



# Kelvin 解による 3 次元仮想応力法中の解析積分について\*

劉 承 論<sup>1</sup> 水 田 義 明<sup>2</sup> 栗 山 憲<sup>3</sup>

## Analytical Integrations for Three-dimensional Fictitious Stress Method Based on Kelvin Solution

by Chenglun LIU<sup>1</sup>, Yoshiaki MIZUTA<sup>1</sup> and Ken KURIYAMA<sup>1</sup>

1. Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube 755-8611

Recently, an elastic analysis by three-dimensional boundary element method based on fictitious stress method, in which the numerical integrations have to be used to get the influence coefficients, is extensively applied and studied. However, to analyze three dimensional models of natural geological structure and artificial underground excavation or for a large scale computation of stress and displacement and stability evaluation using their combined model, exploitation of much more accurate and faster analytical solutions in order to avoid numerical integration is regarded as extremely valuable. Kuriyama and Mizuta have carried out the study in which, however, the elaborate integration results seem complicated. Furthermore, if some observed points were located at the elongated line of one side of a triangular element (these points are regards as special observed ones), their analytical integrations can not be applied. In other words, the singular point (the center of gravity) and the special points (on the elongation of three sides) have to be evaded when using the analytical codes developed by Kuriyama and Mizuta. This is usually not realistic in a huge model. Therefore, the corrected and much more concise analytical integrations for arbitrary boundary shapes, arbitrary divisions of triangular elements and arbitrary observed points (except the three sides of triangular) are deduced in this paper.

**KEY WORDS** : Fictitious Stress Method, Boundary Element Method, Analytical Integration

### 1. 緒 言

最近、仮想応力法による境界要素法の 3 次元弾性解析がよく行われているが、その影響係数の計算に数値積分が用いられている。天然の地層構造や人工の地下構造の 3 次元モデルあるいはそれらの組み合わせモデルによる大規模な応力や変位の計算およびそれに基づく安定性評価に対して、高精度で計算時間の短い解析を目指して、数値積分を全く行わない解析積分を用いる方法を開発することは価値があると思われる。栗山・水田らはすでにそのような研究<sup>1)2)</sup>を行っている。しかし、彼らによって導かれた式(解析積分値を与える表現)は不完全であった。さらに部分の観測点の一つとしてのある 3 角形面要素の重心が他の 3 角形要素を構成するいずれかの辺の延長線にある場合(特殊な観測点)に対する計算には、これを適用することができなかった。いかにいえば、栗山・水田らが開発した解析コードを用いて解析を行うときには、上記のような特殊な観測点を生じさせない要素分割が行われてきた。境界面が滑らかな曲面である場合には、そのことを意識しな

い要素分割を行っても特殊な観測点(境界面を構成する 3 角形面要素の重心)が生ずることはないが、境界面外の任意の観測点についてはこのような特殊な場合が生ずる可能性があった。また、たとえば平面状の境界面を要素に分割する場合など、境界面の形状によっては境界面上の観測点すなわち要素の重心にも特殊な状況が生ずる場合があり得る。そこで、今回どのような境界面形状に対するどのような要素分割においても容易に、かつ正確に影響係数を求めることができ、しかも簡潔な形で表現できる解析積分結果を導いた。

### 2. Kelvin 解<sup>3)</sup>による解析積分

仮想応力法の基礎となっているのは弾性問題における Navier 方程式の Kelvin 解である。図 1 のような無限体の内部の座標原点に働く集中力  $P_x, P_y, P_z$  の場合の Kelvin 解は次式(1)~(9)で与えられる。

$$U_x = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[ \left\{ \frac{x^2}{r^3} + (3-4\nu) \frac{1}{r} \right\} P_x + \frac{xy}{r^3} P_y + \frac{xz}{r^3} P_z \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$U_y = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[ \frac{xy}{r^3} P_x + \left\{ \frac{y^2}{r^3} + (3-4\nu) \frac{1}{r} \right\} P_y + \frac{yz}{r^3} P_z \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$U_z = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[ \frac{xz}{r^3} P_x + \frac{yz}{r^3} P_y + \left\{ \frac{z^2}{r^3} + (3-4\nu) \frac{1}{r} \right\} P_z \right] \dots\dots\dots (3)$$

\* 1999 年 4 月 28 日受付 7 月 22 日受理 資源・素材学会平成 11 年度春季大会にて一部発表(1999 年 3 月 31 日)

1. 山口大学大学院生 理工学研究科博士後期課程設計工学専攻

2. 正会員 工博 山口大学教授 工学部社会建設工学科

3. 理博 山口大学教授 工学部感性デザイン工学科

[著者連絡先] FAX 0836-34-6674 (山口大・社会建設)

