

はりおよびアーチ部材の連結ダンパーのみを有する 動吸振部材による振動制御に関する研究 (第1報 動吸振部材の調整法)

會田忠義*・麻生稔彦*・渋谷俊広**
河原謙二郎***

Vibration Control of Beams and Arch Members by Member-Type Dynamic Vibration Absorbers with Connecting Dampers (1st Report, Tuning Method of Dynamic Absorbing Members)

Tadayoshi AIDA, Toshihiko ASO, Toshihiro SHIBUYA
and Kenjiro KAWAHARA

Abstract

In this paper, new member-type dynamic vibration absorbers are presented for controlling the several predominant modes of a beam and an arch member (main members) under harmonic excitation due to periodic load and joint motion, which consist of a beam and an arch member (dynamic absorbing members) under the same boundary condition as those of the main members and with connecting dampers between the main and dynamic absorbing members.

Equations of motion of the system in modal coordinates of the main members become equal to those of the two-degrees-of-freedom system with two masses, two springs and a damper when the dampers distributed uniformly along the axis of the member and the concentrated dampers arranged with close separation along the member are used as the connecting dampers. Formulas and procedure for optimum design of the member-type dynamic vibration absorbers are presented using the optimum tuning method of a dynamic absorber in two-degrees-of freedom system mentioned above.

1. まえがき

建設構造物などの一般的な大型構造物の振動制御には、受動的振動制御が主流であり、その代表的な装置の一つに同調質量減衰器(TMD)がある。TMDの制振効果は特定の振動数をもつ振動に対して十分である事は周知の通りである。著者らは、はり、平板およびシェ

ルの受動的制振の一手法として対象部材に対象部材と同じ境界条件をもち相似な剛性をもつ動吸振部材を装着したはりタイプ¹⁾、平板タイプ²⁾、およびシェルタイプ³⁾の動吸振システムを提案し、その調整法を提示してきた。

本研究は、定常加振を受けるはりおよびアーチ部材に対して特定の振動数をもつ振動のみでなく複数の振動に対して有効な制振の一手法として、対象部材(Main Member)に、それと同じ境界条件をもつ部材(動吸振部材(Dynamic Absorbing member))を連結ダンパーにより装着する系を動吸振システムとして提案し、このシステムの調整法を提示するものである。

*社会建設工学科

**諫早市役所

***石川島播磨重工業(株)

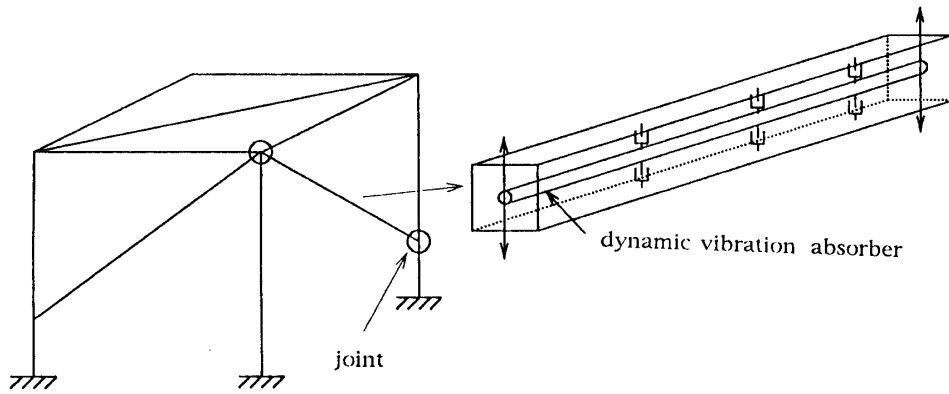


Fig.1 Framed structure with member having dynamic absorbing function.

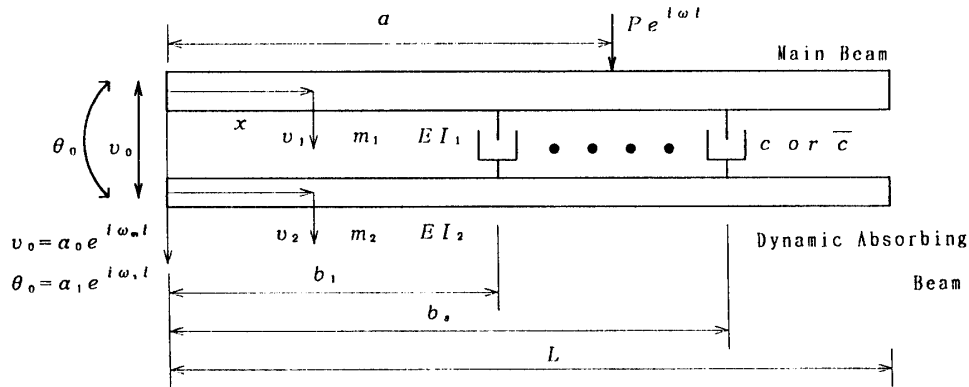


Fig.2 Single beam system with dynamic absorber consisting of a dynamic absorbing beam and connecting dampers.

