

打撃ロボット用フレキシブルアームのモデリングとその応用

泉 照之*・浴本保典**

Modeling of a Flexible Arm used in a Hammering Robot and its Application

Teruyuki IZUMI* and Yasunori EKIMOTO**

Abstract

When a robot hits an object by a hammer, the robot manipulator has to absorb an impulsive reaction with the motor of a joint or a link of the arm, in order to protect the robot and the object from the breakdowns.

This paper proposes a hammer system which is composed of a weight for the head and a flexible arm for the handle of a hammer, in order to realize a hammering robot. The use of a flexible arm has the advantage that the flexibility can absorb the reaction at a hitting easily. After the hitting, however, the hammer system vibrates complicatedly due to the moment of inertia of the head of a hammer. Therefore the modes of vibrations are analyzed by taking it into consideration. And the mathematical model of the hammer system, which is forced by not only a driving torque at a hub fixing one end of the flexible arm but also the reaction at the head of the hammer, is formulated by the Hamilton's principle. Last it is shown that the intensity and direction of the reaction are measured by using the model.

Key Words: hammering robot, flexible arm, impulsive reaction, modal analysis

1. まえがき

人間が行う作業や動作¹⁾の中に打撃があり、これは大工がハンマーで釘を打つ作業に代表される。それ以外に、建物の外壁の落下を未然に防止するために行われるタイル剥離の点検作業がある。この点検作業は、非常に危険でかつ長時間を要するので、ロボットにさせるべきである²⁾。また、人間の肩凝りをほぐすための肩たたき³⁾を、将来普及するであろうパーソナルロボットで行わせるのも大変興味深い。打撃ロボットの課題は、所望の速度で対象物を打撃することと、マニピュレータが打撃時に対象物から受ける衝撃反力を瞬時に吸収することである。この反力は、マニピュレータを構成する関節かリンクのどちらかで吸収しなければならな

い。

多自由度マニピュレータによる打撃動作は、内山⁴⁾、高瀬⁵⁾によって最初に研究された。これらのマニピュレータの関節はトルク制御されていて、打撃時の反力は関節で吸収され得る。しかし、多くのマニピュレータの関節は小トルクのモータと減速機で構成されている。そのため、このマニピュレータで打撃動作をさせる場合、反力を吸収できないので、その先端にモータ駆動されたハンマーを取り付ける必要がある。このモータも小形にせざるを得ないので、減速機が不可欠である。したがって、ハンマーの柄を柔軟にして、そこで打撃反力を吸収させる方法が考えられる。

本論文は、打撃動作ができるロボットを実現するために、ハンマーの柄にフレキシブルアームを利用することを提案する¹³⁾。フレキシブルアームは、打撃反力を簡単に吸収できるが、ハンマーの頭部が打撃反力を受けて複雑に運動する。フレキシブルアームに関するこれまでの研究^{6)~11)}は、アームの先端で受ける外力を十分に考慮しているとはいいがたい。橋本ら¹²⁾は外力を問題

*電気電子工学科

**横河・ヒューレット・パッカード

にしているが、先端のペイロードの慣性モーメントを無視しているので、打撃ロボットにはそのまま適用できない。そこで、3章では、ハンマーの頭部が大きな慣性モーメントをもち、そこに打撃反力が加わるときのハンマー系の運動をモデル化する。4章では導出した数式モデルを検証し、5章でそのモデルを利用して打撃力や打撃角度が測定できることを示す。

2. フレキシブルアームの利用

Fig. 1は、打撃ロボットの概要と被打撃物を示す。このロボットは、多自由度マニピュレータのエンドエフェクタに、モータで駆動されるハンマーが取り付けられている。マニピュレータの各関節は、被打撃物の打撃点と打撃方向が所定の値になるように位置制御されている。もし、ハンマーの柄が剛体で速度制御されていれば、打撃時にハンマーと被打撃物の間に大きな衝撃力が発生し、それらが破損される場合がある。打撃直後に速度の指令値を変えるにしても、ハンマー・モータ系の慣性や、減速機などの非線形摩擦に妨害されて、微妙な打撃力の制御は困難になる。したがって、打撃反力をソフトに吸収する機構が必要がある。