キーワード: 仮想応力法, 境界要素法, 解析積分

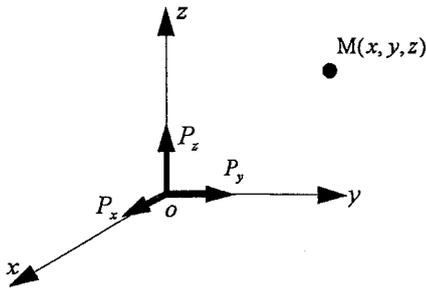


図1 無限媒体内の座標原点に働く集中力  $P_x, P_y, P_z$  と観測点 M

$$\sigma_x = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{x}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3x^2}{r^2} \right\} P_x + \frac{y}{r^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{3x^2}{r^2} \right\} P_y + \frac{z}{r^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{3x^2}{r^2} \right\} P_z \right] \dots (4)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x}{r^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{3y^2}{r^2} \right\} P_x - \frac{y}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3y^2}{r^2} \right\} P_y + \frac{z}{r^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{3y^2}{r^2} \right\} P_z \right] \dots (5)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x}{r^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{3z^2}{r^2} \right\} P_x + \frac{y}{r^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{3z^2}{r^2} \right\} P_y - \frac{z}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3z^2}{r^2} \right\} P_z \right] \dots (6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{y}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3x^2}{r^2} \right\} P_x - \frac{x}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3y^2}{r^2} \right\} P_y - \frac{3xyz}{r^5} P_z \right] \dots (7)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{3xyz}{r^5} P_x - \frac{z}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3y^2}{r^2} \right\} P_y - \frac{y}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3z^2}{r^2} \right\} P_z \right] \dots (8)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{z}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3x^2}{r^2} \right\} P_x - \frac{3xyz}{r^5} P_y - \frac{x}{r^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{3z^2}{r^2} \right\} P_z \right] \dots (9)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ここで、 $U, \sigma$  はそれぞれ点 M ( $x, y, z$ ) の変位と応力である。 $G$  は剛性率、 $\nu$  はポアソン比である。

本研究では座標原点一点の集中力を作用させるのではない。いま、図2のように弾性体内に一つの三角形面要素を考え、この要素の局所座標系  $O_j - x_j y_j z_j$  を構築し、この三角形の頂点1を原点  $O_j$  とし、法線方向を  $z_j$  軸とする。その要素面上において  $x_j, y_j, z_j$  方向に一樣仮想応力不連続量  $P_{x_j}, P_{y_j}, P_{z_j}$  を作用させる。この

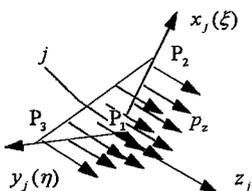


図2 全体座標系 ( $o - xyz$ ),  $j$  要素局所座標系 ( $o_j - x_j y_j z_j$ ) に対する任意点 M の座標および  $j$  要素面上に働く一樣分布応力  $p_z$

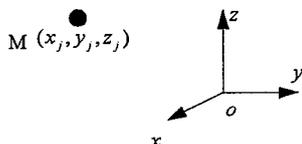


図3 局所座標系 ( $\xi, \eta$ ) における三角形頂点の番号と座標

とき、任意点 M ( $x_j, y_j, z_j$ ) (境界要素であればその重心) に発生する変位と応力は、式(10)~(18)となる。

$$U_{x_j} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[ p_{x_j} \{ f_5 + (3-4\nu)f_1 \} + p_{y_j} f_7 + p_{z_j} z_j f_3 \right] \dots (10)$$

$$U_{y_j} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[ p_{x_j} f_7 + p_{y_j} \{ f_6 + (3-4\nu)f_1 \} + p_{z_j} z_j f_4 \right] \dots (11)$$

$$U_{z_j} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[ p_{x_j} z_j f_3 + p_{y_j} z_j f_4 + p_{z_j} \{ z_j f_2 + (3-4\nu)f_1 \} \right] \dots (12)$$

$$\sigma_{x_j} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\{ (1-2\nu)f_3 + 3f_{14} \} p_{x_j} + \{ (1-2\nu)f_4 - 3f_{17} \} p_{y_j} + \{ (1-2\nu)f_2 - 3f_{11} \} p_{z_j} \right] \dots (13)$$

$$\sigma_{y_j} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \{ (1-2\nu)f_3 - 3f_{16} \} p_{x_j} - \{ (1-2\nu)f_4 + 3f_{15} \} p_{y_j} + \{ (1-2\nu)f_2 - 3f_{12} \} p_{z_j} \right] \dots (14)$$

$$\sigma_{z_j} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \{ (1-2\nu)f_3 - 3f_9 \} p_{x_j} + \{ (1-2\nu)f_4 - 3f_{10} \} p_{y_j} - \{ (1-2\nu)f_2 + 3f_8 \} p_{z_j} \right] \dots (15)$$

