裏付けがなされている。さらに、浸透率のこれらの測定法に関して、高橋ら(1998)がシミュレーションを含む総合的な研究を行って、それらの正当性を明らかにしている。

本論文では、中空円筒供試体を用いたトランジェントパルス法による浸透率測定システムを、Brace et al.(1968)の着想に従い、常微分方程式の導出により数理的に基礎付けした。方程式の導出においては、流体が供試体内では Darcy 則 $v = -(k/\mu)\nabla P$ をみたとすことおよび $\Delta P = 0$ をみたとすことを用いている。ただし、 k は供試体の浸透率、 μ は流体の静粘性係数、 P は供試体内の流体圧である。

論文の構成は下記のとおりである。2. で、微分方程式の導出の基礎となる任意形状の供試体の境界における気体の圧力に関する基本方程式を導く。3. では、2. の結果と Brace et al.(1968)による仮想的空洞を設けたモデル化により、円柱供試体および中空円筒供試体での気体の圧力に関する微分方程式を導き、その厳密解と理論的な近似解を求める。さらに Brace et al.(1968)と同様な考えにより理論的な近似解を用いた中空円筒供試体による浸透率の測定法を提案し、実例によりその有効性を示す。なお、この浸透率の決定方法は、4. で述べる仮想的空洞部を設定しないモデルの厳密解を用いた場合の決定方法と全く一致する。

4. では、仮想的空洞部を設定しないモデル化により円柱供試体と中空円筒供試体での微分方程式を導出し、その厳密解が 3. で求めた理論的な近似解と完全に一致することを示す。そのことにより仮想的空洞部を設定しないモデルの妥当性を明らかにすると同時に、浸透率を求めるためには、仮想的空洞を設けたモデル化より簡単なモデル化で十分であることを述べる。このことは 5. との関連でも重要である。空気漏れが生じたときに、仮想的空洞部を設けたモデル化に基づく定式化(微分方程式の導出)を行った場合、その解を求め、解の性質を利用した処理のためのアルゴリズムを構成することは、詳細については述べていないが、解がパラメータにより多岐にわたるためにきわめて困難である。

それに対して、仮想的空洞部を設けないモデルでは、5. の概略で述べているように処理のためのアルゴリズムの構成が可能である。これらのことは仮想的空洞部を設けないモデル化の妥当性と利点を示している。

2. 基本方程式の導出

Fig.1のように任意の形状の供試体が、容器内の気体と境界 S で接しているとする。さらに容器内の気体は S を通してのみ流入・流出を行うとする。容器内の気体の圧力を P 、体積を V 、気体の個数(分子数) N 、Boltzmann 定数 k_B とし、理想気体の状態方程式 $PV = Nk_B T$ をみたとすとする。また、気体の供試体内での速度を v 、粘性係数を μ 、供試体の浸透率を k とし、供試体内においては Darcy 則 $v = -(k/\mu)\nabla P$ が成り立つとする。

粒子数保存則(質量保存則)により、境界面 S 上の供試体から

外側への単位法線ベクトルを n とすると

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{dP}{dN} \frac{dN}{dt} = \frac{k_B T}{V} \left(\iint_S v n dS \right) N \\ &= P \frac{1}{V} \iint_S \left(-\frac{k}{\mu} \nabla P \right) n dS = -P \frac{k}{\mu} \frac{1}{V} \iint_S \frac{\partial P}{\partial n} dS \end{aligned}$$

となる。理想気体の圧縮率 κ は $\kappa = 1/P$ であり、測定の途中は大きくは変動しないことより、初期時刻 $t=0$ における圧縮率 κ を用いると次の基本方程式を得る。

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V} \iint_S \frac{\partial P}{\partial n} dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

3. 仮想的な空洞部を設けるモデル化

3.1 円柱供試体による測定法の基礎

1. で述べたように、Brace et al.(1968)は岩石の浸透率を測定するため、円柱状の試験片を密閉した円筒状の容器内に設置し、試験片両側の容器内気圧の時間的経緯を測定した。

また、得られたデータから浸透率を求めるための算定式を提示した。しかし、その数理的基礎と手順を詳しくは示していない。そこで、それを明示し、かつ中空円筒供試体との比較を行うため、2. で求めた方程式により円柱供試体の場合の数理的基礎を説明する。Fig.2のように長さ L の円柱供試体を考える。

供試体右側(左側)の容器内の気体の圧力を $P_1(P_2)$ 、体積を $V_1(V_2)$ とする。また、供試体の右側(左側)の気体に接する面を $S_1(S_2)$ とし、 $S_1(S_2)$ 上の供試体から外側への単位法線ベクトルを n とする。式(1)により次の方程式を得る(ただし、装置は変形しないと仮定している)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_1} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial n} dS \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_2} \iint_{S_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} dS \end{aligned} \right\}$$

Brace et al.(1968)によるモデル化と同じように、多孔質の物質である岩石をモデル化して、仮想的に円柱供試体の中央部に孔が集中していると考ええる。多孔による仮想的空洞部分の気体の圧力

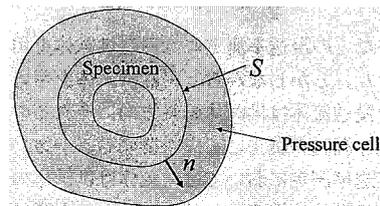


Fig.1 The interface (s) of arbitrary shape of the specimen and air in the pressure cell where n is outward unit vector normal to S .