そこで、本論文は、ハンマーの柄としてフレキシブルアームを積極的に利用することを提案する。フレキシブルアームは、剛性が低いので、速度制御されたモータで駆動されたハンマーが被打撃物に衝突しても、打撃反力を容易に吸収できる。また、ある条件のもとでは、ハンマーの頭部は、フレキシブルアーム・モータ系の影響を受けない。その場合、打撃力と打撃速度の関係が簡単になり、打撃力の制御が容易になる。また、モータの角速度が同じでも、剛体の柄に比べてハンマーの速度をより大きくさせることができるなどの利点をもつ。しかし一方、ハンマーの頭部は質点とみなせず、しかもアームはモータの回転力以外に、打撃反力を受けるので、ハンマーの挙動は非常に複雑になる。したがって、フレキシブルアームで打撃力制御を行うためには、数式モデルを作る必要がある。

3. ハンマー付きフレキシブルアームのモデリング

3.1 振動数方程式と固有関数

Fig. 1に打撃ロボットの概要を示したが、以後簡単のためにハンマーは水平面内で運動すると仮定する。Fig. 2はハンマーの柄がモータの駆動軸に取り付けてあるハブに支持されている様子を示す。その柄は、体積密度 ρ 、縦弾性係数 E の均質材料で、断面積 A 、断

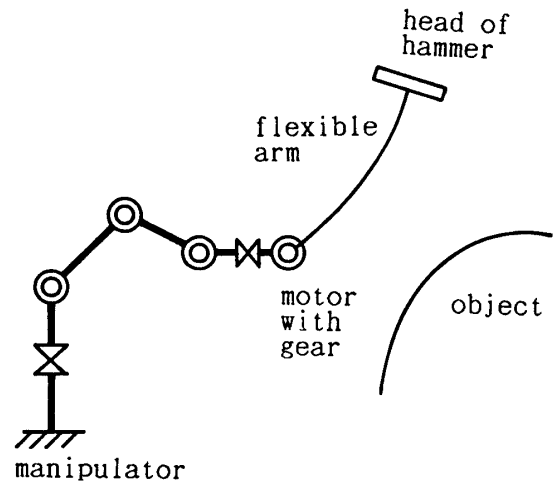


Fig. 1 A hammering robot using a flexible arm

面2次モーメント I も均一なフレキシブルアームであるとする。また、アームは弾性域内で小さな変形をすると仮定する。半径 R のハブ支持点から変形のないアームの長手方向を x とすれば、変位 $y(x, t)$ は、次式のような曲げの振動方程式によって表される。

$$EIy''''(x, t) + \rho A \ddot{y}(x, t) = 0 \quad (1)$$

ここで、 $y'(x, t)$ 、 $\dot{y}(x, t)$ はそれぞれ $\partial y(x, t)/\partial x$ 、 $\partial y(x, t)/\partial t$ を示す。アームは $x=0$ でハブに固定され、 $x=l$ に質量 M 、 z 軸回りの慣性モーメント J のハンマーの頭部が取り付けられている。したがって、 $y(x, t)$ は

$$y(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$y'(0, t) = 0 \quad (3)$$

$$M\ddot{y}(l, t) = EIy''''(l, t) \quad (4)$$

$$J\dot{y}'(l, t) = -EIy''(l, t) \quad (5)$$

の境界条件を満たさなければならない。この場合、(1)式の自明でない解は、次の振動数方程式

$$1 + \cos\beta \cosh\beta + (M/\rho A)(\beta/l)(\cos\beta \sinh\beta - \sin\beta \cosh\beta) - (J/\rho A)(\beta/l)^3(\sin\beta \cosh\beta + \cos\beta \sinh\beta) + (MJ/(\rho A)^2)(\beta/l)^4(1 - \cos\beta \cosh\beta) = 0 \quad (6)$$

を満足する β においてのみ存在する。 i 番目のそれは固有値 λ_i とつぎの関係にある。

$$\lambda_i = (EI/\rho A)(\beta_i/l)^4, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

これらに対応する固有関数は

$$\phi_i(x) = [\cosh(\beta_i x/l) - \cos(\beta_i x/l) - \gamma_i \{\sinh(\beta_i x/l) - \sin(\beta_i x/l)\}] / C_i$$

$$\gamma_i = \{\cos\beta_i + \cosh\beta_i - (J/\rho A)(\beta_i/l)^3(\sin\beta_i + \sinh\beta_i)\}$$