ここでは、初めに対象部材に周期外力が作用する場合を想定し、対象部材の制振のための動吸振部材の調整法と、対象部材が変位加振を受ける場合の動吸振部材による振動制御にも注目し、動吸振部材の調整法を提示する。後者のケースは、Fig.1に示すような構造物中の一部材に相当し、部材には直接周期外力は作用せず、部材の端部から変位加振を受ける場合に相当する。

以下、周期外力及び変位加振を受ける単一はりおよび円弧アーチに、動吸振部材を等しく分布したダンパーのみによって連結した場合の運動方程式が、モード座標系において、主振動系および動吸振器（副振動系）からなる2質量2ばね1ダンパー系に置換できることを示す。ついでこの2質量2ばね1ダンパー系における動吸振器の制振理論と調整法を示し、2自由度系における動吸振器の調整法を用いて動吸振ばりの調整法を示す。さらに、実用面から連結ダンパーを有限個用いて動吸振部材を装着した場合にも言及する。この場

合、2質量2ばね1ダンパー系に置換できないが、近似的に各モードは2質量2ばね1ダンパー系に置換できることを示し、動吸振部材の近似的調整法を提示した。

2. 連結ダンパーのみを有する動吸振部材によるはりおよびアーチ部材の制振理論

2.1 はりおよびアーチ部材の運動方程式とモード方程式

2.1.1 はり部材の運動方程式とモード方程式

Fig.2に示すように、等分布質量および等分布剛性を有する対象はり(Main Beam)に同じ境界条件を持ち、等分布質量と等剛性の動吸振ばり(Dynamic Absorbing Beam)を連結ダンパーにより装着したモデルを想定する。対象ばりに周期外力が作用する場合および系全体が上下に、かつ左端を中心に回転加振される場合の両はりの運動方程式は次式で表される。ここで、等

分布の連結ダンパーを用いる場合(case 1)と集中連結ダンパーをS個用いる場合(case 2)の運動方程式をまとめて示す。

(対象ばりの運動方程式)

$$m_1 \ddot{u}_1 + EI_1 u_1'''' + C = P e^{i\omega t} \delta(x-a) + m_1 \alpha_0 \omega_0^2 e^{i\omega t} + m_1 \alpha_1 \omega_1^2 e^{i\omega t} \quad (1)$$

(動吸振ばりの運動方程式)

$$m_2 \ddot{u}_2 + EI_2 u_2'''' - C = m_2 \alpha_0 \omega_0^2 e^{i\omega t} + m_2 \alpha_1 \omega_1^2 e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$\text{ここで, } \begin{cases} C = c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \dots \dots \dots \text{case 1} \\ C = \bar{c}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \sum_{s=1}^S \delta(x-b_s) \dots \dots \text{case 2} \end{cases} \quad (3)$$

$u_1(x, t)$ $u_2(x, t)$: 対象ばりおよび動吸振ばりのたわみ,

- m_1, m_2 : 両はりの単位長さ質量,
- EI_1, EI_2 : 両はりの曲げ剛性,
- L : 両はりのスパン長,
- c : 等分布連結ダンパーの減衰係数, (単位長さ当たり)
- \bar{c} : 集中連結ダンパーの減衰係数,
- a : 荷重作用位置,
- b_s : S番目の集中連結ダンパーの装着位置,
- P : 荷重振幅,
- u_b : 支点変位,
- θ_0 : 支点回転角,
- α_0, α_1 : 支点変位および回転角の振幅,
- $\omega, \omega_0, \omega_1$: 励振円振動数,
- δ : Dirac の δ 関数,
- $(\dot{}) = \partial/\partial t, ()' = \partial/\partial x$

対象ばりと動吸振ばりの単位長さ質量と曲げ剛性が相似で、両はりの境界条件が同じである場合、両はりの固有関数は同一の関数で表される。ここで i 次の固有関数を $V_i(x)$ とし、それぞれのはりの i 次の固有円振動数を ω_{1i} および ω_{2i} で表わす。この時、これらの固有関数と固有円振動数は次の関係を満たす。

$$V_i''''(x) = \frac{m_1 \omega_{1i}^2}{EI_1} V_i(x) = \frac{m_2 \omega_{2i}^2}{EI_2} V_i(x) \quad (4)$$

今、両はり連結時のそれぞれのはりの振動たわみ $u_1(x, t)$ および $u_2(x, t)$ を次式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_{i=1}^N \rho_{1i}(t) V_i(x) \\ u_2(x, t) &= \sum_{i=1}^N \rho_{2i}(t) V_i(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)を式(1)および(2)に代入し、固有関数の直交性と式(4)の関係をを用いて整理すると次式となる。

(対象ばりのモード方程式)

$$m_1 \dot{\rho}_{1j} + m_1 \omega_{1j}^2 \rho_{1j} + C = P e^{i\omega t} V_j(a) + m_1 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j} e^{i\omega t} + m_1 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j} e^{i\omega t} \quad (6)$$

(動吸振ばりのモード方程式)

$$m_2 \dot{\rho}_{2j} + m_2 \omega_{2j}^2 \rho_{2j} - C = m_2 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j} e^{i\omega t} + m_2 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j} e^{i\omega t} \quad (7)$$

$j=1, 2, \dots, N$

上式中、

$$\begin{cases} C = c(\dot{\rho}_{1j} - \dot{\rho}_{2j}) \dots \text{case 1} \\ C = \bar{c} \sum_{i=1}^N \{ (\dot{\rho}_{1j} - \dot{\rho}_{2j}) \cdot \sum_{s=1}^S V_i(b_s) V_j(b_s) \} \dots \text{case 2} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \beta_{0j} = \int_0^L V_j(x) dx \\ \beta_{1j} = \int_0^L x V_j(x) dx \end{cases} \quad (9)$$

式(6), (7)の ρ_{1j}, ρ_{2j} を求めることにより、両はりの振動変位は式(5)によって求められる。

2.1.2 アーチ部材の運動方程式とモード方程式

Fig.3に示すようにアーチ軸線単位長さあたりの質量が一定で、かつ剛性が一定の対象円弧アーチ(Main Arch)と同じ境界条件を持ち、同じく質量分布および剛性分布が一定の動吸振アーチ(Dynamic Absorbing Arch)を連結ダンパー(半径方向及び接線方向のダンパー)により装着したモデルを想定する。対象アーチが周期外力を受ける場合および系全体が上下に、かつ左端を中心に回転加振される場合の対象アーチおよび動吸振アーチの運動方程式は次式で表される。ここで、等分布連結ダンパーを用いる場合(case 1)と集中連結ダンパーをS個用いる場合(case 2)の運動方程式をまとめて示す。