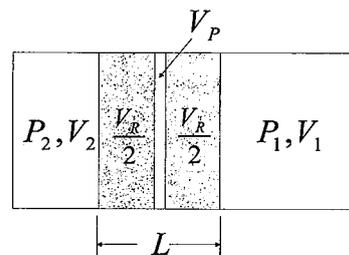


Fig.2 Outline of the permeability test using a specimen of cylindrical or rectangular solid where the total pore volume is intensively arranged at the center.

を P_R 、体積を V_P とする。仮想的空洞部分の右側（左側）の供試体の境界面を $S_{R1}(S_{R2})$ とし、 $S_{R1}(S_{R2})$ 上の供試体から外側への単位法線ベクトルを n とする。このとき、式(1)より P_R に関する方程式は

$$\frac{dP_R}{dt} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_P} \left(\iint_{S_{R1}} \frac{\partial P_R}{\partial n} dS + \iint_{S_{R2}} \frac{\partial P_R}{\partial n} dS \right)$$

となる。したがって、円柱供試体の両側の圧力と仮想的空洞部の圧力とに関する方程式をあわせると、次の方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_1} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial n} dS \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_2} \iint_{S_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} dS \\ \frac{dP_R}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_P} \left(\iint_{S_{R1}} \frac{\partial P_R}{\partial n} dS + \iint_{S_{R2}} \frac{\partial P_R}{\partial n} dS \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)の面積分の項を変形することにより、微分方程式を求めよう。

供試体全体の体積に対する空孔の体積の割合（空孔率）は小さく、また気体の圧縮率は供試体の圧縮率に比べて非常に大きいので、岩石などの供試体内においては、

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

が成立する。

また P_1 の対称性より、 P_1 は y, z には依存せず x のみの関数となるから、 $0 = \Delta P = \partial^2 P / \partial x^2$ より $P_1 = ax + b$ を得る。式(2)での $\partial P_1 / \partial n$ は図のように x 軸をとると、 $\partial P_1 / \partial n = \partial P_1 / \partial x = (P_1 - P_R) / (L/2)$ である。 P_2, P_R についても同様な式を得るので、式(2)より連立の常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{4k}{\kappa\mu} \frac{1}{L^2} \frac{V_R}{2V_1} (P_1 - P_R) \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{4k}{\kappa\mu} \frac{1}{L^2} \frac{V_R}{2V_2} (P_2 - P_R) \\ \frac{dP_R}{dt} &= \frac{4k}{\kappa\mu} \frac{1}{L^2} \frac{V_R}{2V_P} (P_1 + P_2 - 2P_R) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

を得る。

実験は最初中空円筒供試体の内側、外側ともに圧力を P_2^0 とし、次に突如外側を $P_2^0 + (P_1^0 - P_2^0)$ (ただし $P_1^0 > P_2^0$) にする。すなわち微分方程式(3)は初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_R(0) = P_2^0$ のもとで、Appendix 2 より

$$\begin{cases} P_1 = C_1 + C_2 \exp(\alpha t) + C_3 \exp(\beta t) \\ P_2 = D_1 + D_2 \exp(\alpha t) + D_3 \exp(\beta t) \end{cases}$$

の形をした解を持つ。ただし、

$$C_1 = D_1 = \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0 + V_P P_2^0}{V_1 + V_2 + V_P}$$

である。また、 $V_P \ll V_1, V_2$ とみなせるので、Appendix 3 の a_1, a_2, a_3 において $a_1, a_2 \ll a_3$ となり、解は近似的には Appendix 3 より

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{k}{\kappa\mu L^2} V_R \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t\right) \\ P_2 &= \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2} - \frac{V_1}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{k}{\kappa\mu L^2} V_R \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となる。

この理論的な解に含まれるパラメータは浸透率 k 以外はすべて

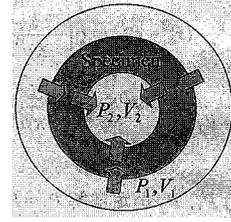


Fig.3 Outline of permeability test using a hollow cylinder specimen.

既知であることに注意すると、実験から得られる P_1, P_2 のデータと比較することにより浸透率が推定できる。

3・2 中空円筒供試体による測定法の数理的基礎

供試体が中空円筒の場合の微分方程式も、円柱の場合と同様にして求めれば良い。気体の圧力を P とすると岩石供試体の内部において $\Delta P = 0$ が成立し、また気体の速度を v とすると Darcy 則 $v = -(k/\mu)\nabla P$ が成立する。

Fig.3 に示す中空円筒供試体の内径を R_1 、外径を R_0 、高さを L とする。中空円筒供試体の外側（内側）の容器内の気体の圧力を $P_1(P_2)$ 、体積を $V_1(V_2)$ とし、外側（内側）の境界面を $S_1(S_2)$ とする。境界面 $S_1(S_2)$ 上の供試体から外に向かう単位法線ベクトルを n とする。

また、中空円筒供試体の中央部、すなわち半径が $(R_1 + R_0)/2$ の位置における同心円上に多孔からなる仮想的な空洞部を考え、空洞部内の気体の圧力を P_R 、体積を V_P 、外側（内側）の供試体との境界面を $S_{R1}(S_{R2})$ とし、 $S_{R1}(S_{R2})$ 上の供試体から外側への単位法線ベクトルを n とする。