$$\sigma_{x_j y_j} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\{ (1-2\nu)f_4 + 3f_{17} \} p_{x_j} - \{ (1-2\nu)f_3 + 3f_{16} \} p_{y_j} - 3z_j f_{13} p_{z_j} \right] \dots (16)$$

$$\sigma_{y_j z_j} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -3z_j f_{13} p_{x_j} - \{ (1-2\nu)f_2 + 3f_{12} \} p_{y_j} - \{ (1-2\nu)f_4 + 3f_{10} \} p_{z_j} \right] \dots (17)$$

$$\sigma_{z_j x_j} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -\{ (1-2\nu)f_2 + 3f_{11} \} p_{x_j} - 3z_j f_{13} p_{y_j} - \{ (1-2\nu)f_3 + 3f_9 \} p_{z_j} \right] \dots (18)$$

$$r_j = \sqrt{(\xi - x_j)^2 + (\eta - y_j)^2 + z_j^2}$$

影響係数  $f_1 \sim f_{17}$  という解析積分を求めるため、図3のような  $j$  要素局所座標系を構築する。三角形面要素の各頂点の番号を  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とするとき、それらの座標は局所座標系 ( $\xi, \eta$ ) において  $P_1(x_1, y_1, 0), P_2(x_2, y_2, 0), P_3(x_3, y_3, 0)$  としている。ただし、計算アルゴリズムにおいて  $P_4$  を用いるものとし、 $P_4(x_4, y_4, 0) = P_1(x_1, y_1, 0)$  とする。境界面はすべて三角形面要素に分割されることを前提として、積分領域を  $\Delta$  とし、 $\Delta$  の周りを反時計周りに回る閉曲線を  $C$  とする。式(19)で表される Stokes の定理 (Green の定理といってもよい) によって、影響係数  $f_1 \sim f_{17}$  の解析積分結果を式(20)~(36)に示す。

$$\iint_{\Delta} \left( -\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \oint_C f(\xi, \eta) d\xi, \quad \iint_{\Delta} \frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi d\eta = \oint_C g(\xi, \eta) d\eta \dots (19)$$

$$f_1 = \iint_D \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} = \oint_C \log |(\xi-x) + \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}| d\eta = \sum_{i=1}^3 I_i \dots\dots\dots (20)$$

$$I_i = \frac{M_i}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|, (z=0)$$

$$I_i = \frac{M_i}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right| + 2 \operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i) |z| \left\{ \tan^{-1} \left[ \frac{|P_i P_{i+1}|}{|y_{i+1} - y_i| |z|} \left\{ \left( 1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{|P_i P_{i+1}|} \right) r_{i+1} + (x_{i+1} - x) + B_i \right\} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{|P_i P_{i+1}|}{|y_{i+1} - y_i| |z|} \left\{ \left( 1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{|P_i P_{i+1}|} \right) r_i + (x_i - x) + A_i \right\} \right] \right\}, (z \neq 0)$$

$$f_2 = \iint_D \frac{z d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \oint_C \frac{z(\xi-x)}{[(\eta-y)^2 + z^2] \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} d\eta = z \sum_{i=1}^3 I_i \dots\dots\dots (21)$$

$$I_i = \frac{1}{|z|} \left\{ \tan^{-1} \left[ \frac{(y_{i+1} - y) M_i - (x_{i+1} - x) z^2}{(y_{i+1} - y_i) r_{i+1} |z|} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{(y_i - y) M_i - (x_{i+1} - x) z^2}{(y_{i+1} - y_i) r_i |z|} \right] \right\}$$

$$f_3 = \iint_D \frac{(x-\xi) d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = - \oint_C \frac{d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} = - \sum_{i=1}^3 I_i \dots (22)$$

$$I_i = - \frac{(y_{i+1} - y_i)}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|$$

$$f_4 = \iint_D \frac{(y-\eta) d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = - \oint_C \frac{1}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} d\xi = - \sum_{i=1}^3 I_i \dots (23)$$

$$I_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{|P_i P_{i+1}|} \left[ \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right| \right]$$

$$f_5 = \iint_D \frac{(x-\xi)^2 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \oint_C \left[ - \frac{(\xi-x)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} + \log |(\xi-x) + \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}| \right] d\eta = \sum_{i=1}^3 I_i \dots\dots\dots (24)$$

$$I_i = - \frac{(y_{i+1} - y_i)^2 M_i}{|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right| - \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{|P_i P_{i+1}|^2} (r_{i+1} - r_i) + \frac{M_i}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|, (z=0)$$

$$I_i = \frac{M_i}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right| + 2 \operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i) |z| \left\{ \tan^{-1} \left[ \frac{|P_i P_{i+1}|}{|y_{i+1} - y_i| |z|} \left\{ \left( 1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{|P_i P_{i+1}|} \right) r_{i+1} + (x_{i+1} - x) + B_i \right\} \right] \right\}$$

