言語ヘッジ葉エントロピーについての一提案

清　水　昭　雄*・三　池　秀　敏**

Proposal of a linguistic hedge leaf entropy as a fuzzy entropy

Akio SHIMIZU* and Hidetoshi MIIKE**

Abstract

Fuzzy entropy introduced by De luca & Termini can be classified into Shannon type entropy. In this paper, as non-Shannon type fuzzy entropy we introduce a "Linguistic hedge leaf entropy", which is a measure of the complexity in linguistic hedge.

1.まえがき

De Luca & Terminiによって提案されたファジィエントロピー(1),(2),(3)は,Shannon関数を用いたファジィ集合(4),(5)全体のあいまいさの程度を測る関数である.De Luca & Terminiはファジィエントロピーを定義するに際して満たすべき4つの条件を与えた(1). また, 従来のShannonエントロピーの類似ではない場合として, Kaufmann, Yager, Klir, Koskoなどの定義がある(6),(7),(3),(8).

ファジィ理論において,言語ヘッジ(4),(5)は重要な概念と認識されている. 本研究では, 言語ヘッジと〝ある種のファジィエントロピー〟とが対応関係にあることを考察したので報告する. また, 言語ヘッジと対応関係にある〝ある種のファジィエントロピー〟は, 従来のファジィエントロピーとは異なり, 言語ヘッジの複雑さを測る量であり, ここでは**言語ヘッジ葉エントロピー**として提案する.

つまり, 第1に従来の研究では, このような言語ヘッジをファジィエントロピーに対応して把握する提案がなかった.第2に,任意のファジィ集合は集中化言語ヘッジ（集合）と言語ヘッジ芽（集合）の2つの限界和に分解されることを示す. このことも, 従来において提案されたことがなく, ファジィエントロピー理論を工学に適用する際の新しい枠組みを提示するものである.

*大学院工学研究科博士課程システム工学専攻
**電気電子工学科

2.ファジィ集合, ファジィエントロピーに関する定義

2.1.準備

本節では以下の議論に必要な諸定義, 諸性質を述べる.

2.1.1 この論文における記号上の約束

(a)総和を意味する記号$\sum_{i=1}^{n}$は, Σ*とする.

(b)Zadehによるファジィ集合表記である〝または〟(or)を表す記号$\sum_{i=1}^{n}$は, Σとする.

ここで, nはある集合X(有限集合とする)の濃度である.

2.1.2 ファジィ集合の定義(3),(4),(5)

ある集合X（有限集合とする）におけるファジィ集合Aとは,つぎのようなメンバーシップ関数μ_Aによって特性づけられた集合である.

$$\mu_A : X \to [0,1] \tag{1}$$

すなわち, 要素$x \in X$に対するメンバーシップ関数$\mu_A(x) \in [0,1]$は, xがファジィ集合に属する度合い

またはグレードを表す．また，ファジィ集合Aの補集合とはA^{C}と記し，次式のように定義される．

$$\mu_{A^C}(x)=1-\mu_A(x),\ \forall x\in X \tag{2}$$

以下において，ファジィ集合の表記はZadehによる表記法[3),(4),(5)]に従う．また，本論文で使用する代数積，限界和，絶対差など諸定義は水本の成書[(4)]に準拠する．

2.1.3 ファジィエントロピーの定義

Shannon関数を用いて，ファジイエントロピーを最初に提案したDe Luca & Termini[(1)]によれば，ファジィ集合Aにおけるファジイエントロピーd(A)は

$$\begin{aligned}d(A)\equiv\ &K[\Sigma^*\{-\mu_A(x_i)\ln\mu_A(x_i)\\&-(1-\mu_A(x_i))\ln(1-\mu_A(x_i))\}]\\&(x_i\in X)\end{aligned} \tag{3}$$

と定義される．

なお，De Luca & Terminiはd(A)を定義するに際して，ファジィエントロピーが満たすべき3条件を与えている[(1)]．

2.1.4 言語ヘッジの定義

言語ヘッジは意味表現しているファジィ集合Aを修飾したファジィ集合h(A)における作用hである．ここで，主な言語ヘッジには以下の集中化作用が知られている[(4),(5)]．まず，本論文では，集中化(concertration)作用の主なものとして，以下のように2乗の効果を持っていると仮定している．すなわち

$$h(A)=CON(A)\equiv A^2 \tag{4}$$

あるいは，

$$\mu_{CON(A)}(x)=\mu_A{}^2(x)\qquad(\forall x\in X) \tag{5}$$

である．

3．言語ヘッジ芽，言語ヘッジ茎，言語ヘッジ葉エントロピーの定義

本節では言語ヘッジ芽，言語ヘッジ茎，言語ヘッジ葉エントロピーの定義と例題を列挙し，ファジィ集合が集中化言語ヘッジ（集合）と言語ヘッジ芽（集合）に分解されることを示す．さらに，言語ヘッジ芽（集合）のスカラー化である言語ヘッジ葉エントロピーを定義し，エントロピーの加法性なる性質をもつことを証明する．

