



フラクチャーを有する媒体内の境界要素法による 三次元熱伝導の解析*

劉 承 論¹ 栗 山 憲² 水 田 義 明³

Predictive Calculation of Three-dimensional Heat Conduction in Medium Including Fracture Boundary

by Chenglun LIU¹, Ken KURIYAMA¹ and Yoshiaki MIZUTA¹

1. Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube 755-8611

Previously, the authors have developed a Three-dimensional numerical code by direct boundary element method for non-steady heat conduction. In order to confirm validity of the calculation system, at that time, they carried out both numerical calculation and analytical calculation for the model of infinite medium around a spherical cavity and compared numerical solution with strict solution. It was found from the comparison that precise solution can be given by using their numerical code. However, in the practical problems, thin fracture must be modeled in case as that artificial fracture produced by hydraulic fracturing is taken in. In addition to that, the detail of the procedure to calculate the influence coefficients related with the elements which consist of the fracture boundary should be explained.

Therefore, in this paper, the authors describe the concrete procedure on calculation of the influence coefficients first and they carried out numerical calculations in which fracture boundary is taken next. As the numerical model, however, they dealt with non-steady heat conduction in infinite medium around a penny-shaped fracture in order to simplify the problem and to make explanation of the calculated result easier, because no strict solution can be given for any problem including fracture boundary. Furthermore, the time integral method was used as the calculation method and linear distributions of initial rock temperature was assumed in modeling. In such modeling, no volumetric integration is needed if the time integral method is adopted and, one can deal with the model where initial temperature distribution varies linearly as same as the model where it is constant.

KEY WORDS : Heat Conduction, Boundary Element Method, Fracture

1. 緒 言

著者らは先に3次元非定常熱伝導解析のための境界要素法を用いた直接法解析コードを開発した¹⁾。また、解析システムに間違いないことを確かめるために、球かを有する無限媒体をモデルとして、実際にこの解析コードを用いて数値解析を行うとともに球かを有する無限媒体に対する非定常熱伝導の厳密解を求め、数値解と厳密解とを比較した。その結果は著者らが開発した数値解析システムによれば、精度の高い解が得られることがわかった。しかし、実際問題への適用に当たっては、水圧破砕によって造成された人工き裂を取り扱う場合など、厚みのないフラクチャーをモデル化する必要がある。また、前報では境界面を構成する要素に対する影響係数を求める手順については詳述しなかった。

そこで、本報では、まずフラクチャー境界を構成する要素に対する影響係数を求める手順について詳しく述べ、つぎに、フラク

チャーを取り扱う問題に対して数値解析を行った。ただし、フラクチャー問題を簡単にし、かつ解析結果の解釈を容易にするために、円盤状フラクチャーを有する無限媒体を対象とした。また解析手法としてはTIME INTEGRAL法²⁾を用い、モデル化においては初期温度分布を線形とした。このようなモデルに対してTIME INTEGRAL法を用いれば体積積分は必要がないこと、初期温度分布が線形に変化する場合でも、これを一定とする場合と同様に扱えることなどがわかった。

2. 離散化方程式における影響係数の解析

均質で等方的な特性を持つ物体内の3次元非定常熱伝導方程式は式(1)で表される³⁾。

$$K\Delta u(p, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) + h(p, \tau) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

u は温度、 K は熱拡散率、 h は $h = \dot{Q}/(\rho c)$ を意味しており、 \dot{Q} は単位体積、単位時間当たりの熱源の発熱量、 ρ は媒体の密度、 c は媒体の比熱であり、 p は領域 Ω 内の点である。この方程式のTIME INTEGRAL法による離散化は式(2)、式(3)のように表現することができる。ただし、 Ω の境界 Γ を n_b 個の三角形要素 I_j 、時間 $[t_0, t]$ を n 個の時間要素 $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ 、 Ω を n_v 個の四面体要素 Ω_j に分割し、すべて一定要素 (u, q, h) が要素内で

* 1998年9月10日受付 11月18日受理 資源・素材学会平成10年度春季大会にて一部発表(1998年4月1日)

1. 山口大学大学院理工学研究科博士後期課程設計工学専攻

2. 理博 山口大学教授 工学部感性デザイン工学科

3. 正会員 工博 山口大学教授 工学部社会建設工学科

[著者連絡先] FAX 0836-34-6674 (山口大・社会建設)