(対象アーチの運動方程式)

<接線方向>

$$\begin{aligned} m_1 R_1 \ddot{u}_1 - \frac{EI_1}{R_1^3} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right) - \frac{EA_1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + C_\theta \\ = R_1 P_\theta \delta(\theta - \beta) e^{i\omega t} \\ + m_1 R_1 \alpha_0 \omega_0^2 \sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) e^{i\omega t} + m_1 R_1^2 \alpha_1 \omega_1^2 (1 - \cos \theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (10)$$

<半径方向>

$$\begin{aligned} m_1 R_1 \ddot{u}_1 + \frac{EI_1}{R_1^3} \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} \right) - \frac{EA_1}{R_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - u_1 \right) + C_r \\ = R_1 P_r \delta(\theta - \beta) e^{i\omega t} \\ + m_1 R_1 \alpha_0 \omega_0^2 \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) e^{i\omega t} + m_1 R_1^2 \alpha_1 \omega_1^2 \sin \theta \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (11)$$

(動吸振アーチの運動方程式)

<接線方向>

$$m_2 R_2 \ddot{u}_2 - \frac{EI_2}{R_2^3} \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right) - \frac{EA_2}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) - C_\theta$$

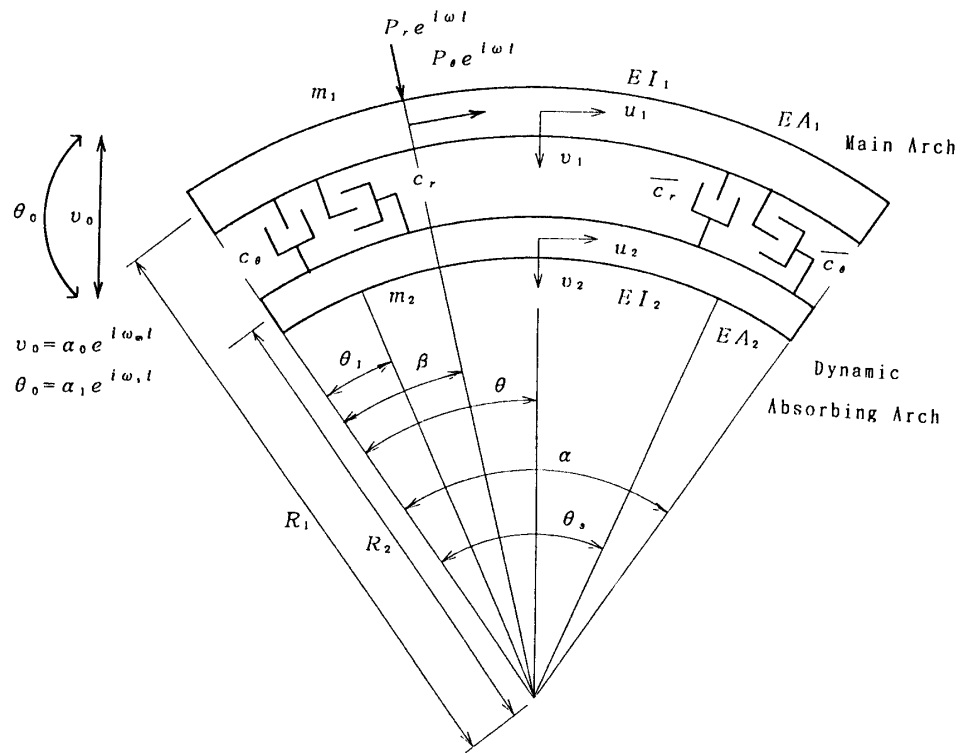


Fig.3 Arch member system with dynamic absorber consisting of a dynamic absorbing arch and connecting dampers.

$$= m_2 R_2 \alpha_0 \omega_0^2 \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\omega t} + m_2 R_2^2 \alpha_1 \omega_1^2 (1 - \cos\theta) e^{i\omega t} \quad (12)$$

〈半径方向〉

$$m_2 R_2 \ddot{v}_2 + \frac{EI_2}{R_2^3} \left(\frac{\partial^4 v_2}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} \right) - \frac{EA_2}{R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - v_2 \right) - C_r = m_2 R_2 \alpha_0 \omega_0^2 \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\omega t} + m_2 R_2^2 \alpha_1 \omega_1^2 \sin\theta \cdot e^{i\omega t} \quad (13)$$

$$\begin{cases} C_\theta = c_\theta (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \dots \text{case 1} \\ C_\theta = \bar{c}_\theta (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \sum_{s=1}^S \delta(\theta - \theta_s) \dots \text{case 2} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} C_r = c_r (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) \dots \text{case 1} \\ C_r = \bar{c}_r (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) \sum_{s=1}^S \delta(\theta - \theta_s) \dots \text{case 2} \end{cases} \quad (15)$$

u_1, u_2 : 対象アーチおよび動吸振アーチの接線方向変位,

v_1, v_2 : 両アーチの半径方向変位,

ここで, m_1, m_2 : 両アーチの単位長さ質量,

EI_1, EI_2 : 両アーチの曲げ剛性,

EA_1, EA_2 : 両アーチの伸縮剛性,

R_1, R_2 : 両アーチの断面の図心軸の曲率半径,

c_θ, c_r : 接線方向及び半径方向の等分布連結ダンパーの減衰係数, (単位中心角当たり)

$\bar{c}_\theta, \bar{c}_r$: 接線方向および半径方向の集中連結ダンパーの減衰係数,

α : 円弧アーチの中心角,

β : 荷重作用位置の中心角,

θ_s : S番目の集中連結ダンパーの装着位置の中心角,

P_θ, P_r : 荷重振幅,

その他の記号は, 単一ばりのそれぞれと同じである.