3.1 言語ヘッジ芽の定義

ファジィ集合Aとその補集合A^{C}との代数積[(4)]を**言語ヘッジ芽(Linguistic hedge germ)**と呼び，以下のように定義する．

$$\begin{aligned}GERM(A,X)&\equiv A\cdot A^C\\&\equiv\Sigma(\mu_A(x_i)/x_i)((1-\mu_A(x_i))/x_i)\\&=\Sigma\mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i))/x_i\quad(x_i\in X)\end{aligned} \tag{6}$$

3.2 言語ヘッジ茎の定義

ファジィ集合Aと補集合A^{C}とのメンバーシップ関数の積和を**言語ヘッジ茎(Linguistic hedge stalk)**と呼び，以下のように定義する．

$$\begin{aligned}&STALK(A,X)\\&\equiv\Sigma^*\mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i))\qquad(x_i\in X)\end{aligned} \tag{7}$$

なお，言語ヘッジ茎は言語ヘッジ芽を母体として生成できることから名付けた．

(例.1)

$X=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$とし，ファジィ集合Aを$A=0.2/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.1/x_4+0.5/x_5$とすれば$A^C=0.8/x_1+0.3/x_2+0/x_3+0.9/x_4+0.5/x_5$より

$$\begin{aligned}&GERM(A,X)\\&=0.16/x_1+0.21/x_2+0/x_3+0.09/x_4+0.25/x_5\end{aligned}$$

$$STALK(A,X)=0.16+0.21+0+0.09+0.25=0.71$$

また，STALK(A,X)はDe Luca & Terminiのファジィエントロピーの4条件を満たしていることは容易に確認できる．

3.3．集中化言語ヘッジ

ファジィ集合Aから言語ヘッジ芽GERM(A,X)の絶対差[(4)]を**集中化言語ヘッジ**といい，以下のように定義する．(4)，(5)式での定義と等価であることを以下に示す．

$$\begin{aligned}CON(A)&\equiv|A-GERM(A,X)|=|A-A\cdot A^C|\\&=|A-A|1-A||=|A-|A-A^2||\end{aligned}$$

$A\in A^2$より

$$与式 = | A-(A-A^2) | = A^2 \quad (8)$$

また，メンバーシップ関数では，

$$\Sigma\mu_{CON(A)}(x_i)/x_i$$
$$\equiv \Sigma \,|\, \mu_A(x_i)-\mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i)) \,|\, /x_i$$
$$= \Sigma \,|\, \mu_A(x_i)-\mu_A(x_i)+\mu_A(x_i)^2 \,|\, /x_i$$
$$= \Sigma\mu_A(x_i)^2/x_i \quad (9)$$

となる．このことは，従来の言語ヘッジの定義である(4)，(5)式と等価であることを示している．

3.4．言語ヘッジ葉エントロピー

今後，種々のファジィエントロピーを比較検討する上で，$\mu(x)=1/2(x \in X)$のとき，言語ヘッジ茎の表現可能な関数(すなわち，$C(x) \equiv Kx(1-x)$，Kは正定数)の最大値が1になるように，言語ヘッジ茎を4倍にしたファジィエントロピーを**言語ヘッジ葉エントロピー(Linguistic hedge leaf entropy)**といい，以下のように定義する．

$$LEAF(A) \equiv 4\Sigma^*(STALK(A,X))$$
$$= 4\Sigma^*\mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i)) \quad (x_i \in X) \quad (10)$$

上式はDe Luca ＆ Terminiのファジイエントロピーの3条件を満たしていることは3.2において言語ヘッジ茎が，その条件を満たしていることより容易に確認できる．

なお，言語ヘッジ葉エントロピーの名前の由来は言語ヘッジ茎から生成されることによる．

3.5　ファジィ集合の分解表現

ファジィ集合Aは，次の2つのファジィ集合の限界和[4]に分解される．すなわち，

$$A = CON(A) \oplus GERM(A,X) \quad (11)$$

である．

(証明)

(6)，(8)式より

$$与式 = CON(A) \oplus GERM(A,X)$$
$$= \Sigma(1 \wedge (\mu_A(x_i)^2 + \mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i))))/x_i$$
$$= \Sigma(1 \wedge (\mu_A(x_i)^2 + \mu_A(x_i)-\mu_A(x_i)^2))/x_i$$
$$= \Sigma(1 \wedge \mu_A(x_i))/x_i = \Sigma(\mu_A(x_i))/x_i = A$$

よって(11)式が成立する．

(証明終)

(例.2)