式(2)より微分方程式を求める。

岩石などの供試体内での気体の圧力 P は $\Delta P = 0$ を満たすが、円筒座標系 (r, θ, z) を用いると

$$0 = \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

となる。軸対称性により P は r のみに依存するから

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

を得る。この常微分方程式の一般解は $P = a \log r + b$ であるから、供試体内において $P = a \log r + b$ をみたく。

外側境界面 $r = R_0$ で $P = P_1$ 、空洞境界面 $r = (R_1 + R_0)/2$ で $P = P_R$ となるように a を定めると

$$a = \frac{(P_1 - P_R)}{\log(2R_0 / (R_1 + R_0))}$$

を得る。したがって、前節と同様に $\partial P_1 / \partial n$ を求めると

$$\frac{\partial P_1}{\partial n} = \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \frac{(P_1 - P_R)}{\log(2R_0 / (R_1 + R_0))} \frac{1}{R_0}$$

である。同様にして P_2, P_R に関する式を変形して P_1, P_2, P_R に関する常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(2R_0 / (R_1 + R_0))} \frac{1}{V_1} (P_1 - P_R) \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log((R_1 + R_0) / 2R_1)} \frac{1}{V_2} (P_2 - P_R) \\ \frac{dP_R}{dt} &= \frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0 / R_1)} \frac{1}{V_P} \left\{ \log((R_1 + R_0) / 2R_1) P_1 \right. \\ &\quad \left. + \log(2R_0 / (R_1 + R_0)) P_2 - \log(R_0 / R_1) P_R \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を得る。

この方程式の初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_R(0) = P_2^0$ のもとの解は Appendix 2 により求めることができる。また、 $V_P \ll V_1, V_2$ とみなせるので、Appendix 3 により近似解は次のようになる。

$$P_1 = \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_i)} \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t\right)$$

$$P_2 = \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2} - \frac{V_1}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_i)} \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t\right)$$

…………… (6)

この解は気体の圧力 P_1, P_2 が定常解 $P_1 = P_2 = (V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0) / (V_1 + V_2)$ に収束し、収束の速度を表す指数べきに浸透率 k が含まれていることを示している。

3・3 中空円筒供試体による浸透率・透水係数の測定

3・2 で求めた理論解と実験データを比較する。式 (6) で与えられる理論解より対数をとると

$$\log\left(P_1 - \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2}\right) = \log\left(\frac{V_2}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0)\right) - \frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_i)} \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t$$

を得る。

実験から得られるデータ P_1 を用いて $\log(P_1 - ((V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0) / (V_1 + V_2)))$ と t の関係を表したグラフの傾きを最小乗法により推定し、その結果と理論的に得られる傾き

$$\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_i)} \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}$$

とを比較し、浸透率 k 以外は既知であるので、浸透率が推定される。また、データ P_2 を用いて同様の処理を行って浸透率を推定することもできる。

中空円筒供試体を用いた透気試験により浸透率を測定する簡易透気試験装置を試作した(土井他, 2001)。装置の外観を Fig.4 に、石灰岩供試体の外観を Fig.5 に示す。また、この装置を使って透気試験を行った。岩石などの脆性材料を供試体として用いる場合、供試体内に引張応力が生じると破壊するおそれがある。そこで、供試体外側の圧力容器内に高い圧力 P_1 を作用させるものとし、次

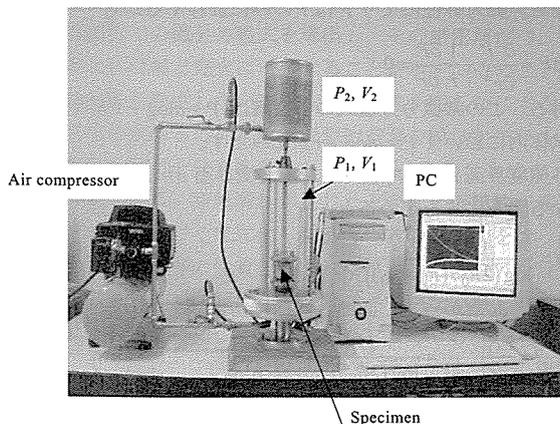


Fig.4 Outward appearance of the apparatus for pneumatic permeability test using hollow cylinder specimen.

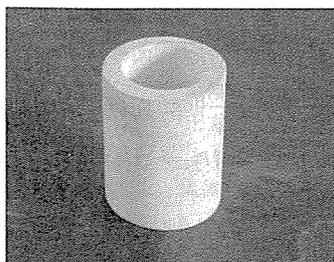


Fig.5 The hollow cylinder specimen made of limestone.

の手順により試験を行った。

- (1) 岩塊から、コアボーリングによって得られた中空円筒形コアの両端面を平行に整形して供試体を作成する。
- (2) 供試体を圧力容器内に設置する。
- (3) 供試体の外側と内側から同じ圧力をかける。
- (4) 外側の圧力 P_1 を内側の圧力より大きくしたあと系を閉じ、その後の P_1 と P_2 の経時変化を観察する。
- (5) 観察結果から供試体の浸透率を算定する。

供試体の寸法、圧力容器内の試験片内側と外側の容積および空気の物性を Table 1 に示す。透気試験から得られた試験片内外の圧力-時間曲線を Fig.6 に示す。図中の P_f は中空円筒供試体内側に通ずる圧力容器と外側に通ずる圧力容器 (Fig.3 参照) との間に圧力差がなくなったときのそれぞれの圧力値である。なお、浸透率から透水係数を求める際に必要となる水の静粘性係数を Table 1 に示した。