キーワード: 熱伝導, 境界要素法, フラクチャー

一様分布)とした。

$$\begin{aligned}
 & c(s_i)u(s_i, \tau_k) \\
 &= K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} q(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &- K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} u(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} q^*(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &+ \sum_{l=1}^{n_v} u(p_l, \tau_0) \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_k; p', \tau_0) dp' \\
 &+ \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{n_v} h(p_l, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_k; p', \tau) dp' d\tau \\
 &\quad (i = 1 \sim n_b; k = 1 \sim n) \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u(p, \tau_k) \\
 &= K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} q(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(p, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &- K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} u(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} q^*(p, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &+ \sum_{l=1}^{n_v} u(p_l, \tau_0) \int_{\Omega_l} G(p, \tau_k; p', \tau_0) dp' \\
 &+ \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{n_v} h(p_l, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Omega_l} G(p, \tau_k; p', \tau) dp' d\tau \\
 &\quad (k = 1 \sim n) \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

ここで、 G は熱伝導方程式の基本解であり、式(4)で与えられる⁴⁾。

$$G(p, t; p', \tau) = \left\{ \frac{1}{4K\pi(t-\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{|p-p'|^2}{4K(t-\tau)} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また、 $\tau_0 = t_0$ は初期時刻、 s_i は三角形要素 Γ_i 上の点で Γ_i の重心としており、 s' は三角形要素 Γ_j 上の点、 p_l は四面体要素 Ω_l 内の点で Ω_l の重心としている。 q と q^* は次式で与えられるものを示す。 $q = \partial u / \partial n$ 、 $q^* = \partial G / \partial n$ ここに \mathbf{n} は Ω の境界上での外向き法線である。 $c(s)$ は境界上の点 s における幾何形状に依存する定数で、境界が点 s でなめらかなとき $1/2$ である。

熱源がない場合、すなわち、 $h = 0$ のとき式(2)、式(3)を書きかえると式(5)、式(6)となる。

$$\frac{1}{2} u_k^i = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} A_{km}^{ij} q_m^j - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} B_{km}^{ij} u_m^j + \sum_{l=1}^{n_v} C_{k0}^{il} u_0^l \dots\dots\dots (5)$$

$$u_k^p = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} A'_{km}^{ij} q_m^j - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} B'_{km}^{ij} u_m^j + \sum_{l=1}^{n_v} C'_{k0}^{il} u_0^l \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 q_m^j &= q(s_j, \tau_m) \\
 u_m^j &= u(s_j, \tau_m) \\
 u_0^l &= u(p_l, \tau_0)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

である。

式(5)において未知数は q_m^j で、これを解いて式(6)に代入することにより、 Ω 内の点における温度 u_k^p を求めることができる。

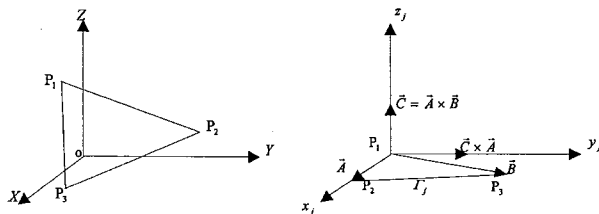


図1 全体座標系における要素座標系の決め方

さて、上式中の影響係数 A_{km}^{ij} 、 B_{km}^{ij} および C_{k0}^{il} を求めよう。積分を行うためにまず事前処理しておく。三角形境界要素から定まる局所座標系を構築して座標変換を行う。全体座標系と局所座標系との関係は図1のようであるとする。各影響係数は次のように表すことができる。ただし、式(8)、(9)、(10)における座標系は局所座標系である。

$$\begin{aligned}
 A_{km}^{ij} &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} \left\{ \frac{1}{4K\pi(t_k-\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{|s_i-s'|^2}{4K(t_k-\tau)} \right\} ds' d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_a}^{t_b} \int_{\Gamma_j} \exp \left\{ -T^2 |s_i-s'|^2 \right\} ds' dT \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{km}^{ij} &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} q^*(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} G(s_i, t_k; s', \tau) ds' d\tau \\
 &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{4K\pi(t_k-\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{|s_i-s'|^2}{4K(t_k-\tau)} \right\} ds' d\tau \\
 &= K \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_a}^{t_b} \int_{\Gamma_j} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \exp \left[-T^2 \sum_{i=1}^3 (x_i-x'_i)^2 \right] n_i \right\} ds' dT \\
 &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_a}^{t_b} \int_{\Gamma_j} T^2 \exp \left\{ -T^2 \sum_{i=1}^3 (x_i-x'_i)^2 \right\} \sum_{i=1}^3 (x_i-x'_i) n_i ds' dT \\
 &= \frac{z}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_a}^{t_b} \int_{\Gamma_j} T^2 \exp \left\{ -T^2 |s_i-s'|^2 \right\} ds' dT \dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{k0}^{il} &= \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_k; p', \tau_0) dp' \\
 &= \left\{ \frac{1}{4K\pi(t_k-t_0)} \right\}^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega_l} \exp \left\{ -T^2 |s_i-p'|^2 \right\} dp' \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 T &= \frac{1}{\sqrt{4K(t_k-\tau)}} \\
 t_a &= \frac{1}{2\sqrt{K(t_k-\tau_{m-1})}} \\
 t_b &= \frac{1}{2\sqrt{K(t_k-\tau_m)}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