対象アーチと動吸振アーチにおいて境界条件が同一で, さらに下記の条件が満たされるとき,

$$\frac{A_1 R_1^2}{I_1} = \frac{A_2 R_2^2}{I_2} = x \quad (16)$$

両アーチの固有振動形は同一形になり, 固有円振動数の異なることになる. いま, 両アーチの i 次の固有振動変位を $U_i(\theta), V_i(\theta)$ で表し, 固有円振動数をそれぞれ ω_{1i}, ω_{2i} で表すとき, 固有振動変位と固有円振動数との間に次の関係が成り立つ.

(対象アーチ)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 V_i}{d\theta^3} + \frac{d^2 U_i}{d\theta^2} \right) - \frac{A_1 R_1^2}{I_1} \left(\frac{d^2 U_i}{d\theta^2} - \frac{dV_i}{d\theta} \right) &= -\frac{m_1 R_1^4 \omega_{1i}^2}{EI_1} U_i \\ \left(\frac{d^4 V_i}{d\theta^4} + \frac{d^3 U_i}{d\theta^3} \right) - \frac{A_1 R_1^2}{I_1} \left(\frac{dU_i}{d\theta} - V_i \right) &= \frac{m_1 R_1^4 \omega_{1i}^2}{EI_1} V_i \end{aligned} \quad (17)$$

(動吸振アーチ)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 V_i}{d\theta^3} + \frac{d^2 U_i}{d\theta^2} \right) - \frac{A_2 R_2^2}{I_2} \left(\frac{d^2 U_i}{d\theta^2} - \frac{dV_i}{d\theta} \right) &= -\frac{m_2 R_2^4 \omega_{2i}^2}{EI_2} U_i \\ \left(\frac{d^4 V_i}{d\theta^4} + \frac{d^3 U_i}{d\theta^3} \right) - \frac{A_2 R_2^2}{I_2} \left(\frac{dU_i}{d\theta} - V_i \right) &= \frac{m_2 R_2^4 \omega_{2i}^2}{EI_2} V_i \end{aligned} \quad (18)$$

上式より明らかなように、固有円振動数の間に次の関係を持つ。

$$\frac{m_1 R_1^4 \omega_{1i}^2}{EI_1} = \frac{m_2 R_2^4 \omega_{2i}^2}{EI_2} \quad (19)$$

今、両アーチ連結時のそれぞれのアーチの振動たわみを次式で表わす。

(対象アーチ)

$$u_1(\theta, t) = \sum_{i=1}^N U_i(\theta) \rho_{1i}(t) \quad (20)$$

$$v_1(\theta, t) = \sum_{i=1}^N V_i(\theta) \rho_{1i}(t) \quad (21)$$

(動吸振アーチ)

$$u_2(\theta, t) = \sum_{i=1}^N U_i(\theta) \rho_{2i}(t) \quad (22)$$

$$v_2(\theta, t) = \sum_{i=1}^N V_i(\theta) \rho_{2i}(t) \quad (23)$$

式(20)～(23)を運動方程式(10)～(13)に代入し、等分布装着の場合 $c_r = c_\theta = c$ 、集中装着の場合 $\bar{c}_r = \bar{c}_\theta = \bar{c}$ のケースを想定し、式(17)および(18)の関数と固有関数の直交条件式(24)を用いて整理するとモード方程式は、式(25)および(26)となる。

$$\int_0^\alpha \{U_j, V_j\} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} d\theta = \begin{cases} 1 \cdots i=j \\ 0 \cdots i \neq j \end{cases} \quad (24)$$

(対象アーチのモード方程式)

$$\begin{aligned} m_1 R_1 \ddot{\rho}_{1j} + m_1 R_1 \omega_{1j}^2 \rho_{1j} + C = R_1 \{P_\theta U_j(\beta) + P_r V_j(\beta)\} e^{i\omega t} \\ + m_1 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j} e^{i\omega_0 t} + m_1 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j} e^{i\omega_1 t} \end{aligned} \quad (25)$$

(動吸振アーチのモード方程式)

$$\begin{aligned} m_2 R_2 \ddot{\rho}_{2j} + m_2 R_2 \omega_{2j}^2 \rho_{2j} - C = m_2 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j} e^{i\omega_0 t} \\ + m_2 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j} e^{i\omega_1 t} \end{aligned} \quad (26)$$

$j=1, 2, \dots, N$

上式中、

$$\begin{cases} C = c(\dot{\rho}_{1j} - \dot{\rho}_{2j}) \cdots \text{case 1} \\ C = \bar{c} \sum_{i=1}^N [\dot{\rho}_{1i} - \dot{\rho}_{2i}] \times \\ \sum_{s=1}^s \{U_j(\theta_s), V_j(\theta_s)\} \cdot \{U_i(\theta_s), V_i(\theta_s)\} \cdots \text{case 2} \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \beta_{0j} = \int_0^\alpha U_j \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) d\theta + \int_0^\alpha V_j \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) d\theta \\ \beta_{1j} = R \int_0^\alpha U_j (1 - \cos\theta) d\theta + R \int_0^\alpha V_j \sin\theta d\theta \end{cases} \quad (28)$$

式(25)、(26)の ρ_{1j}, ρ_{2j} を求めることにより、両アーチの振動変位は式(20)～(23)によって求められる。

2.1.3 モード座標系における2自由度モデル

単一ばりおよびアーチ部材において動吸振部材が等分布連結ダンパーで装着される場合(case 1)、モード方程式は式中の C が式(8)、式(14)および式(15)の第1式より明らかなように、下付添字 j のみに関係することからモード間の連成はないが、動吸振部材が集中連結ダンパーにより装着される場合(case 2)、 C が下付添字 i と j に関係することから、各モードが連成することは明らかである。