4. 仮想的空洞部を設定しない円柱および中空円筒供試体のモデル化

3. では、Brace et al.(1968) による論文にない、多孔質である岩石内の気体の移動を中央部に仮想的な空洞部を設定し、それに基づき岩石の浸透率を推定する方式を議論した。この章では、浸透率を求めるためのモデル化においては中央部に仮想的な空洞部を設けるモデル化よりも簡単なモデル化で十分であることを示す。

まず、円柱供試体に対するモデル化を考察する。中央部に仮想的空洞部を設けないことを除いては、3. とほぼ同様の議論により、 P_1, P_2 に関する方程式を得る。

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_1} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial n} dS$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_2} \iint_{S_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} dS$$

そこで、岩盤内で空気圧 P が一次関数になることを用いて、式の中の $\partial P / \partial n$ を求める。 S_2 上では、 $\partial P / \partial n = \partial P / \partial x = (P_1 - P_2) / L$ であり、 S_1 上では $\partial P / \partial n = -\partial P / \partial x = -(P_1 - P_2) / L$ となることを用いて、

Table 1 Specification of the permeability test using hollow cylinder specimen.

Outer radius of specimen R_0 (m)	4.45×10^{-2}
Inner radius of specimen R_i (m)	3.09×10^{-2}
Height of specimen L (m)	4.92×10^{-2}
Volume of outside cell V_1 (m ³)	2.90×10^{-3}
Volume of inside cell V_2 (m ³)	2.90×10^{-3}
Compressibility of air κ (Pa ⁻¹)	3.33×10^{-6}
Viscosity of air μ_a (Pa·s)	1.82×10^{-3}
Viscosity of water η_w (Pa·s)	8.90×10^{-4}

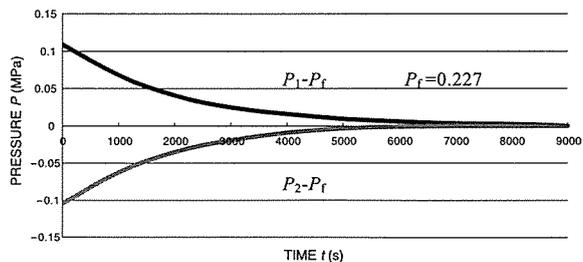


Fig.6 The pressure-time records obtained from the pneumatic permeability test with no leakage for a limestone specimen.

次の P_1, P_2 に関する常微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{V_R}{L^2} \frac{1}{V_1} (P_1 - P_2) \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{V_R}{L^2} \frac{1}{V_2} (P_2 - P_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

この方程式の解は

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{k}{\kappa\mu L^2} V_R \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t\right) \\ P_2 &= \frac{V_1 P_1^0 + V_2 P_2^0}{V_1 + V_2} - \frac{V_1}{V_1 + V_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{k}{\kappa\mu L^2} V_R \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} t\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となり、仮想的な空洞部を設定した場合の近似解と一致する。中空円筒供試体の場合も同様にモデル化すると、基本方程式

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_1} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial n} dS$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_2} \iint_{S_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} dS$$

において $\partial P/\partial n$ の部分を求める。中空円筒状の岩石内部においては $P = a \log r + b$ であるから、 S_2 上では

$$\frac{\partial P_2}{\partial n} = -\frac{\partial P_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = -\frac{(P_1 - P_2)}{\log(R_0/R_1) R_1}$$

となり、 S_1 上では

$$\frac{\partial P_1}{\partial n} = \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \frac{(P_1 - P_2)}{\log(R_0/R_1) R_0}$$

となる。したがって、 P_1, P_2 に関する常微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_1)} \frac{1}{V_1} (P_1 - P_2) \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_1)} \frac{1}{V_2} (P_2 - P_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

である。この解は、仮想的な空洞部を設定した場合の近似解である式(6)と完全に一致する。

5. 空気漏れがある場合の定式化と浸透率の測定

中空円筒状の供試体を装填する実験装置が劣化等の不備のため、たとえ空気漏れが生じている場合であっても適切な定式化を行えば、浸透率の測定には支障がなく有効であることをこの章では示す。最初に定式化を行い、それによる気体の圧力の解を求め、さらに実際の実験データから浸透率を推定し、その有効性を実証する。

5・1 空気漏れがある場合のモデル化

最初に仮想的空洞部を設定しないモデルをもとにした定式化(気体の圧力に関する微分方程式の導出)を行いそれによる気体の圧力の解を求め、その解と実際の実験データの比較から浸透率を求めるアルゴリズムを述べ、この手法の有効性を示す。なお、仮想的空洞部を設定するモデルをもとにして定式化(微分方程式の導出)した場合は、解を、ラプラス変換を利用して求めようとしたときにパラメータにより解が多岐にわたるために、有効なアルゴリズムを作ることはきわめて困難である。

圧力容器からの空気漏れは各容器内の空気の圧力に比例すると考えられるので、 P_1, P_2 に関する基本方程式は

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{\kappa V_1} \left\{ \iint_{S_1} v n dS - l_1 P_1 \right\} = -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_1} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial n} dS - \frac{1}{\kappa} \frac{l_1}{V_1} P_1$$

より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_1} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial n} dS - \frac{1}{\kappa} \frac{l_1}{V_1} P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{1}{V_2} \iint_{S_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} dS - \frac{1}{\kappa} \frac{l_2}{V_2} P_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで、 l_1, l_2 は内側と外側の容器の空気漏れを表すパラメータである。