n_i は Ω の境界上の点 s' における外向きの単位法線ベクトル \mathbf{n} の局所座標系での第 i 成分である。したがって、局所座標系で $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ であるから、 $n_1 = n_2 = 0$ 、 $n_3 = 1$ である。 z は Γ_j の局所座標系による三角形要素 Γ_j の重心の z 座標である。 x_i 、 x'_i は点 s_i 、 s' に対応する第 i 座標である。

式(8)、(9)の中の Γ_j 上の面積分を次式で表せば

$$f(T) = \int_{\Gamma_j} \exp \left\{ -T^2 (s_i-s')^2 \right\} ds' \dots\dots\dots (12)$$

式(8)、(9)は次のように書き直すことができる。

$$A_{km}^{ij} = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_a}^{t_b} f(T) dT \dots\dots\dots (13)$$

$$B_{km}^{ij} = \frac{z}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_a}^{t_b} T^2 f(T) dT \dots\dots\dots (14)$$

式(12)の面積分に関しては著者らは文献1)で詳しく述べた。そこで、以下は台形則を用いて式(13)、(14)の T に関する積分について述べる。ここで、積分範囲は2種類存在し、一種は $[t_a, t_b]$ (有限区間)、もう一種は $t_k = \tau_m$ の場合で $t_b = \infty$ となり、 $[t_a, \infty]$ (無限区間) である。

有限区間上の積分の繰り返しで計算する式および収束条件は以

下のようになる。

$$I_N = h_N \left\{ \frac{1}{2} f(t_a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_a + h_N i) + \frac{1}{2} f(t_b) \right\} \dots (15)$$

$$I_{2^d N} = \frac{1}{2} I_{2^{d-1} N} + h_{2^d N} \sum_{i=1}^{2^{d-1} N} f(t_a + h_{2^d N} (2i-1)), \quad (d \geq 1) \dots (16)$$

$$|I_{2^d N} - I_{2^{d-1} N}| \leq \epsilon \dots (17)$$

$$h_{2^d N} = \frac{t_b - t_a}{2^d N} \dots (18)$$

ここに、 N は積分範囲 $[t_a, t_b]$ に対する初期の等分割数である。 d は分割を行った回数 (1 ~ M)、 $h_{2^d N}$ は d 回目の分割幅、 M は収束までの回数である。また、 I_N は初期分割の積分値であり、 $I_{2^d N}$ は d 回目の分割の積分値である。

無限区間上の積分の繰り返して計算する式および収束条件は次のように表現できる。

初期の指定された分割幅を h とし、 I_h を

$$I_h = h \left[\frac{1}{2} f(t_a) + \sum_{i=1}^{\infty} f(t_a + hi) \right] \dots (19)$$

とおく。

式(13)と式(14)の被積分関数 $f(T)$ と $T^2 f(T)$ は $T \rightarrow \infty$ (または $\lim_{i \rightarrow \infty} f(t_a + hi) = 0$) のとき 0 に収束することおよび被積分関数の特徴に注意して、 $|f(t_a + hN)| \leq \epsilon_1$ となる N を定めれば、それから、式(15)、(16)、(17)を利用して、近似的に計算することができる。

3. 円盤状のフラクチャーを有するモデルの数値解析

図2のように、 xy -平面上の原点を中心とし、半径 R 、厚みのない円盤状フラクチャー (数値解析においては初期の厚さを 2×10^{-10} m とした) を考える。領域は Ω この円盤を除いた無限領域である。円盤表面の境界条件は $u = 0$ とする。なお、適当な条件のもとでは式(5)、(6)は体積積分を必要としない形に変形できる。