今、集中連結ダンパーの減衰係数 \bar{c} を次式で表す。

$$\bar{c} = c \cdot d \quad (29)$$

ここで、 c : 等分布装着の場合の減衰係数

d : 集中連結ダンパーの取り付け位置間隔

(単一ばりの場合は距離、アーチの場合は角度(rad))

この時、 C は次式で表される。

$$C = c \sum_{i=1}^N (\dot{\rho}_{1i} - \dot{\rho}_{2i}) \Phi_{ij} \quad (30)$$

ここで、

$$\text{単一ばり} : \Phi_{ij} = \sum_{s=1}^s V_i(b_s) V_j(b_s) \cdot d \quad (31)$$

$$\text{円弧アーチ} : \Phi_{ij} = \sum_{s=1}^s \{U_j(\theta_s), V_j(\theta_s)\} \{U_i(\theta_s), V_i(\theta_s)\}^T \cdot d \quad (32)$$

Φ_{ij} は d が十分に小さい場合、定積分の定義式に相当することから固有関数の直交性より明らかなように次式となる。

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} 1 \cdots i=j \\ 0 \cdots i \neq j \end{cases} \quad (33)$$

したがって、 C は動吸振部材が等分布連結ダンパーにより装着される場合および取付間隔(d)が十分に小さく、集中連結ダンパーにより装着される場合、いずれにおいても、また、単一ばりおよびアーチ部材の C は次式で表される。

$$C = c(\dot{\rho}_{1j} - \dot{\rho}_{2j}) \quad (34)$$

したがって、単一ばり及びアーチ部材、それぞれの対象部材に対して、等分布及び集中連結ダンパーいずれを用いる場合も、モード方程式は以下の置換により2質量2ばね1ダンパーの2自由度系の運動方程式と等価になる。

単一ばり

$$\begin{aligned}
 M_1 &= m_1, & M_2 &= m_2 \\
 k_1 &= m_1 \omega_{1j}^2, & c_2 &= c, & k_3 &= m_2 \omega_{2j}^2 \\
 x_1 &= \rho_{1j}, & x_2 &= \rho_{2j} \\
 P_1 &= P V_j(a) \\
 P_{10} &= m_1 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j}, & P_{11} &= m_1 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j} \\
 P_{20} &= m_2 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j}, & P_{21} &= m_2 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j}
 \end{aligned} \tag{35}$$

ここで、 $\beta_{0j} = \int_0^l V_j(x) dx$, $\beta_{1j} = \int_0^l x V_j(x) dx$

円弧アーチ

$$\begin{aligned}
 M_1 &= m_1 R_1, & M_2 &= m_2 R_2 \\
 k_1 &= m_1 R_1 \omega_{1j}^2, & c_2 &= c, & k_3 &= m_2 R_2 \omega_{2j}^2 \\
 x_1 &= \rho_{1j}, & x_2 &= \rho_{2j} \\
 P_1 &= P_\theta U_j(\beta) + P_r V_j(\beta) \\
 P_{10} &= m_1 R_1 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j}, & P_{11} &= m_1 R_1^2 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j} \\
 P_{20} &= m_2 R_2 \alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j}, & P_{21} &= m_2 R_2^2 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j}
 \end{aligned} \tag{36}$$

ここで、 $\beta_{0j} = \int_0^a U_j \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) d\theta + \int_0^a V_j \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) d\theta$

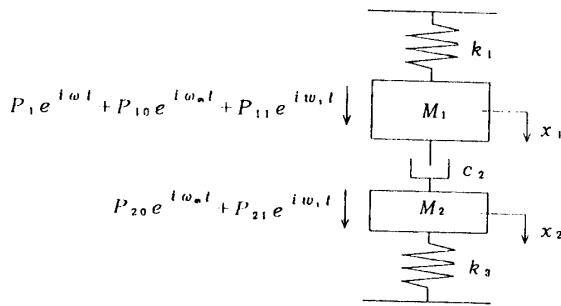


Fig.4 Two-degrees-of-freedom model with 2 masses, 2 springs and a damper.

$$\beta_{ij} = \int_0^a U_j(1 - \cos\theta) d\theta + \int_0^a V_j \sin\theta d\theta$$

すなわち、2質量2ばね1ダンパー系の運動方程式は次式で表される。

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = P_1 e^{i\omega t} + P_{10} e^{i\omega_0 t} + P_{11} e^{i\omega_1 t} \tag{37}$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + c_2 (x_2 - x_1) = P_{20} e^{i\omega_0 t} + P_{21} e^{i\omega_1 t} \tag{38}$$

従って、動吸振部材が装着された単一ばり及び円弧アーチは、いずれも j 次モードの時間に関する未知関数 ρ_{1j} は、Fig.4の2質量2ばね1ダンパー系における主振動系の変位 ρ_{1j} の挙動で表されることがわかる。

2.2 動吸振部材の設計

外力及び変位の励振振動数が対象部材の j 次の固有振動数に近いと、対象部材の振動変位は j 次モードのみが卓越することから対象部材の振動変位は、次式で表される。

$$\text{単一ばり} : u_1 \doteq \rho_{1j}(t) V_j(x) \tag{39}$$

$$\text{アーチ} : u_1 \doteq \rho_{1j}(t) U_j(\theta)$$

$$u_2 \doteq \rho_{1j}(t) V_j(\theta) \tag{40}$$

$V_j(x)$, $U_j(\theta)$, $V_j(\theta)$ は定関数であることから $\rho_{1j}(t)$ を極小化することにより対象部材の振動を極小化できる。 $\rho_{1j}(t)$ の極小化は Fig.4に示す2自由度系における主振動系の変位を極小化することに帰着する。動吸振部材の調整に当たって、まずはじめに、 $\rho_{1j}(t)$ の極小化のための2自由度系における動吸振器の調整条件を求める。ここで、Fig.5に示すように周期外力作用時の2自由度系と変位加振時の2自由度系に分けて、それぞれに対する動吸振器の調整条件を求める。ついでこれらの条件を用いた動吸振部材の調整法を示す。