$$- \tan^{-1} \left[ \frac{|P_i P_{i+1}|}{|y_{i+1} - y_i| |z|} \left\{ \left( 1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{|P_i P_{i+1}|} \right) r_i + (x_i - x) + A_i \right\} \right] \right\} - \frac{(y_{i+1} - y_i)^2 M_i}{|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right| - \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{|P_i P_{i+1}|^2} (r_{i+1} - r_i), (z \neq 0)$$

$$f_6 = \iint_D \frac{(y-\eta)^2 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \oint_C \left[ \frac{(\eta-y)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} - \log |(\eta-y) + \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}| \right] d\xi = \sum_{i=1}^3 I_i \dots\dots\dots (25)$$

$$I_i = - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 M_i}{|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{|P_i P_{i+1}|^2} (r_{i+1} - r_i)$$

$$+ \frac{M_i}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|, (z=0)$$

$$I_i = - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 M_i}{|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{|P_i P_{i+1}|^2} (r_{i+1} - r_i)$$

$$+ \frac{M_i}{|P_i P_{i+1}|} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right| - 2 |z| \operatorname{sgn}(x_{i+1} - x_i) \left\{ \tan^{-1} \left[ \frac{|P_i P_{i+1}|}{|x_{i+1} - x_i| |z|} \left\{ \left( 1 + \frac{y_{i+1} - y_i}{|P_i P_{i+1}|} \right) r_{i+1} + B_i + (y_{i+1} - y) \right\} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{|P_i P_{i+1}|}{|x_{i+1} - x_i| |z|} \left\{ \left( 1 + \frac{y_{i+1} - y_i}{|P_i P_{i+1}|} \right) r_i + A_i + (y_i - y) \right\} \right] \right\}, (z \neq 0)$$

$$f_7 = \iint_D \frac{(x-\xi)(y-\eta) d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \oint_C \left[ - \frac{(\eta-y)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} \right] d\eta = \sum_{i=1}^3 I_i \dots (26)$$

$$I_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) M_i}{|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i + r_{i+1}}{A_i + r_i} \right|$$

$$- \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{|P_i P_{i+1}|^2} (r_{i+1} - r_i)$$

$$f_8 = \iint_D \frac{z^3 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = f_2 + \frac{1}{3} \oint_C \frac{z(\eta-y)^3 d\xi}{[(\xi-x)^2 + z^2][(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{3} \oint_C \frac{z(\xi-x)^3 d\eta}{[(\eta-y)^2 + z^2][(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = f_2 + z^3 \sum_{i=1}^3 I_i \dots\dots\dots (27)$$

$$I_i = - \frac{1}{z^2} \frac{(y_{i+1} - y_i)^3}{3(x_{i+1} - x_i) |P_i P_{i+1}|^2} \left[ \operatorname{sgn}(B_i) \frac{1}{B_i} \right]$$

$$-\operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i}] + \frac{1}{z^2} \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3(y_{i+1}-y_i)|P_i P_{i+1}|^2} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\frac{1}{B_i} - \operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i} \right], \quad (z=0 \text{ かつ } M_i=0)$$

$$I_i = \frac{1}{3z^2} \frac{M_i|P_i P_{i+1}|}{(M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2)} \left( \frac{B_i}{r_{i+1}} - \frac{A_i}{r_i} \right) + \frac{2}{3|z|^3} \left\{ \tan^{-1} \frac{(y_{i+1}-y)M_i - (x_{i+1}-x_i)z^2}{(y_{i+1}-y_i)r_{i+1}|z|} \right\} - \frac{2}{3|z|^3} \left\{ \tan^{-1} \frac{(y_i-y)M_i - (x_{i+1}-x_i)z^2}{(y_{i+1}-y_i)r_i|z|} \right\} - \frac{1}{3|z|^3} \left\{ \tan^{-1} \frac{(x_{i+1}-x)M_i + (y_{i+1}-y_i)z^2}{(x_{i+1}-x_i)r_{i+1}|z|} \right\} + \frac{1}{3|z|^3} \left\{ \tan^{-1} \frac{(x_i-x)M_i + (y_{i+1}-y_i)z^2}{(x_{i+1}-x_i)r_i|z|} \right\}, \quad (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)$$

$$f_9 = \iint_D \frac{z^2(x-\xi)d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3} \oint_C \frac{z^2 d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = -z^2 \sum_{i=1}^3 I_i \dots (28)$$

$$I_i = \frac{(y_{i+1}-y_i)}{6|P_i P_{i+1}|} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\frac{1}{B_i^2} - \operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i^2} \right], \quad (z=0 \text{ かつ } M_i=0)$$