を $\phi_i(x)\delta a_i(t)$ とすれば、 $\delta y''(x,t)$ の第 i 成分は $\phi_i''(x)\delta a_i(t)$ となる。変分 $\delta a_i(t)$ は任意であるから、(20) 式はつぎのように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & -\rho A \int_0^l \{(R+x)\ddot{\theta}(t) + \ddot{y}(x,t)\} \phi_i(x) dx \\ & -M \{(R+l)\ddot{\theta}(t) + \ddot{y}(l,t)\} \phi_i(l) \\ & -J \{\ddot{\theta}(t) + \ddot{y}'(l,t)\} \phi_i'(l) \\ & -EI \int_0^l y''(x,t) \phi_i''(x) dx \\ & - \int_0^l \xi I \dot{y}''(x,t) \phi_i''(x) dx \\ & +P(t)\phi_i(l) + Q(t)\phi_i'(l) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

これに(9)式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \{ \rho A \int_0^l \phi_j(x) \phi_i(x) dx + M \phi_j(l) \phi_i(l) \\ & \quad + J \phi_j'(l) \phi_i'(l) \} \ddot{a}_j(t) \\ & + \int_0^l \xi I \phi_j''(x) \phi_i''(x) dx \dot{a}_j(t) \\ & + EI \int_0^l \phi_j''(x) \phi_i''(x) dx a_j(t) \\ & = P(t)\phi_i(l) + Q(t)\phi_i'(l) \\ & - \{ \rho A \int_0^l (R+x) \phi_i(x) dx + M(R+l) \phi_i(l) \\ & \quad + J \phi_i'(l) \} \ddot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。この式は、(10)、(11)式の直交性を利用すると $\{ \ddot{a}_i(t) + 2\delta\lambda_i \dot{a}_i(t) + \lambda_i a_i(t) \}$

$$= (\phi_i(l)P(t) + \phi_i'(l)Q(t)) / \rho A - b_i \ddot{\theta}(t) \quad (23)$$

と表される。ここで、 $b_i = ((R+x)\phi_i(x))$ 、 $2\delta = \xi/E$ である。この式は、右辺第2項のモータの駆動力以外に、第1項の打撃反力の影響を示すものであり、打撃ロボットの研究において重要である。

4. 数式モデルの検証

ハンマーの柄として厚さ0.6 [mm] の板バネを用いて3章の結果を検証する。Table 1 に示すハンマーの諸

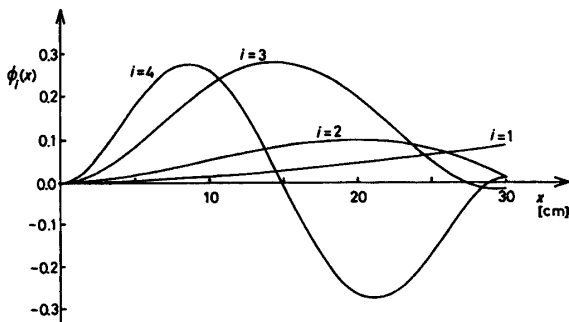


Fig. 3 Eigen funtions for a considerable moment of inertia

量を(6)式に代入して $i = 4$ までの β_i を求めると Table 2 のようになった。この表の λ_i は(7)式の固有値を示す。また、(10)式を満たすように規格化された(8)式の固有関数は Fig. 3 のようになった。このときの $\phi_i(l)$ 、 $\phi_i'(l)$ は Table 1 のとおりである。Fig. 3 の特徴は、慣性モーメント J が大きいいため $\phi_i'(l)$ が小さいことである。一方、減衰の程度を表す δ は実験的に求めた値 2×10^{-5} を用いる。

4.1 インパルス応答

初期値が $a_i(0) = \dot{a}_i(0) = 0$ のとき、(23)式の解は

$$\begin{aligned} a_i(t) = \int_0^t [\{ (\phi_i(l)P(\tau) + \phi_i'(l)Q(\tau)) / \rho A \\ - b_i \ddot{\theta}(\tau) \} / \Omega_i] \exp(-\delta\lambda_i(t-\tau)) \sin(\Omega_i(t-\tau)) \\ d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