$d_1 = l_1 / \kappa V_1, d_2 = l_2 / \kappa V_2$ とおき、3. のときと同様にする、 P_1, P_2 に関する常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_1)} \frac{1}{V_1} (P_1 - P_2) - d_1 P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_1)} \frac{1}{V_2} (P_2 - P_1) - d_2 P_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

を得る。ここで、

$$a_1 = \frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_1)} \frac{1}{V_1}, a_2 = \frac{k}{\kappa\mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_1)} \frac{1}{V_2}$$

とおくと、解は初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_2^0$ のもとで Appendix 5 により

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= C_1 \exp(\alpha t) + C_2 \exp(\beta t) \\ P_2 &= D_1 \exp(\alpha t) + D_2 \exp(\beta t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。ただし、 $\beta < \alpha < 0$ は 2 次方程式

$$s^2 + (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)s + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + d_1 d_2) = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \{ -(a_1 + a_2 + d_1 + d_2) + \sqrt{D} \}, \beta = \frac{1}{2} \{ -(a_1 + a_2 + d_1 + d_2) - \sqrt{D} \}$$

$$D = (a_1 - d_2)^2 + (a_2 - d_1)^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 d_1 + a_2 d_2 - d_1 d_2)$$

また、

$$C_1 = \frac{(\alpha + a_2 + d_2) P_1^0 + a_1 P_2^0}{\alpha - \beta} > 0, C_2 = -\frac{(\beta + a_2 + d_2) P_1^0 + a_1 P_2^0}{\alpha - \beta}$$

$$D_1 = \frac{a_2 P_1^0 + (\alpha + a_1 + d_1) P_2^0}{\alpha - \beta} > 0, D_2 = -\frac{a_2 P_1^0 + (\beta + a_1 + d_1) P_2^0}{\alpha - \beta}$$

である。

5・2 空気漏れがあるときの中空円筒供試体による浸透率・透水係数の測定

式(12)で与えられた理論解と実験データを比較することにより、浸透率を推定する。具体的には、Fig.7 に示す順序で浸透率を推定する。

以下、各段階について説明する。

(1) d_1, d_2 の推定 : 通常は測定したい岩石などの供試体を設置するところに、供試体内の空気の流れを生じさせないために鋼製の供試体を設置し実験を行う。

この場合の方程式は、供試体内を通る気体の流れはないから、

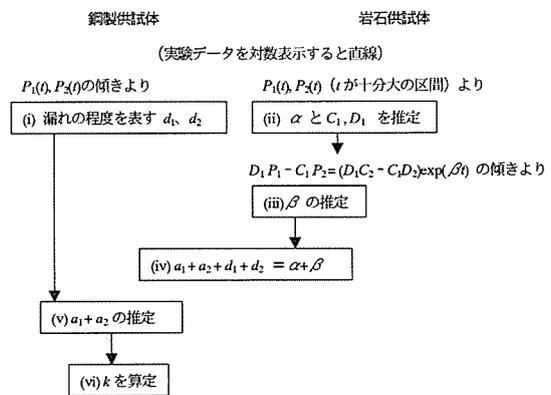


Fig.7 Calculation order for permeability determination.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -d_1 P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} &= -d_2 P_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

となる。その理論解は

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_1(0) \exp(-d_1 t) \\ P_2 &= P_2(0) \exp(-d_2 t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となるから、実験と比較することにより d_1, d_2 を推定できる。

(2) α と C_1, D_1 の推定 : 浸透率の測定対象の中空円筒供試体を設置し実験を行う。5・1 で述べているようにその理論解は

$$\left\{ \begin{aligned} P_1 &= C_1 \exp(\alpha t) + C_2 \exp(\beta t) \\ P_2 &= D_1 \exp(\alpha t) + D_2 \exp(\beta t) \end{aligned} \right.$$

である。ただし、 $\beta < \alpha < 0$ である。

$$P_1 = C_1 \exp(\alpha t) \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \exp(-(\alpha - \beta)t) \right)$$

より、時間 t が十分大であれば、 $P_1 = C_1 \exp(\alpha t)$ と近似できる。同様に $P_2 = D_1 \exp(\alpha t)$ を得る。したがって、 t が十分大の区間において実験データと比較することにより α と C_1, D_1 が推定できる。

(3) β の推定 : 理論解を変形すると $D_1 P_1 - C_1 P_2 = (D_1 C_2 - C_1 D_2) \exp(\beta t)$ となるので、このことを利用する。(2) で推定した C_1, D_1 と実験データの P_1, P_2 を使って左辺を計算し、そのことにより右辺の指数べきの β を容易に推定できる。

(4) $a_1 + a_2 + d_1 + d_2$ の推定 : (2)(3) より α, β が求まっており、また等式 $\alpha + \beta = a_1 + a_2 + d_1 + d_2$ が成り立つので、 $a_1 + a_2 + d_1 + d_2$ が推定できる。

(5) $a_1 + a_2$ の推定 : 等式 $a_1 + a_2 = (a_1 + a_2 + d_1 + d_2) - (d_1 + d_2)$ と、(1)(4) より d_1, d_2 および $a_1 + a_2 + d_1 + d_2$ が求まっているので、 $a_1 + a_2$ が推定できる。

(6) 浸透率の推定 :

等式 $a_1 + a_2 = \frac{k}{\kappa \mu} \frac{2\pi L}{\log(R_0/R_i)} \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}$ から、

$$k = (a_1 + a_2) \kappa \mu \frac{\log(R_0/R_i)}{2\pi L} \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} \dots\dots\dots (15)$$