$$I_i = -\frac{(y_{i+1}-y_i)|P_i P_{i+1}|}{3[M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2]} \left( \frac{B_i}{r_{i+1}} - \frac{A_i}{r_i} \right), \quad (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)$$

$$f_{10} = \iint_D \frac{z^2(y-\eta)d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3} \oint_C \frac{z^2 d\xi}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = -z^2 \sum_{i=1}^3 I_i \dots (29)$$

$$I_i = -\frac{(x_{i+1}-x_i)}{6|P_i P_{i+1}|} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\frac{1}{B_i^2} - \operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i^2} \right], \quad (z=0 \text{ かつ } M_i=0)$$

$$I_i = \frac{(x_{i+1}-x_i)|P_i P_{i+1}|}{3[M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2]} \left( \frac{B_i}{r_{i+1}} - \frac{A_i}{r_i} \right), \quad (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)$$

$$f_{11} = \iint_D \frac{z(x-\xi)^2 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = \oint_C \frac{z(\xi-x)^3 d\eta}{3[(\eta-y)^2 + z^2][(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = z \sum_{i=1}^3 I_i \dots (30)$$

$$I_i = -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3(y_{i+1}-y_i)|P_i P_{i+1}|^2} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\frac{1}{B_i} - \operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i} \right], \quad (z=0 \text{ かつ } M_i=0)$$

$$I_i = \frac{1}{3|z|} \left\{ \tan^{-1} \frac{(y_{i+1}-y)M_i - (x_{i+1}-x_i)z^2}{(y_{i+1}-y_i)r_{i+1}|z|} \right\} - \frac{1}{3|z|} \left\{ \tan^{-1} \frac{(y_i-y)M_i - (x_{i+1}-x_i)z^2}{(y_{i+1}-y_i)r_i|z|} \right\}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{[-(y_{i+1}-y)M_i + (x_{i+1}-x_i)z^2](y_{i+1}-y_i)}{(M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2)r_{i+1}} - \frac{1}{3} \frac{[-(y_i-y)M_i + (x_{i+1}-x_i)z^2](y_{i+1}-y_i)}{(M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2)r_i}, \quad (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)$$

$$f_{12} = \iint_D \frac{z(y-\eta)^2 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3} \oint_C \frac{z(\eta-y)^3}{[(\xi-x)^2 + z^2][(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi = z \sum_{i=1}^3 I_i \dots (31)$$

$$I_i = \frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{3(x_{i+1}-x_i)|P_i P_{i+1}|^2} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\frac{1}{B_i} - \operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i} \right], \quad (z=0 \text{ かつ } M_i=0)$$

$$I_i = \frac{1}{3|z|} \left\{ \tan^{-1} \frac{(x_{i+1}-x)M_i + (y_{i+1}-y_i)z^2}{(x_{i+1}-x_i)r_{i+1}|z|} \right\} - \frac{1}{3|z|} \left\{ \tan^{-1} \frac{(x_i-x)M_i + (y_{i+1}-y_i)z^2}{(x_{i+1}-x_i)r_i|z|} \right\} - \frac{1}{3} \frac{[(x_{i+1}-x)M_i + (y_{i+1}-y_i)z^2](x_{i+1}-x_i)}{(M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2)r_{i+1}} + \frac{1}{3} \frac{[(x_i-x)M_i + (y_{i+1}-y_i)z^2](x_{i+1}-x_i)}{(M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2)r_i}, \quad (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)$$

$$f_{13} = \iint_D \frac{(x-\xi)(y-\eta)d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3} \oint_C \frac{(\eta-y)d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \sum_{i=1}^3 I_i \dots (32)$$

$$I_i = \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{3|P_i P_{i+1}|^2} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\frac{1}{B_i} - \operatorname{sgn}(A_i)\frac{1}{A_i} \right], \quad (z=0 \text{ かつ } M_i=0)$$

$$I_i = \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{3|P_i P_{i+1}|^2} \left( \frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right) + \frac{M_i(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}-y_i)}{3|P_i P_{i+1}|[M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2]} \left( \frac{B_i}{r_{i+1}} - \frac{A_i}{r_i} \right), \quad (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)$$

$$f_{14} = \iint_D \frac{(x-\xi)^3 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = f_3 - f_{16} - f_9 \dots (33)$$

$$f_{15} = \iint_D \frac{(y-\eta)^3 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = f_4 - f_{17} - f_{10} \dots (34)$$

$$f_{16} = \iint_D \frac{(x-\xi)(y-\eta)^2 d\xi d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3} \oint_C \frac{(\eta-y)^2 d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = -\sum_{i=1}^3 I_i \dots (35)$$

$$I_i = -\frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{3|P_i P_{i+1}|^3} \left[ \operatorname{sgn}(B_i)\log|B_i| - \operatorname{sgn}(A_i)\log|A_i| \right],$$