と表される。ここで、 $\Omega_i = \sqrt{\lambda_i - (\delta\lambda_i)^2}$ で、その値は Table 2 に示されるように i が小さい場合、ほとんど $\sqrt{\lambda_i}$ と一致する。打撃反力は多くの場合衝撃関数であるので、以後 $P(t)$ 、 $Q(t)$ を大きさ P 、 Q のインパルス信号とする。いま、 P 、 Q が独立にハンマーに働くとするれば、 $x = l_s$ における加速度 $\dot{y}_p(l_s, t)$ 、 $\dot{y}_q(l_s, t)$ は、それぞれつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(l_s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(l_s) \phi_i(l) \lambda_i P}{\rho A \Omega_i} \\ \times \exp(-\delta\lambda_i t) \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_q(l_s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(l_s) \phi_i'(l) \lambda_i Q}{\rho A \Omega_i} \\ \times \exp(-\delta\lambda_i t) \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $\alpha_i = \tan^{-1}(2\delta\Omega_i / (1 - 2\delta^2\lambda_i))$ である。 $\ddot{\theta}(t)$ もインパルスであるとする

$$\begin{aligned} \dot{y}_{\ddot{\theta}}(l_s, t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(l_s) b_i \lambda_i}{\Omega_i} \\ \times \exp(-\delta\lambda_i t) \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \end{aligned} \quad (27)$$

となる。 $l_s/l = 0.97$ の場所に加速度センサをとりつけ

Table 1 Specification of a hammer used in experiment

flexible arm	l	30 [cm]
	ρA	1.784 [g/cm]
	EI	1.42×10^8 [dyne \cdot cm 2]
	δ	2×10^{-5} [sec]
head of hammer	M	226.2 [g]
	J	4231.5 [g \cdot cm 2]
	h	7 [cm]

て、(25)式に相当する波形を観察すると Fig. 4(a)のようになった。この写真の上部の波形は時間幅 8 [msec] の打撃力 P(t)を示す。下部の波形は $y_p(\ell_s, t)$ を示し、第 1 モードが大きく生じている。単位力積、すなわち $P=1$ [dyne·sec] に対して(25)式の第 1 モードの振幅は、t が十分小さいとき、Table 2 の値 $y_{p1}(\ell_s) = \phi_1(\ell_s) \phi_1(\ell) \lambda_1 / (\rho A \Omega_1)$ から 0.0304 [cm/sec²] となる。実験では $P=14500$ [dyne·sec] であったので最大加速度の計算値は 0.45 [G] となる。それに対して加速度センサの最大値は約 0.5 [G] で計算値とほぼ一致した。Fig. 4(b)は、Q(t)だけを印加したときの $y_q(\ell_s, t)$ の波形であり、第 2 モードが大きく生じていることを示す。この加速度も(26)式の理論値とほぼ一致した。

4. 2 スペクトル

P=1とした(25)式、Q=1の(26)式をそれぞれフーリエ変換し、第 i モードの成分の最大値を求めると、

$$f_{mi} = \sqrt{\Omega_i^2 - (\delta\lambda_i)^2} / 2\pi \text{ において}$$

$$S_{p1} = \phi_1(\ell_s) \phi_1(\ell) / (2\delta\rho A \Omega_1) \quad (28)$$

$$S_{q1} = \phi_1(\ell_s) \phi_1'(\ell) / (2\delta\rho A \Omega_1) \quad (29)$$

となる。f_{mi}, S_{p1}, S_{q1}は Table 2 に示されている。しかし、実際のフーリエ変換の積分時間は有限値 T である。一般の T におけるスペクトルのピーク値は簡単な式で表せない。しかし、それらは、δ が小さく、T が自然数 m に対して $2\pi m / \Omega_i$ のとき、つぎのようになる。

$$S_{p1}(T) = S_{p1}(1 - \exp(-\delta\lambda_1 T)) \quad (30)$$

$$S_{q1}(T) = S_{q1}(1 - \exp(-\delta\lambda_1 T)) \quad (31)$$

m が自然数でなくても、m が大きい場合、この式は真値とよく一致する。T=5 [sec] におけるそれらの値を計算すると Table 2 のようになる。この条件で加速度信号を高速フーリエ変換すると Fig. 5 のようになった。(a)は S_{p1}を(b)は S_{q1}を示す。これらの i=1, 2 にお