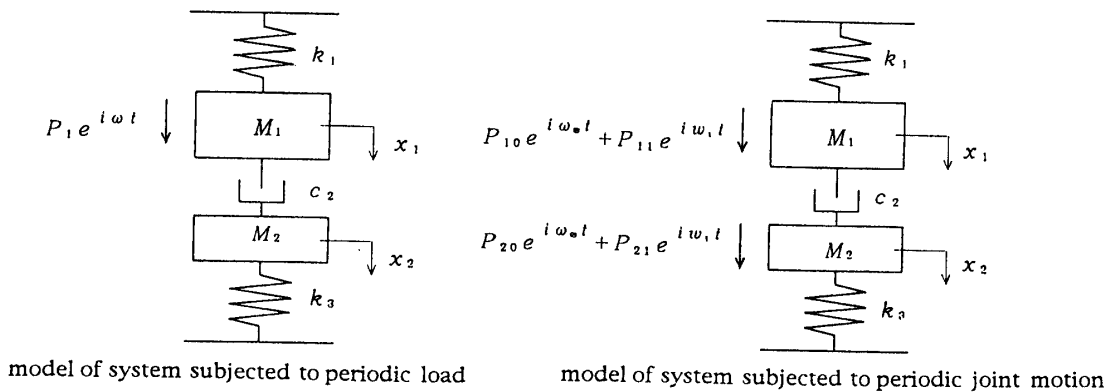


Fig.5 Two-degrees-of-freedom models of systems under harmonic excitation by periodic load and joint motion.

2.2.1 主振動系周期外力作用時の2自由度系における動吸振器の調整法

このケースは式(37), (38)において, P_1 のみが作用する場合 $P_{10}=P_{11}=P_{20}=P_{21}=0$ に相当する. 励振円振動数を $\omega=p$ として, 強制変位を $x_1=A_1e^{ipt}$, $x_2=A_2e^{ipt}$ で表わすとき, x_1 及び x_2 の実振幅 A_{r1} , A_{r2} はそれぞれ次式になる.

$$\left(\frac{A_{r1}}{x_{st}}\right)^2 = \frac{(f^2-g^2)^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2}{(1-g^2)^2(f^2-g^2)^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2[1-(1+\mu)g^2+\mu f^2]^2} = Y_1^2 \quad (41)$$

$$\left(\frac{A_{r2}}{x_{st}}\right)^2 = \frac{4f^2g^2(c_2/c_c)^2}{(1-g^2)^2(f^2-g^2)^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2[1-(1+\mu)g^2+\mu f^2]^2} = Y_2^2 \quad (42)$$

ここで, $x_{st}=P_1/k_1$,

$$\mu = M_2/M_1, \quad k_1/M_1 = \nu_1^2, \quad k_3/M_2 = \nu_3^2, \\ f = \nu_3/\nu_1, \quad g = p/\nu_1, \quad c_c = 2M_2\nu_3 \quad (43)$$

式(41)において, $\mu, f, g, (c_2/c_c)$ を変化させることによって動吸振器の制振効果を調べることができる.

減衰比 c_2/c_c , 固有振動数比 f および強制振動数比 g の変動に伴う共振振幅 Y_1 の極小値は以下の方法で求めることができる. ここで主振動系の固有円振動数 ν_1 と動吸振器の固有円振動数 ν_3 は, 一般に $\nu_3 \gg \nu_1$ の関係があるので, $f < 1.0$ の範囲について調整する. 質量比 μ 及び減衰比 c_2/c_c が与えられた状態で, g の変動に伴って Y_1^2 が極大値(共振振幅)をとる条件

$$\frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial g} = 0 \quad \text{ただし} \quad \bar{Y}_1 = Y_1^2 \quad (44)$$

すなわち

$$F(x, y, z) = \{(x-y)^2+4xyz\}[(1-y)(x-y)(2y-x-1) \\ +2xz\{1-(1+\mu)y+\mu x\}\{1-3(1+\mu)y+\mu x\}] \\ +\{(x-y)-2xz\}[(1-y)^2(x-y)^2 \\ +4xyz\{1-(1+\mu)y+\mu x\}^2] = 0$$

および $f < 1.0$ の範囲で上述の極大値 Y_{1max} が f の変動に伴って極小となる条件

$$\frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial f} = 0 \quad \text{ただし} \quad \bar{Y}_1 = Y_{1max}^2 \quad (46)$$

すなわち

$$G(x, y, z) = \{(x-y)^2+4xyz\}[(1-y)^2(x-y) \\ +2yz\{1-(1+\mu)y+\mu x\}\{1-(1+\mu)y+3\mu x\}] \\ -\{(x-y)+2yz\}[(1-y)^2(x-y)^2 \\ +4xyz\{1-(1+\mu)y+\mu x\}^2] = 0 \quad (47)$$

より, 主振動系の共振振幅 Y_{1max} の極小値とこの時の固有振動数比 f が求められる. 質量比 $\mu=0.05, 0.1$ および 0.2 のとき減衰比 $c_2/c_c=0.05 \sim 0.8$ についてニュートン・ラプソン法を用いて共振振幅の極小値と固有振動比を求めた結果を Table 1に示す.