$$\begin{aligned}
 (z=0 \text{ かつ } M_i=0) \\
 I_i = & -\frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{3|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i+r_{i+1}}{A_i+r_i} \right| \\
 & -\frac{2M_i(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}-y_i)^2}{3|P_i P_{i+1}|^4} \left( \frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right) \\
 & -\frac{(y_{i+1}-y_i)}{3|P_i P_{i+1}|^3 [M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2]} \left( \frac{B_i}{r_{i+1}} - \frac{A_i}{r_i} \right) \\
 & [M_i^2(x_{i+1}-x_i)^2 - M_i^2(y_{i+1}-y_i)^2 \\
 & -z^2(y_{i+1}-y_i)^2 |P_i P_{i+1}|^2], (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{17} = & \iint_D \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)d\xi d\eta}{4[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{\frac{5}{2}}} \\
 = & -\frac{1}{3} \oint_C \frac{(\xi-x)^2 d\xi}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} = -\sum_{i=1}^3 I_i \dots (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_i = & \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3|P_i P_{i+1}|^3} [\operatorname{sgn}(B_i) \log|B_i| - \operatorname{sgn}(A_i) \log|A_i|], \\
 (z=0 \text{ かつ } M_i=0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_i = & \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3|P_i P_{i+1}|^3} \log \left| \frac{B_i+r_{i+1}}{A_i+r_i} \right| \\
 & -\frac{2M_i(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}-y_i)^2}{3|P_i P_{i+1}|^4} \left( \frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right) \\
 & +\frac{(x_{i+1}-x_i)}{3|P_i P_{i+1}|^3 [M_i^2+z^2|P_i P_{i+1}|^2]} \left( \frac{B_i}{r_{i+1}} - \frac{A_i}{r_i} \right) \\
 & [M_i^2(y_{i+1}-y_i)^2 - M_i^2(x_{i+1}-x_i)^2 \\
 & -z^2(x_{i+1}-x_i)^2 |P_i P_{i+1}|^2], (z \neq 0 \text{ または } M_i \neq 0)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 |P_i P_{i+1}| &= \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2} \\
 M_i &= (x_i-x)(y_{i+1}-y) - (x_{i+1}-x)(y_i-y) \\
 A_i &= \frac{(x_i-x)(x_{i+1}-x_i) + (y_i-y)(y_{i+1}-y_i)}{|P_i P_{i+1}|} \\
 B_i &= \frac{(x_{i+1}-x)(x_{i+1}-x_i) + (y_{i+1}-y)(y_{i+1}-y_i)}{|P_i P_{i+1}|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_i &= \sqrt{(x_i-x)^2 + (y_i-y)^2} \\
 r_{i+1} &= \sqrt{(x_{i+1}-x)^2 + (y_{i+1}-y)^2}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{sgn}(s) \begin{cases} 1 & (s \geq 0) \\ -1 & (s < 0) \end{cases}$$

ただし,

$z=0$  かつ  $x_i=x_{i+1}=x$ ,  $(y_{i+1}-y_i)(y_{i+1}-y) < 0$ ,  $(y_{i+1}-y_i)(y_i-y) < 0$  が同時に成立するとき

$$\log \left| \frac{B_i+r_{i+1}}{A_i+r_i} \right| = \log \left| \frac{y_i-y}{y_{i+1}-y} \right|$$

$z=0$  かつ  $B_i+r_{i+1}=A_i+r_i=0$  のとき

$$\log \left| \frac{B_i+r_{i+1}}{A_i+r_i} \right| = \log \left| \frac{(x_{i+1}-x)^2 r_i^3}{(x_i-x)^2 r_{i+1}^3} \right|$$

上記の解析積分の妥当性を確かめるため、解析積分を利用して求めた値と著者らが工夫を加えた精度の高い Gauss 数値積分法<sup>4)</sup>によって求めた値とを比較する。観測点の配置に当たっては、とくに、自分自身(特異点)と先に述べた特殊な観測点を考慮に