けるモードの強さの比は、それぞれ Table 2 の S_{p1}(5), S_{q1}(5) から計算された値とよく一致している。

5. スペクトルを用いた打撃反力と打撃角度の測定法

Table 2 の結果から、ハンマー頭部の並進運動方向の衝撃力 P は第 1 モードを、それと直角方向の力 P_r は第 2 モードをそれぞれ強く励振させることがわかった。実際の打撃では、P, Q の両者が存在する。その場合、第 1 モードのスペクトル成分の測定値を d₁, 第 2 のそれを d₂ とすれば、次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} S_{p1}(T) & S_{q1}(T) \\ S_{p2}(T) & S_{q2}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

この式から P, Q を求め、P と P_r=Q/h より打撃反力の強さ P₀ と方向が求められる。

6. あとがき

打撃用ロボットのハンマーの柄としてフレキシブルアームを利用することを提案した。このハンマー系は、アームの根元で受ける回転駆動力以外に、ハンマーの頭部で打撃反力をうけるので、複雑な運動をする。そこで、それらとアームの内部粘性や頭部の慣性モーメントを考慮した運動方程式をハミルトンの原理から導いた。この数式モデルの妥当性を検証するために、直交する 2 方向から衝撃力を加え、そのとき生じた加速度とそのスペクトルを調べた。その結果、加速度の値、励起された周波数ともにモデルとよく一致した。また、ハンマー頭部の並進運動方向の衝撃力は第 1 モードを、それと直角方向の力は第 2 モードをそれぞれ強く励振させることがわかった。それらのスペクトル分布の違いを利用して、第 1, 第 2 モードの成分値から打撃反

Table 2 Some parameters of i-th mode of a vibration

mode	eigen values and functions				acceleration							
					ampulitude			freq.	spectra			
	i	β_i	λ_i	$\phi_i(\ell)$	$\phi_i'(\ell)$	Ω_i	$\ddot{y}_{p1}(\ell_s)$	$\ddot{y}_{q1}(\ell_s)$	f _{mi}	S _{p1}	S _{q1}	S _{p1} (5)
1	0.90	63.256	0.0846	0.00427	7.95	0.0304	0.0015	1.27	12.03	0.6075	0.076	0.0038
2	2.54	4082.8	0.0116	-0.01894	63.9	0.0116	-0.0188	10.2	0.071	-0.1152	0.024	-0.0386
3	4.88	55811.	-0.0158	0.00612	236.	0.0362	-0.0140	37.6	0.016	-0.0063	0.016	-0.0063
4	7.91	383874	0.0105	-0.00225	620.	0.0107	-0.0023	98.6	0.001	-0.0001	0.001	-0.0001