Table.1 Optimum values for tuning dynamic absorber in two-degrees-of freedom model of the system subjected to periodic load.

μ	c_2/c_c	f	Y_1
0.05	0.05	0.84775	257.27
	0.10	0.72941	148.64
	0.20	0.66659	82.64
	0.40	0.53652	63.50
	0.60	0.45226	54.57
	0.80	0.39354	50.10
0.10	0.05	0.84626	128.94
	0.10	0.77132	74.62
	0.20	0.66319	43.96
	0.40	0.53149	32.31
	0.60	0.44631	27.69
	0.80	0.37665	25.44
0.20	0.05	0.84386	64.62
	0.10	0.76756	37.51
	0.20	0.65658	23.18
	0.40	0.52144	16.50
	0.60	0.43462	14.21
	0.80	0.37240	13.12

Table 1を用いた2自由度系における動吸振器の調整は下記の手順で行われる.

- ①. はじめに, 質量比 μ を設定し, 主振動系の制限振幅 Y_1 を設定する.
- ②. Table 1より最適な減衰比 c_2/c_c を求める. これより連結ダンパーの減衰係数 c_2 が与えられる.
- ③. この c_2/c_c に対応した固有振動数比 f が Table 1から与えられる. 式(43)の第2, 3および4式から, 動吸振器のばね k_3 が次式で与えられる.

$$k_3 = \mu k_1 f^2$$

2.2.2 主振動系及び動吸振器周期外力作用時の2自由度系における動吸振器の調整法

このケースは式(37)および(38)において $P_1=0$ の場合に相当する. 励振円振動数が $\omega_0=\omega_1=p$ の場合の強制変位を $x_1=A_1e^{ipt}$, $x_2=A_2e^{ipt}$ で表わすとき, x_1 および x_2 の実振幅 A_{r1} , A_{r2} はそれぞれ次式になる.

$$\left(\frac{A_{r1}}{x_{st}}\right)^2 = \frac{(f^2-g^2)^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2(1+\varepsilon)^2}{(1-g^2)^2(f^2-g^2)^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2[1-(1+\mu)g^2+\mu f^2]^2} = Y_1^2 \quad (48)$$

$$\left(\frac{A_{r2}}{x_{st}}\right)^2 = \frac{\{(\varepsilon/\mu)(1-g^2)\}^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2(1+\varepsilon)^2}{(1-g^2)^2(f^2-g^2)^2+4f^2g^2(c_2/c_c)^2[1-(1+\mu)g^2+\mu f^2]^2} = Y_2^2 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } x_{st} &= (P_{10} + P_{11})/k_1, \epsilon = (P_{20} + P_{21})/(P_{10} + P_{11}), \\ \mu &= M_2/M_1, k_1/M_1 = \nu_1^2, k_3/M_2 = \nu_3^2, \\ f &= \nu_3/\nu_1, g = p/\nu_1, c_c = 2M_2\nu_3 \end{aligned} \quad (50)$$

ここで2. 2. 1の場合と同様にして、与えられた質量比 μ および減衰比 c_2/c_c に対する共振振幅 Y_{1max} の極小値とこの時の固有振動数比 f を求めることができる。ここで g の変動にともなって Y_1^2 が極小値をとる条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \{(x-y)^2 + 4(1+\epsilon)^2xyz\}[(1-y)(x-y)(2y-x-1) \\ &\quad + 2xz\{1 - (1+\mu)y + \mu x\}\{1 - 3(21+\mu)y + \mu x\}] \\ &\quad + \{x-y - 2(1+\epsilon)^2xz\}[(1-y)^2(x-y)^2 \\ &\quad + 4xyz\{1 - (1+\mu)y + \mu x\}^2] = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$f < 1.0$ の範囲で f の変動にともなって Y_{1max} が極小値をとる条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \{(x-y)^2 + 4(1+\epsilon)^2xyz\}[(1-y)^2(x-y) \\ &\quad + 2yz\{1 - (1+\mu)y + \mu x\}\{1 - (1+\mu)y + 3\mu x\}] \\ &\quad - \{(x-y) + 2(1+\epsilon)^2yz\}[(1-y)^2(x-y)^2 \\ &\quad + 4xyz\{1 - (1+\mu)y + \mu x\}^2] = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

質量比 $\mu = 0.05, 0.1$ および 0.2 のとき、減衰比 $c_2/c_c = 0.05 \sim 0.8$ について上式にニュートン・ラプソン法を適用して求めた主振動系の共振振幅の極小値 Y_{1max} とこのときの固有円振動数比 f を Table 2 に示す。

このケースの Table 2 を用いた2自由度系における動吸振器の調整法は主振動系のみならず周期外力が作用する場合の動吸振器の調整法と同じである。

2.2.3 動吸振部材の調整法

対象部材と動吸振部材の j 次モードの挙動は Fig. 5 に示した2自由度系で表される。 $\rho_{1j}(t)$ が極小のとき式(39)および(40)より明らかなように対象部材の変位も極小値をとる。したがって、Fig. 5 に示される2自由度系の動吸振器の調整条件を用いて動吸振部材の調整条件を求めることができる。

動吸振部材の調整法は次の通りである。はじめに、対象部材と動吸振部材の材軸単位長さ当りの質量比 μ 及び対象部材の制限振動たわみ δ を設定する。ここで、対象部材の振動変位式(39)、(40)は式(41)、(48)の関係より次のように書き表すことができる。

$$\text{単一ばり: } u_1 \doteq A_{r1} V_j(x) = Y_1 x_{st} V_j(x) \quad (53)$$

$$\text{アーチ: } u_1 \doteq A_{r1} U_j(\theta) = Y_1 x_{st} U_j(\theta)$$

$$u_1 \doteq A_{r1} V_j(\theta) = Y_1 x_{st} V_j(\theta) \quad (54)$$

このとき制限振動たわみ δ と振動変位の関係は下記の通りとなる。

Table.2 Optimum values for tuning dynamic absorber in two-degrees-of-freedom model of the system subjected to periodic joint motion.