となる。右辺においては (5) より $a_1 + a_2$ が求まっており、その他は既知であるので、浸透率 k が推定できる。

石灰岩の中空円筒供試体について実験を行い、Fig.8 に示す圧力-時間曲線が得られた。また、鋼製供試体を用いた漏気試験の結果を Fig.9 に示す。これらの図から Table 2 に示すパラメータを求めた。表の真中の列の値は配管系に空気漏れのなかった実験から定められたものであり、右の列の値は空気漏れのあった実験から定められたものである。これらのパラメータの値から、浸透率 $k = 5.3 \times 10^{-17}(\text{m}^2)$ 、透水係数 $K = 5.8 \times 10^{-10}(\text{m/s})$ が得られた。Table 2 から、たとえ空気漏れがある状況のもとでもほぼ正しく k や K を求めることができ、この手法の有効性が確かめられた。

6. ま と め

岩石など多孔質物質の浸透率を測定するために、その基礎となる数理解析とそれに基づく簡易システムの開発について議論した。

数理的基礎としては、

- (1) 密閉容器内におさめられた中空円筒供試体両側の気体圧力の経時変化に関する微分方程式の導出
- (2) その解と近似解の導出

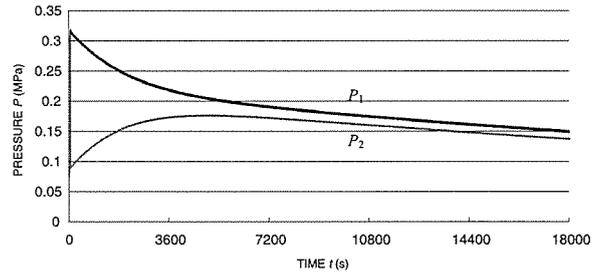


Fig.8 The pressure-time records obtained from the pneumatic permeability test for a limestone specimen.

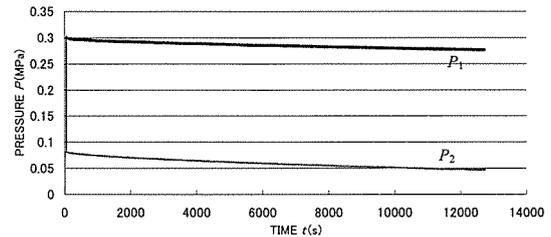


Fig.9 The pressure-time records obtained from the pneumatic permeability test for steel specimen.

Table 2 The initial pressures set up in the tests and the parameters determined from the test results.

Parameters	No leakage	With leakage
P_1^0 (Pa)	3.36×10^5	3.19×10^5
P_2^0 (Pa)	1.22×10^5	8.98×10^4
α	0	-2.24×10^{-5}
β	-5.90×10^{-4}	-5.34×10^{-4}
d_1	0	5.68×10^{-6}
d_2	0	4.03×10^{-5}
$a_1 = a_2$	2.95×10^{-4}	2.55×10^{-4}
C_1 (Pa)	2.29×10^5	2.15×10^5
C_2 (Pa)	1.07×10^5	1.04×10^5
D_1 (Pa)	2.29×10^5	2.01×10^5
D_2 (Pa)	1.07×10^5	-1.11×10^5
k (m^2)	6.1×10^{-17}	5.3×10^{-17}
K (m/s)	6.7×10^{-10}	5.8×10^{-10}

- (3) 仮想的空洞を設定した場合としない場合の解の比較検討
- (4) 容器に空気漏れが生じているときの微分方程式の導出とその解
- (5) 各々の場合の浸透率の推定のアルゴリズムの提案について述べた。

簡易測定装置を作成し、これを用いて石灰岩を対象に実験を行い、数理的基礎に基づいて浸透率を推定し、簡易測定装置による浸透率測定の有効性を確かめた。

なお、数理的基礎に基づく実際の計算は山口大学工学部・社会建設工学科 資源エネルギー工学研究室 4 年生 赤穂優子が行った。ここに謝意を表す。

今後の研究課題としては、装置の剛性を考慮に入れるとともに、中空円筒供試体にトランジェントパルス法を拡散方程式の初期値・境界値問題として基礎付けし、その解の特別な場合と本論文で示した解との対応を示すことである。

気体を用いて中空円筒供試体にトランジェントパルス法を適用したとき、気体の圧力 P の満たす初期条件・境界条件付きの偏微分方程式は、Brace et al.(1968) の考察と本論文の方法より以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\kappa_{eff}}{k} \left(\frac{\kappa_{eff} - \kappa_S}{\kappa} + \eta \left(1 - \frac{\kappa_S}{\kappa} \right) \right) \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (R_i < r < R_0) \\ \frac{\partial P}{\partial t}(R_i, t) &= \frac{k}{\kappa \mu} \frac{1}{V_1} 2\pi R_i L \frac{\partial P}{\partial r}(R_i, t), \quad (0 \leq t) \\ \frac{\partial P}{\partial t}(R_0, t) &= -\frac{k}{\kappa \mu} \frac{1}{V_2} 2\pi R_0 L \frac{\partial P}{\partial r}(R_0, t), \quad (0 \leq t) \\ P(r, 0) &= 0, \quad (R_i < r < R_0) \\ P(R_i, 0) &= P_2^0, \quad P(R_0, 0) = P_1^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 κ_S は供試体岩石の圧縮率、 κ_{eff} は供試体岩石の有効圧縮率、 η は空隙率であり、その他の変数は 3., 4. と同様である。