熱源がなく、図3のように初期温度を $u(x, y, z, \tau_0) = u_0 = T_h - k'z$ とする。 T_h は $z = 0$ のところの温度である。いま、 $u' = u - u_0$ とおくと、支配方程式は式(20)となる。

$$\left[K \Delta - \frac{\partial}{\partial \tau} \right] u' = 0 \dots (20)$$

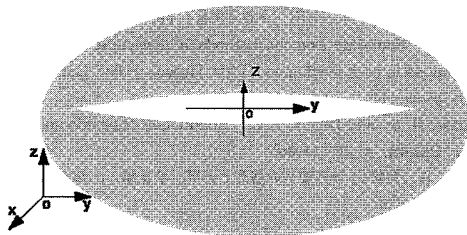


図2 無限領域と円盤状フラクチャー

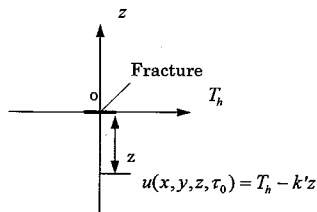


図3 初期温度分布概念図

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} u'(p, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} u_0(p, \tau_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} (T_h - k'z) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) - 0 = \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) \dots (21) \end{aligned}$$

また、 $\Delta u' = \Delta(u - u_0) = \Delta u - \Delta u_0 = \Delta u - 0 = \Delta u$ が成り立つ。したがって

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u' = \frac{\partial}{\partial \tau} u = K \Delta u = K \Delta u' \dots (22)$$

となる。それゆえ、式(20)が成り立つ。

また、 $u'(p, \tau_0) = u(p, \tau_0) - u_0(p, \tau_0) = 0$ となるから、 u' を u の代わりに式(5)、(6)に代入すれば右辺の第三項はゼロになり、式(23)と式(24)で表される。

$$cu_k^i = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} A_{km}^{ij} q_m^j - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} B_{km}^{ij} u_m^j \dots (23)$$

$$u_k^p = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} A_{km}^j q_m^j - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} B_{km}^j u_m^j \dots (24)$$

その境界条件は次式のように表される。

$$\begin{aligned} u'(s, \tau) &= \lim_{p \rightarrow s} u'(p, \tau) = \lim_{p \rightarrow s} \{u(p, \tau) - u_0(p, \tau_0)\} \\ &= u(s, \tau) - \lim_{p \rightarrow s} u_0(p, \tau_0) \dots (25) \end{aligned}$$

3・1 初期温度一定のモデル

円盤状フラクチャーを有する無限媒体内の初期温度 $u(x, y, z, \tau_0)$ が $u_0 = T_0$ (一定)、表面上での境界条件を $u = 0$ とする。

表1 要素分割条件

時間要素 (Kt/R^2)	時間 要素数	境界 要素数	体積 要素数
0.02	50	432	0

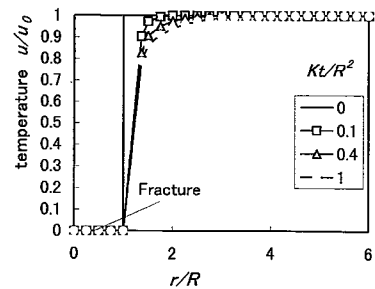


図4 初期温度一様分布 ($u_0/T_0 = 1$) の場合の平面 ($z/R = 0$) における径方向の温度の経時変化 ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