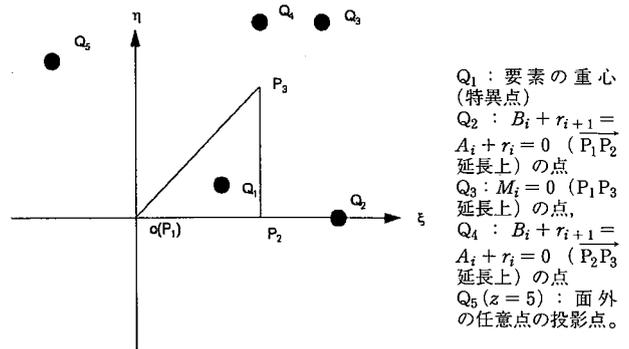


図4 観測点  $Q_k(x, y, z) (k=1 \sim 5)$  の配置

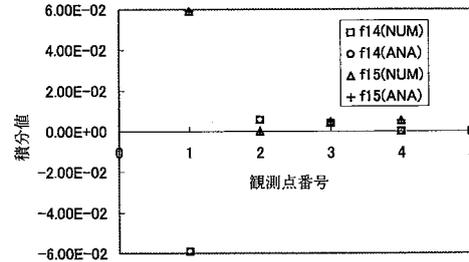


図5 特殊な観測点などの  $f_{14}$ ,  $f_{15}$  の数値積分値と解析積分値の比較

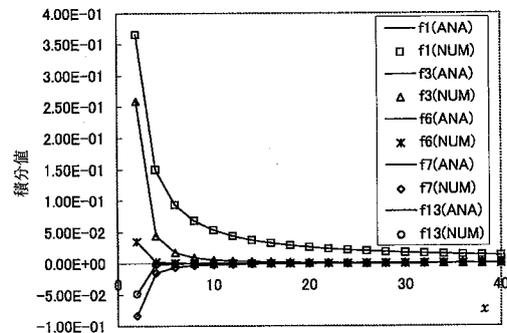


図6  $f_m(x, 0, 0) (m=1, 3, 6, 7, 13)$  の数値積分値と解析積分値の比較

入れた。具体的には、直角三角形面要素を用い、特殊な観測点 ( $z=0$ ) および面外の任意点 ( $z=5$ ) を図4に示すように配置した。例として、影響係数  $f_{14}$ ,  $f_{15}$  の解析積分値と Gauss 数値積分値とを図5に示す。また図6に影響係数  $f(x, 0, 0)$  の数値積分値と解析積分値の  $x$  による変化の比較を  $f_1, f_3, f_6, f_7$  および  $f_{13}$  について示す。

図5および図6に代表される数多くの数値積分値と解析積分値の比較から、特異点の積分と特殊な観測点の積分が容易かつ正確に計算できることがわかった。

### 3. 計算速度について

計算速度については精度を一定と設定すると細分割した三角形上での Gauss の数値積分法<sup>4)</sup>を用いて  $r \rightarrow 0$  の場合、 $f_1 \sim f_{17}$  のような  $\iint_D \frac{g(x, y, z)}{r^n} dx dy (\eta > 0)$  の積分に対して時間がかなり

かかる。たとえば、 $\iint_D \frac{1}{r} dx dy$  ( $f_1$  式),  $\Delta$  の頂点が  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(1, 0, 0)$ ,  $P_3(1, 1, 0)$  であり、観測点が  $x=2/3, y=1/3, z$  である場合に前後2回の数値積分の差の絶対値  $|f_1^{(i+1)} - f_1^{(i)}|$