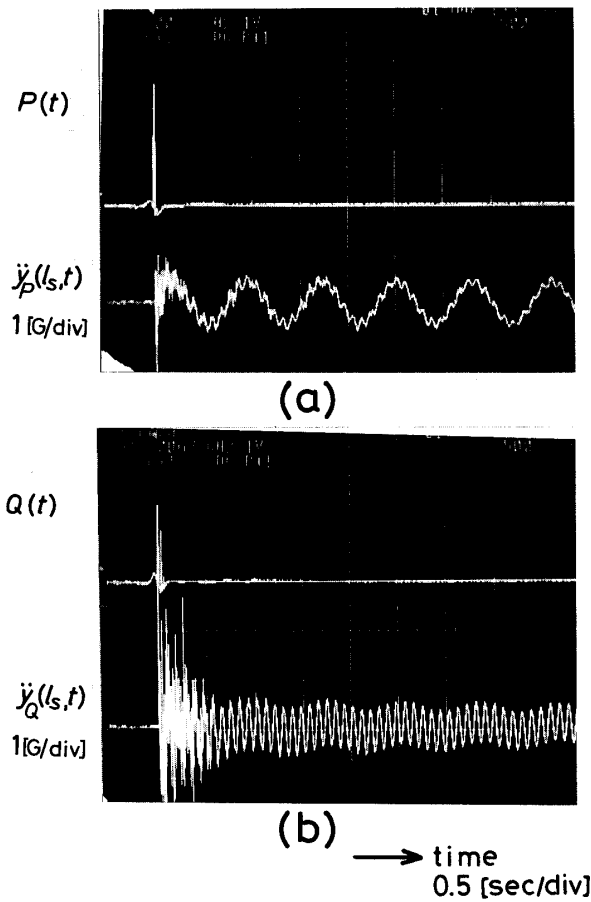


Fig. 4 Impulse responses of acceleration
(a) input is P, (b) input is Q

力やその方向が測定できる原理を示した。

今後の課題は、打撃反力がねじれ振動を生じさせる場合について検討し、対象物体を3次元まで拡大させることである。

参考文献

- 1) 高瀬國克：ロボットアームの運動とその定式化，計測と制御，Vol. 25, No. 1, 15/22 (1986)
- 2) 鈴木昭夫，吉川一三：建築・土木分野の検査ロボット，日本ロボット学会誌，Vol.4, No.5, 544/547(1986)
- 3) 泉 照之，日高良和，児玉真一：フレキシブルアームを利用した肩たたきロボット，計測自動制御学会中国支部学術講演会，126/127(1991)
- 4) 内山 勝：人工の手の制御アルゴリズム構成法と動的制御モード，バイオメカニズム3，172/181，東京大学出版会 (1975)

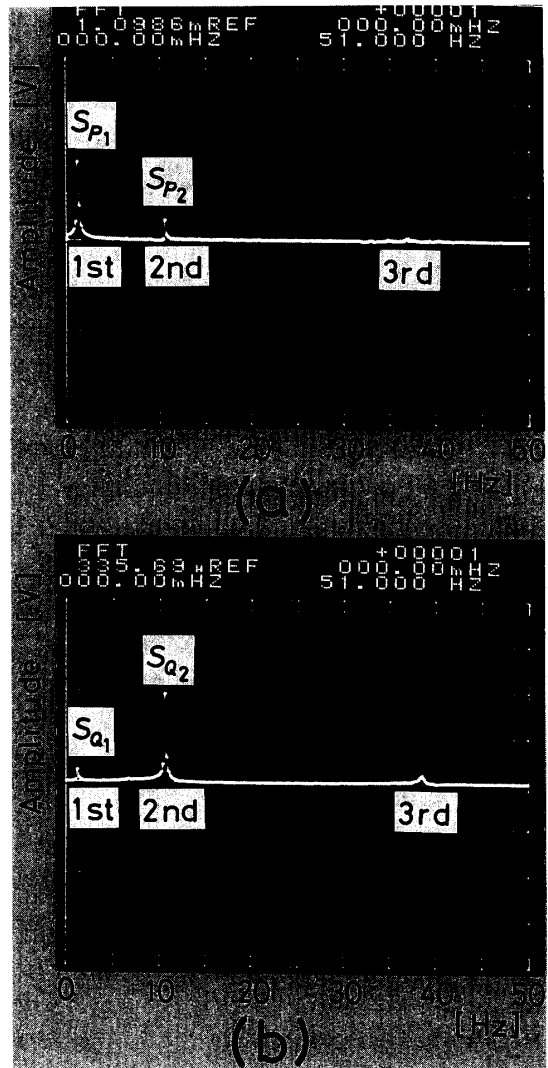


Fig. 5 Frequency spectra of acceleration signals
at $l_s/l=0.97$ when $T=5$ [sec]
(a) $\ddot{y}_p(l_s, t)$, $\ddot{y}_q(l_s, t)$

- 5) 高瀬國克：手による作業，計測と制御，Vol. 29, No. 3, 213/219 (1990)
- 6) 嘉納秀明：集中と分布 [IV] - 近似モデリングの方法-，計測と制御，Vol. 26, No.11, 968/976 (1987)
- 7) 福田敏男，荒川 淳：フレキシブルロボットアームの制御，日本機械学会論文集 (C編)，Vol.53, No. 488, 954/961(1987)
- 8) 坂和愛幸，松野文俊：フレキシブル・アームのモデリングと制御，計測と制御，Vol.25, No.1, 64/70(1986)
- 9) 羅 正華，坂和愛幸：フレキシブルアームの曲げ・ねじり連成振動の制御実験，計測自動制御学会論文集，Vol.27, No.4, 422/428(1991)

- 10) K.H.Low and M.Vidyasagar: A Lagrangian Formulation of the Dynamic Model for Flexible Manipulator Systems, Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.110, JUNE, 175/181(1988)
- 11) S.Choura, S.Jayasuriya and M.A.Medick: On the Modeling, and Open-Loop Control of a Rotating Thin Flexible Beam, Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.113, MARCH, 26/33(1991)
- 12) 橋本幸男, 土谷武士: 外力を考慮した柔軟アームのモデリングと力制御への応用, 日本ロボット学会学術講演会, 223/224(1990)
- 13) 泉 照之: フレキシブル・アームを利用したハンマリング・ロボットの基礎的研究, SICE'90, 437/438(1990)