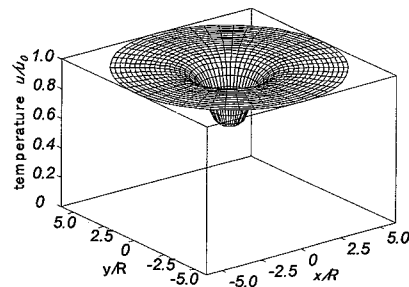


図5 初期温度一様分布 ($u_0/T_0 = 1$) の場合の平面 ($z/R = 0.25$) における時刻 ($Kt/R^2 = 1$) の温度分布

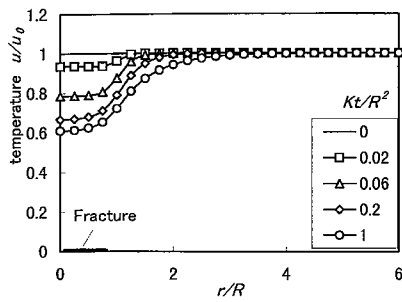


図6 初期温度一様分布 ($u_0/T_0 = 1$) の場合の平面 ($z/R = 0.25$) における径方向の温度の経時変化

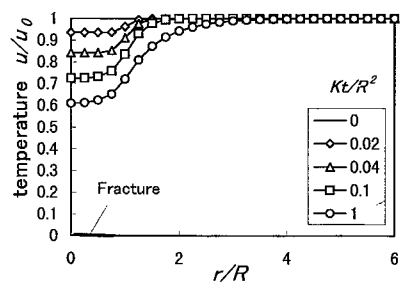


図8 円盤状フラクチャーを有する無限媒体内部の平面 ($z/R = 0.25$) における径方向の温度の経時変化 (数値解析上は初期温度 $u_0 = 100 - 0.032z$ °C, 境界条件 $u_s = 0$ °C, 半径 $R = 2.0$ m, 熱拡散率 $K = 0.004$ m²/s とした。)

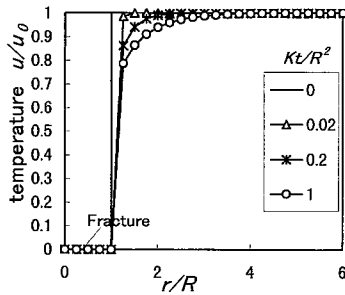


図7 円盤状フラクチャーを有する無限媒体内部の xy -平面における径方向の温度の経時変化 (数値解析上は初期温度 $u_0 = 100 - 0.032z$ °C, 境界条件 $u_s = 0$ °C, 半径 $R = 2.0$ m, 熱拡散率 $K = 0.004$ m²/s とした。)

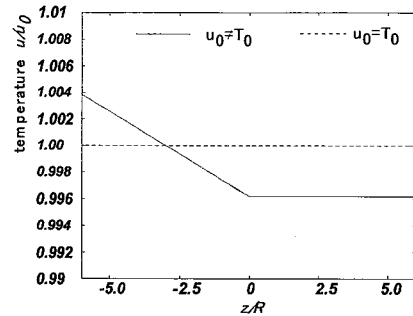


図9 2種類の初期温度 ($u_0/T_0 \neq 1$ と $u_0/T_0 = 1$) に対する平面 ($x/R = 0, y/R = 6$) における z 軸上の時刻 ($Kt/R^2 = 1$) の温度分布

時刻 $t = 0$ からの任意時刻 t_m における無限媒体内部の温度分布を求める。

この場合も式(20)が成立するから体積積分を必要としない TIME INTEGRAL 法が適用できる。

解析の各パラメーターを表1にまとめている。計算の結果の一部を図4~6と図9で表す。

3・2 初期温度 $u(x, y, z, \tau_0) = T_h - k'z$ のモデル

前述のように式(23)と式(24)を使うことができる。解析の境界条件および初期温度以外の各パラメーターは全く同じである。 $T_h = 100$ °C, $k' = 0.032$ °C/m とした, 計算結果の一部を図7, 8と図9で表す。

図9から初期温度分布の異なることが最終の温度分布に影響を及ぼすことがわかった。初期温度 $u_0/T_0 = 1$ の場合, $y/R = 6$ のところの時間 $Kt/R^2 = 1$ 後の温度分布はほぼ初期温度と同じ $u_0/T_0 = 1$ である。だが, 初期温度 $u(x, y, z, \tau_0)/T_0 = (T_h - k'z)/T_0$ の場合, z 軸の全域で比例係数 k' は同じであるにもかかわらず, 同一経過時間 ($Kt/R^2 = 1$) に対して, $z/R > 0$ の部分

の温度勾配は緩やかになり, $z/R < 0$ の部分の温度勾配は急になる。その原因は $z/R = 0$ に近い範囲ではき裂内に強く熱が吸収されるためである。

4. 結 言

(1) 離散化方程式における影響係数の解析式および近似計算式を導いた。

(2) 初期温度 $u(x, y, z, \tau_0) = T_h - k'z$ および $u_0 = T_0$ の場合には TIME INTEGRAL 法では体積積分を必要としない。

引 用 文 献

- 1) 劉承論・栗山 憲・水田義明: 資源と素材, Vol. 114, p. 225-228, (1998)
- 2) Sharp, S.: Boundary element methods in quasistatic thermoelasticity with applications in rock mechanics (PhD Thesis of The University of Minnesota), p. 99-149, (1982)
- 3) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: Conduction of heat in solids, Clarendon Press, Oxford, p. 10, (1986)
- 4) 神谷紀生ら (共訳): 境界要素の基礎と応用, 培風館, p. 200, (1982)