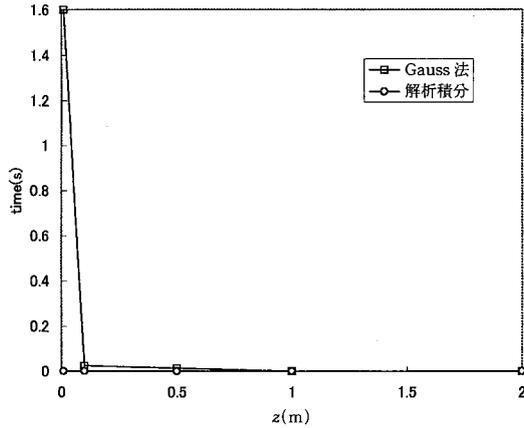


図7  $f_1$  式の数値積分と解析積分 ( $\epsilon = 10^{-4}$ ) に要する時間の比較

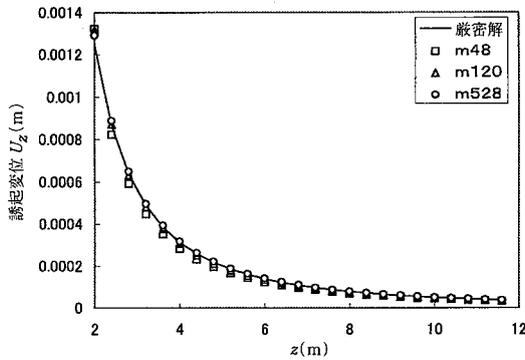


図8 z 軸上の各点における誘起変位  $U_z$

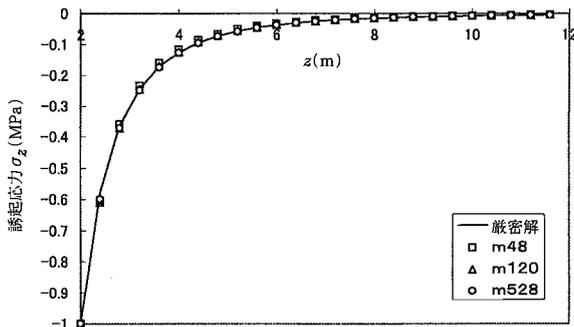


図9 z 軸上の各点における誘起応力  $\sigma_z$

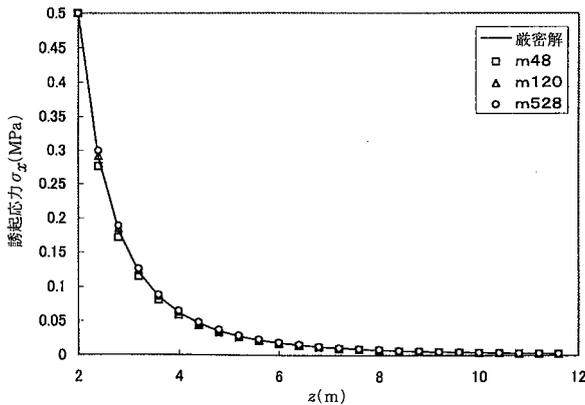


図10 z 軸上の各点における誘起応力  $\sigma_x$

が設定値  $\epsilon$  より小さくなるまでの時間を比較することにしよう。Gauss の数値積分 ( $\epsilon = 10^{-4}$ ) と解析積分とによる計算時間 (コンピュータは GATEWAY 2000 の INTEL 200 MHZ PENTIUM PRO を使用) は観測点の位置 ( $z$ ) を種々変えて比較すると図 7 に示す通りである。 $z = 0.0001$  の場合, Gauss の数値積分の計算時間は 1,610 s で, 解析積分の計算時間は  $5.5 \times 10^{-4}$  s である。解析積分の計算時間は全域で同じであるのに対して, Gauss の数値積分法の計算時間は  $r$  と  $\epsilon$  によって違って,  $r \rightarrow 0$  に近づくほど,  $\epsilon$  を小さくするほど時間がかかる。仮想応力法においては各要素の重心は観測点として計算しなければならないので, Gauss の数値積分法の計算時間は解析積分法のそれよりはるかに多くかかるはずである。

#### 4. 仮想応力法による実際問題への適用

以上解析積分を用いる 3 次元仮想応力法の精度を検証するため, 内圧  $p_0 = 1 \text{ MPa}$ , 半径  $R = 2.0 \text{ m}$  の球かを有する無限体内の応力と変位の解析 (48 要素, 120 要素と 528 要素) を行った。そして, Lamé' の解<sup>5)</sup>による厳密解と比較した結果を図 8, 図 9, 図 10 に示す。

厳密解は次に表す。

$$U_r = \frac{(1+\nu)p_0R^3}{2Er^2}$$

$$\sigma_r = \frac{p_0R^3}{r^3}$$

$$\sigma_T = \frac{p_0R^3}{2r^3}$$

ただし, 数値解析においては, ポアソン比  $\nu = 0.25$ , ヤング率  $E = 1,000 \text{ MPa}$  とした。

図 8, 図 9 と図 10 から誘起応力と誘起変位の計算結果は非常に精度が高いことがわかった。また, 当然のことながら, 要素数を多くすることによって, さらに精度を高めることができる。

#### 5. 結 言

Kelvin 解による 3 次元境界要素法 (仮想応力法) における影響係数の解析積分を実行し, これから得られる積分値と数値積分から得られた解とを比較した。次に, 解析積分に基づいた解析コードを作成した。また, 具体的な解析モデルを設定して, この解析コードを用いて数値解析を行い, 得られた結果を厳密解と比較した。それより, 次のことがわかった。

1. 著者が特に工夫を加えた精度の高い数値積分の結果と比較した結果から, 解析積分は十分に正確であることがわかった。
2. それらの解析積分を利用すると, 特異点や特殊点を観測点とする場合でも容易に積分できるようになった。
3. 解析積分は Gauss 数値積分法による数値解析と比較して計算速度は速く, 実用例に応用した結果から, 精度も高いことがわかった。

#### 引 用 文 献

- 1) Kuriyama, K., Mizuta, Y., Mosumi, H. and Watanabe, T. : Technical Note, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 32, No. 1, p. 77-83, (1995)
- 2) 水田義明: 演習 岩盤開発設計, p. 203-344, (1996), アイビーシー
- 3) Kellogg, O. D. : Foundations of Potential Theory. Springer, Berlin (1929)
- 4) 劉承論・栗山 憲・水田義明: 資源と素材, Vol. 114, p. 226-227, (1998)
- 5) S. P. ティモシユンコ・J. N. グーディア著; 荒川宗夫・坂口 界・森 哲郎共訳: 弾性論, p. 406-409, (1976), コロナ社