μ	c_2/c_c	f	Y_1
0.05	0.05	0.84379	258.71
	0.10	0.76661	149.78
	0.20	0.66211	93.65
	0.40	0.53168	65.00
	0.60	0.44719	55.58
	0.80	0.38606	51.05
0.10	0.05	0.84068	130.04
	0.10	0.76175	75.56
	0.20	0.65491	47.52
	0.40	0.52201	33.25
	0.60	0.43647	28.59
	0.80	0.37497	26.37
0.20	0.05	0.83450	65.72
	0.10	0.75215	38.46
	0.20	0.64082	24.46
	0.40	0.50338	17.39
	0.60	0.41607	15.11
	0.80	0.35412	14.03

$$\text{単一ばり: } \delta \geq Y_1 x_{st} V_j(x) \quad (55)$$

ここで、 $x_{st} = \frac{P V_j(a)}{m_1 \omega_{1j}^2} \dots$ 周期力加振

$$x_{st} = \frac{\alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j} + \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j}}{\omega_{1j}^2} \dots \text{周期変位加振}$$

$$\text{アーチ: } \delta \geq Y_1 x_{st} \sqrt{U_j(\theta)^2 + V_j(\theta)^2} \quad (56)$$

ここで、 $x_{st} = \frac{P_0 U_j(\beta) + P_r V_j(\beta)}{m_1 R_1 \omega_{1j}^2} \dots$ 周期力加振

$$x_{st} = \frac{\alpha_0 \omega_0^2 \beta_{0j} + R_1 \alpha_1 \omega_1^2 \beta_{1j}}{\omega_{1j}^2} \dots \text{周期変位加振}$$

したがって制限振動たわみ δ を与えたときの対象部材の基準座標 (ρ_{1j}) の制限振幅 Y_1 が次式から決まる。

$$\text{ここで、単一ばり: } Y_1 \leq \frac{\delta}{x_{st} V_j(x)} \quad (57)$$

$$\text{アーチ: } Y_1 \leq \frac{\delta}{x_{st} \sqrt{U_j(\theta)^2 + V_j(\theta)^2}} \quad (58)$$

以上の μ と Y_1 を用いて Table 1 及び 2 から減衰比 (c_2/c_c) 及び固有振動数比 $f (= \nu_3/\nu_1)$ を読みとることができる。

これらの値を用いて、単一ばりの場合の減衰係数 c 、 \bar{c} と動吸振ばりの曲げ剛性 EL_2 は次で与えられ、

$$\begin{cases} c = 2\mu m_1 (c_2/c_c) f \omega_{1j} \dots \text{case 1} \\ \bar{c} = 2\mu m_1 (c_2/c_c) f \omega_{1j} \cdot d \dots \text{case 2} \end{cases} \quad (59)$$

$$EI_2 = \mu f^2 EI_1 \quad (60)$$

また、アーチの場合の減衰係数 c , \bar{c} と断面 2 次モーメント I_2 と動吸振アーチの断面積 A_2 は次式で与えられる。

$$\begin{cases} c = 2\mu m_1 R_1 (c_2/c_0) f \omega_{1j} \cdots \cdots \text{case 1} \\ \bar{c} = 2\mu m_1 R_1 (c_2/c_0) f \omega_{1j} \cdot d \cdots \cdots \text{case 2} \end{cases} \quad (61)$$

$$I_2 = \mu \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 f^2 I_1 \quad (62)$$

$$A_2 = \mu \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 f^2 A_1 \quad (63)$$

以上の調整法により、動吸振部材を設計することができる。

3. 結 び

外力および変位による定常加振を受けるはりおよびアーチ部材に対する受動的振動制御法の一つとして、対象とするはりおよびアーチ部材と同じ境界条件を有し、相似な剛性を有する部材（ここでは動吸振部材と呼ぶ）を対象部材に部材軸方向に分布したダンパーで連結した動吸振システムを提案するとともに、このシステムの調整法を提示した。

本研究において、等分布の連結ダンパーおよび間隔が十分に狭い集中連結ダンパーを用いる場合、本システムを装備したはりおよびアーチ部材の運動方程式がモード座標系で 2 質量 2 ばね 1 ダンパーからなる 2 自由度系の運動方程式を同値であることを示した。この

2 自由度系の主振動系の振動を制御するための副振動系（動吸振器）の調整に必要な資料を下記のケースについて提示した。

- ① 主振動系にのみ周期外力が作用する場合
- ② 主振動系および副振動系（動吸振器）の両方に周期外力が作用する場合

ついて、この資料に基づき動吸振システム（連結ダンパーと動吸振部材）の調整手順を提示した。

以上の結果より、新しいタイプの動吸振器としての動吸振システムの設計が可能となった。

参考文献

- 1) Aida. T, Toda. S, Ogawa. N, and Imada. Y : Vibration Control of Beams by Beam-Type Dynamic Vibration Absorbers, ASCE, Journal of Engineering Mechanics, Vol.118, No2, pp. 248~258(1992)
- 2) Aida. T, Kwazoe. K, and Toda. S : Vibration Control of Plates by Plate-Type Dynamic Vibration Absorbers, ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.117, pp.332~338(1995)
- 3) 中本健二, 會田忠義, 麻生稔彦: 動吸振シェルによる偏平シェルの振動制御, 第36回構造強度に関する講演会講演集 (日本航空宇宙学会), pp. 129~132(1994)

(平成 7 年 4 月 14 日受理)