〈付 録〉

時刻 t におけるフレキシブルアームの相対変位を $y(x, t)$ とすれば, その点の絶対座標 (X, Y) は,

$$X(x, t) = (R+x)\cos\theta(t) - y(x, t)\sin\theta(t) \quad (A.1)$$

$$Y(x, t) = (R+x)\sin\theta(t) + y(x, t)\cos\theta(t) \quad (A.2)$$

となる. これらを用いると運動エネルギー T_1 の2倍は,

$$\begin{aligned} 2T_1 &= \rho A \int_0^l (\dot{X}^2(x, t) + \dot{Y}^2(x, t)) dx \\ &= \rho A \int_0^l \{ (R+x)^2 \dot{\theta}^2(t) + \dot{\theta}^2(t) y^2(x, t) \\ &\quad + 2(R+x) \dot{\theta}(t) \dot{y}(x, t) + \dot{y}^2(x, t) \} dx \quad (A.3) \end{aligned}$$

と表される. この式を変分すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \delta T_1 &= \rho A \int_0^l \{ (R+x)^2 \dot{\theta}(t) \delta \dot{\theta}(t) \\ &\quad + \dot{\theta}(t) y^2(x, t) \delta \dot{\theta}(t) + \dot{\theta}^2(t) y(x, t) \delta y(x, t) \\ &\quad + (R+x) \{ \dot{y}(x, t) \delta \dot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) \delta \dot{y}(x, t) \} \\ &\quad + \dot{y}(x, t) \delta \dot{y}(x, t) \} dx \quad (A.4) \end{aligned}$$

積分期間である t_1, t_2 において

$$\delta\theta(t_1) = \delta\theta(t_2) = 0 \quad (A.5)$$

$$\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = 0 \quad (A.6)$$

であることを考慮して, δT_1 を部分積分すると,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T_1 dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \rho A \int_0^l \{ (R+x)^2 \ddot{\theta}(t) \\ &\quad + \ddot{\theta}(t) y^2(x, t) + (R+x) \ddot{y}(x, t) \} \delta\theta(t) \\ &\quad + \{ (R+x) \ddot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) y(x, t) \} \end{aligned}$$

$$+ \dot{y}(x, t) \} \delta y(x, t) \} dx dt \quad (A.7)$$

となる. 一方ハンマー頭部の運動エネルギー T_2 の2倍は,

$$\begin{aligned} 2T_2 &= M \{ X^2(l, t) + Y^2(l, t) \} + J \{ \dot{\theta}(t) + \dot{y}'(l, t) \}^2 \\ &= M \{ (R+l)^2 \dot{\theta}^2(t) + \dot{\theta}^2(t) y^2(l, t) \\ &\quad + 2(R+l) \dot{\theta}(t) \dot{y}(l, t) + \dot{y}^2(l, t) \} \\ &\quad + J \{ \dot{\theta}^2(t) + 2\dot{\theta}(t) \dot{y}'(l, t) + \dot{y}'^2(l, t) \} \quad (A.8) \end{aligned}$$

である. $\delta y'(x, t_1) = \delta y'(x, t_2) = 0$ を考慮して, T_1 と同様に, 変分をとり部分積分をすると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T_2 dt &= - \int_{t_1}^{t_2} M \{ (R+l)^2 \ddot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t) y^2(l, t) \\ &\quad + (R+l) \ddot{y}(l, t) \} \delta\theta(t) \\ &\quad + \{ (R+l) \ddot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) y(l, t) \\ &\quad + \ddot{y}(l, t) \} \delta y(l, t) \} dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} J \{ \ddot{\theta}(t) + \ddot{y}'(l, t) \} \delta\theta(t) \\ &\quad + \{ \ddot{\theta}(t) + \ddot{y}'(l, t) \} \delta y'(l, t) \} dt \quad (A.9) \end{aligned}$$

ハブの運動エネルギー T_3 は $J_m \dot{\theta}^2(t)/2$ であるから, その変分はつぎのようになる.

$$\delta T_3 = - J_m \ddot{\theta}(t) \delta\theta(t) \quad (A.10)$$

(平成7年10月13日受理)