$X = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$とし，ファジィ集合Aを

$$A = 0.3/x_1+0.8/x_2+0.5/x_3+0.7/x_4+0.2/x_5$$

とすれば

$$A^C = 0.7/x_1+0.2/x_2+0.5/x_3+0.3/x_4+0.8/x_5$$

より

$$GERM(A,X) = A \cdot A^C$$
$$= 0.21/x_1+0.16/x_2+0.25/x_3+0.21/x_4+0.16/x_5$$

$$CON(A) = A^2$$
$$= 0.09/x_1+0.64/x_2+0.25/x_3+0.49/x_4+0.04/x_5$$

よって，上記の例において

$$A = CON(A) \oplus GERM(A,X)$$

が成り立っていることが確認できる．

(11)式は，「ファジィ集合＝(集中化言語ヘッジ集合)⊕(言語ヘッジ芽集合)」と書ける．このことは，ファジィ集合のメンバーシップ値が一定の条件下では，集中化言語ヘッジのメンバーシップ値が増加すれば言語ヘッジ芽のメンバーシップ値が減少し，言語ヘッジ芽のメンバーシップ値が増加すれば集中化言語ヘッジのメンバーシップ値が減少することを意味する．このことにより集中化言語ヘッジ集合と言語ヘッジ芽集合が対応し，ファジィ集合が性質の異なる2つの集合に分解されるという理論的枠組みを提示したことになる．

3.6 言語ヘッジ葉エントロピーの性質について

以下3.4で定義を行なった言語ヘッジ葉エントロピーがどのような性質を持っているかをまとめて示す．また，情報理論でのエントロピーの概念で成立する加法性の性質[4]が同様に成立することを示す．

X (有限集合とする) におけるファジィ集合Aに，次のような関数E(A)を割り当てる．

$$E(A) = K\Sigma^*\mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i)) \quad (x_i \in X)$$
$$= K\Sigma^*(STALK(A,X)) \quad (12)$$

但し，Kは正定数である．

(a)性質1(加法性)

A，BをXにおけるファジィ集合とすると

$$E(A \cup B)+E(A \cap B) = E(A)+E(B) \quad (13)$$

(証明)

$E(A \cup B)$, $E(A \cap B)$を次のように分解すれば得られる.

$$E(A \cup B) = K\Sigma^*_{\mu_A \geqq \mu_B} \mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i)) + K\Sigma^*_{\mu_A < \mu_B} \mu_B(x_i)(1-\mu_B(x_i))$$

$$E(A \cap B) = K\Sigma^*_{\mu_A < \mu_B} \mu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i)) + K\Sigma^*_{\mu_A \geqq \mu_B} \mu_B(x_i)(1-\mu_B(x^i))$$

(b)性質2

$e(A) \equiv E(A) + E(A^c)$

とすれば

$$e(A) + e(B) = e(A \cup B) + e(A \cap B) \tag{14}$$

が成り立つ.

(証明) $e(A) + e(B) = E(A) + E(A^c) + E(B) + E(B^c)$

$= E(A \cup B) + E(A \cap B) + E(A^c \cup B^c) + E(A^c \cap B^c)$

$= E(A \cup B) + E((A \cup B)^c) + E(A \cap B) + E((A \cap B)^c)$

$= e(A \cup B) + e(A \cap B)$

(証明終)

4. おわりに

本研究では，主に2つの提案を行なった.

第1の提案はファジィ集合が集中化言語ヘッジの集合と言語ヘッジ芽の集合の限界和に分解されることである．この提案は，集中化言語ヘッジと言語ヘッジ芽が対応し，つまり言語ヘッジ芽のスカラー化である言語ヘッジ葉エントロピーに言語ヘッジが対応することを示した．このことより，集中化言語ヘッジのあいまいさを計量するのに，対応する言語ヘッジ葉エントロピーを計量すればよいことがわかる．一方，ファジィ集合が集中化言語ヘッジの集合と言語ヘッジ芽の集合の限界和に分解できることは，従来，提案がなく，2つの性質の異なる集合に分解できることについて，今後の議論やファジィ言語理論への応用などが期待される.

第2には提案した言語ヘッジ葉エントロピーに対し，情報理論におけるエントロピーの加法性などの基本的性質が成立することを示した.

最後に，言語ヘッジ葉エントロピーは De Luca & Termini の対数型のファジィエントロピーと比較して計算がずっと簡単になるという利点があることを指摘しておく.

文献

(1) De Luca & Termini: A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory, Information and Control, 20, pp.301-312 (1975)

(2) 本多中二：「ファジィエントロピーとはなにか」，数理科学 No.294, pp.54-61 (1987)

(3) Klir, G., Folger, T.: Fuzzy Sets Uncertainty and Information, Prenctice Hall (1988) (本多訳：ファジィ情報学：日刊工業新聞社 (1993))

(4) 水本雅晴：「ファジィ理論とその応用」，サイエンス社 (1988)

(5) Zadeh, L.A. (菅野他訳)：「ザデー・ファジィ理論」，日刊工業新聞社 (1992)

(6) Kaufmann, A.: Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Academic Press (1975)

(7) Yager, R.R.: On the measure of fuzziness and negation Part I Membership in the unit interval, Int. J of General System, 5, pp.221-229 (1979)

(8) Kosko, B.: Fuzzy Entropy and Conditioning, Information Science, vol. 40. pp.165-174 (1986)

(平成7年10月12日受理)