また水の場合は重力による体積力を考慮しなければならないので、たとえば、この方程式の P を $P + \rho g z$ に代える必要がある。ここで、 P は水圧、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 z は鉛直方向の座標である。

引用文献

- 1) Brace, W.F., Walsh, J.B. and Frangos, W.T.: Permeability of granite under high pressure, J. Geophys. Res., Vol. 73, p. 2225-2236, (1968)
- 2) Hsieh, P.A., Tracy, J.V., Neuzil, C.E., Bredehoeft, J.D. and Silman, S.E.: A transient laboratory method for determining the hydraulic properties of 'tight' rocks-1. Theory, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 18, p. 245-252, (1981)
- 3) Esaki, T., Zhang, M., Takeshita, A. and Mitani, Y.: Rigorous theoretical analysis of a flow pump permeability test, Geotechnical Testing J., Vol. 19, p. 241-246, (1996)
- 4) Zhang, M., Takahashi, M., Morin, R.H. and Esaki, T.: Theoretical evaluation of the transient response of constant head and constant flow-rate permeability tests, Geotechnical Testing J., Vol. 21, p. 52-57, (1998)
- 5) 高橋 学・張 銘・林為人・西山 哲・李小春: 室内透水試験における供試体中の水頭分布、動水勾配、貯留係数について、資源と素材, Vol. 114, No. 12, p. 888-894, (1998)
- 6) 土井昭仁: 山口大学ベンチャー・ビジネスラボラトリー平成 12 年度年報, ヤング・スカラー・プロジェクト, p. 97-98, (2000)
- 7) 土井昭仁・久留島浩二郎・石田 毅: 資源・素材学会秋季大会, PA-5, (2001)

Appendix 1

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$ とし、 $a_1 \neq a_2$ とする。このとき、常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -a_1(P_1 - P_R) \\ \frac{dP_2}{dt} &= -a_2(P_2 - P_R) \\ \frac{dP_R}{dt} &= a_3(b_1 P_1 + b_2 P_2 - (b_1 + b_2) P_R) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

の解は、初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_2^0, P_R(0) = P_2^0$ のもとで、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= C_1 + C_2 \exp(\alpha t) + C_3 \exp(\beta t) \\ P_2 &= D_1 + D_2 \exp(\alpha t) + D_3 \exp(\beta t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{a_2 a_3 b_1 P_1^0 + a_1 a_3 b_2 P_2^0 + a_1 a_2 P_2^0}{a_1 a_2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2} \\ C_2 &= \frac{a_1 \left\{ a_3 b_2 (P_1^0 - P_2^0) + (\alpha + a_2) (P_1^0 - P_2^0) \right\}}{-\alpha (\alpha - \beta)} \\ C_3 &= \frac{a_1 \left\{ a_3 b_2 (P_1^0 - P_2^0) + (\beta + a_2) (P_1^0 - P_2^0) \right\}}{-\beta (\beta - \alpha)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= C_1 = \frac{a_2 a_3 b_1 P_1^0 + a_1 a_3 b_2 P_2^0 + a_1 a_2 P_2^0}{a_1 a_2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2} \\ D_2 &= \frac{a_2 \left\{ a_3 b_1 (P_2^0 - P_1^0) + (\alpha + a_1) (P_2^0 - P_1^0) \right\}}{-\alpha (\alpha - \beta)} \\ D_3 &= \frac{a_2 \left\{ a_3 b_1 (P_2^0 - P_1^0) + (\beta + a_1) (P_2^0 - P_1^0) \right\}}{-\beta (\beta - \alpha)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

である。ここで、2 次方程式

$$s^2 + (a_1 + a_2 + a_3 b_1 + a_3 b_2) s + (a_1 a_2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2) = 0$$

はともに負の異なる 2 実根をもつことが示すことができ、その根を α, β とする。また、 α, β の選び方は $\beta < \alpha < 0$ となるようにとる。

(証明) ラプラス変換を使うと容易に解を得る。未知関数 $P_1(t), P_2(t), P_R(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\bar{P}_1(s), \bar{P}_2(s), \bar{P}_R(s)$ とし、方程式 (17) の両辺をラプラス変換すると

$$\bar{P}_1(s) = - \begin{vmatrix} P_1^0 & 0 & -a_1 \\ P_2^0 & s + a_2 & -a_2 \\ -P_2^0 & a_3 b_2 & -\{s + a_3(b_1 + b_2)\} \end{vmatrix} / s \left\{ s^2 + (a_1 + a_2 + a_3 b_1 + a_3 b_2) s + (a_1 a_2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2) \right\}$$

となる。これを部分分数に分解すると

$$\bar{P}_1(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s - \alpha} + \frac{C_3}{s - \beta}$$

を得る。これより解 $P_1(t)$ が求まる。 $P_2(t)$ についても同様にして求めることができる。

Appendix 2

常微分方程式 (16) は、初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_2^0, P_R(0) = P_2^0$ のもとでは解 (17) の係数 (18)(19) は

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{a_2 a_3 b_1 P_1^0 + a_1 (a_3 b_2 + a_2) P_2^0}{a_1 a_2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2} \\ C_2 &= \frac{a_1 (a_3 b_2 + a_2 + \alpha) (P_1^0 - P_2^0)}{-\alpha (\alpha - \beta)} \\ C_3 &= \frac{a_1 (a_3 b_2 + a_2 + \beta) (P_1^0 - P_2^0)}{-\beta (\beta - \alpha)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= C_1 \\ D_2 &= \frac{-a_2 a_3 b_1 (P_1^0 - P_2^0)}{-\alpha (\alpha - \beta)} \\ D_3 &= \frac{-a_2 a_3 b_1 (P_1^0 - P_2^0)}{-\beta (\beta - \alpha)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となる。

Appendix 3

常微分方程式 (16) は、初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_2^0, P_R(0) = P_2^0$ のもとで、 $a_1, a_2 \ll a_3$ のとき、 t が十分大であるときの近似解は

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{a_2 b_1 P_1^0 + a_1 b_2 P_2^0}{a_1 b_2 + a_2 b_1} + \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_1} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 + b_2} t\right) \\ P_2 &= \frac{a_2 b_1 P_1^0 + a_1 b_2 P_2^0}{a_1 b_2 + a_2 b_1} - \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2 + a_2 b_1} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 + b_2} t\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

となる。

(証明)式(17)より,

$$P_1 = C_1 + C_2 \exp(\alpha t) \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \exp(-(\alpha - \beta)t) \right)$$

となる。ここで、 $a_3 \rightarrow \infty$ としたときの、 C_3/C_2 , α , C_1 , C_2 の極限を求める。まず,

$$\begin{aligned} \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \frac{C_3}{C_2} &= \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(-\frac{\alpha}{\beta} \frac{a_2 + a_3 b_2 + \beta}{a_2 + a_3 b_2 + \alpha} \right) \\ &= \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2 + a_3 b_2 + \beta}{a_2 + a_3 b_2 + \alpha} \right) = 0 \times \left(-\frac{b_1}{b_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \alpha &= -\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(\frac{-2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) a_3 - (a_1 - a_2)^2}{-a_3(b_1 + b_2) - \sqrt{a_3^2(b_1 + b_2)^2 + 2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)a_3 + (a_1 - a_2)^2}} \right) \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \frac{-2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)}{-2(b_1 + b_2)} = -\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 + b_2} \end{aligned}$$

である。さらに

$$\begin{aligned} \lim_{a_3 \rightarrow \infty} C_1 &= \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2 a_3 b_1 P_1^0 + a_1(a_3 b_2 + a_2)P_2^0}{a_1 a_2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2} \right) = \frac{a_2 b_1 P_1^0 + a_1 b_2 P_2^0}{a_1 b_2 + a_2 b_1} \\ \lim_{a_3 \rightarrow \infty} C_2 &= \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1(a_2 + a_3 b_2 + \alpha)}{-\alpha(\alpha - \beta)} (P_1^0 - P_2^0) \right) \\ &= a_1 (P_1^0 - P_2^0) \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2 + a_3 b_2 + \alpha}{-\alpha(\alpha - \beta)} \right) = a_1 (P_1^0 - P_2^0) \frac{b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_1} \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $a_1, a_2 \ll a_3$ のとき

$$\begin{aligned} P_1 &= C_1 + C_2 \exp(\alpha t) \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \exp(-(\alpha - \beta)t) \right) \\ &\cong \frac{a_2 b_1 P_1^0 + a_1 b_2 P_2^0}{a_1 b_2 + a_2 b_1} + \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_1} (P_1^0 - P_2^0) \exp\left(-\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 + b_2} t\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。

Appendix 4

$a_1, a_2 > 0$ とする。常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -a_1(P_1 - P_2) \\ \frac{dP_2}{dt} &= -a_2(P_2 - P_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

の解は、初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_2^0$ のもとで、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{a_2 P_1^0 + a_1 P_2^0}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp(-(a_1 + a_2)t) \\ P_2 &= \frac{a_2 P_1^0 + a_1 P_2^0}{a_1 + a_2} - \frac{a_2}{a_1 + a_2} (P_1^0 - P_2^0) \exp(-(a_1 + a_2)t) \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

である。

(証明)Appendix 1と同様にする。簡単な計算により

$$\bar{P}_1(s) = \frac{a_2 P_1^0 + a_1 P_2^0}{a_1 + a_2} \frac{1}{s} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} (P_1^0 - P_2^0) \frac{1}{s + a_1 + a_2}$$

となるから、解 $P_1(t)$ を得る。同様にして解 $P_2(t)$ を得る。

Appendix 5

$a_1, a_2, d_1, d_2 > 0$ とする。このとき、常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -a_1(P_1 - P_R) - d_1 P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} &= -a_2(P_2 - P_R) - d_2 P_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

は初期条件 $P_1(0) = P_1^0, P_2(0) = P_2^0$ のもとで式(12)となる。

(証明)未知関数 $P_1(t), P_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\bar{P}_1(s), \bar{P}_2(s)$ とし、方程式(26)の両辺をラプラス変換すると $\{S^2 + (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)s + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + d_1 d_2)\} \bar{P}_1 = P_1^0 S + (a_1 P_0 + a_2 P_1 + d_2 P_1^0)$ となる。ここで、2次方程式

$S^2 + (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)s + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + d_1 d_2) = 0$ はともに負の異なる2実根をもつことが示すことができ、その根を α, β とする。また、 α, β の選び方は $\beta < \alpha < 0$ となるようにとる。すると

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1^0 S + (a_1 P_2^0 + a_2 P_1^0 + d_2 P_1^0)}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

を得るので、これを部分分数に分解して

$$\bar{P}_1(s) = \frac{C_2}{s - \alpha} + \frac{C_3}{s - \beta}$$

を得る。これより解 $P_1(t)$ が求まる。