

拘束粘弾性層を有するはりの損失係数についての検討

麻生 稔彦*・會田 忠義*・伊藤 健二**

Loss Factor of the Sandwich Beam Consisting of Constrained Viscoelastic Layer

Toshihiko ASO, Tadayoshi AIDA and Kenji ITO

Abstract

Damping analysis of damped sandwich beam with viscoelastic cores has been reported by many investigators. In the majority of these studies, fully covered and simple supported sandwich beam was analyzed. Therefore, this study aims to clarify the influences of support condition and cover position of viscoelastic layer on loss factor of sandwich beam.

Loss factor is calculated as the ratio of energy dissipated per cycle to the maximum strain energy during a cycle of harmonic motion, the modes of vibration being assumed to be same as that of the base beam. From the comparison of results of four support conditions, Pin-Pin, Fix-Fix, Fix-Free, Fix-Pin, following properties became evident. Loss factor of sandwich beam is influenced considerably by support condition, 1st vibration mode of Pin-Pin support sandwich beam made maximum loss factor with fully covered viscoelastic layer. Loss factor become large when place the viscoelastic layer on the maximum curvature point of base beam, due to its large shear strain of viscoelastic layer.

1. 序 論

鉄鋼材料に代表される構造用金属材料は強度も高く、また成形加工性や溶接性等に非常に優れているが、振動を減衰させる減衰性能は小さい。そこで機械や構造物の振動・騒音を低下させるための手段として制振鋼板が使用されるようになってきた¹⁾。この制振鋼板は粘弾性樹脂をコアとして、このコアを2枚の鋼板でサンドイッチ状にはさんだ3層構造であり、変形時の粘弾性層の伸びひずみあるいはせん断ひずみにより高い減衰性を与えるものである。

粘弾性層を有するサンドイッチばりについての解析

的、実験的研究は多くの研究者によってなされてきている²⁾⁻⁵⁾。これらの研究においては、粘弾性層を有するはりの損失係数を連動方程式を解くことにより求めるものが多い。しかし、この場合には6階の微分方程式を解く必要があるため解を簡単な形に仮定する必要があり、多くは単純支持されたはりについての研究である。また、これらの研究では対象とするはりを全長に渡って粘弾性層で覆う場合を想定しており、粘弾性層の長さおよびその最適位置について論じられた研究は少なく⁶⁾、合理的に振動を低減する上でいまだ明確でない点も多いと考えられる。

そこで、本研究は粘弾性層を有するはりの損失係数について基礎的な特性を解析的に明らかにすることを目的とする。そのためにまずこの3層から成るサンドイッチ構造の損失係数を、曲げ変形時のひずみエネルギーより求めるための定式化を行った。これにより損

*社会建設工学科

**日産建設(株)

損失係数とはりの支持条件および振動モードとの関係を検討した。また、粘弾性層の設置位置を変化させることにより、最も大きな損失係数を得るための最適位置についての検討を行った。さらに、拘束層厚および粘弾性層厚が損失係数に与える影響も明らかにした。

2. 粘弾性層を有するサンドイッチばりの損失係数の解法⁷⁾⁸⁾

いま, Fig. 1 に示すサンドイッチばりを考える. Fig. 1 において①は高さ H_1 , 長さ L の基本ばりであり, 任意の支持条件を持つものとする. また, ②, ③はそれぞれ高さ H_2, H_3 の粘弾性層および拘束層であり, 基本ばりの左端より a の位置に置かれ, 長さはいずれも p_a である. また, 各層の幅はいずれも B で同一とする. 解析にあたっては次の仮定を設ける.

- (i) 第2層のヤング率は第1層, 第3層に比べて小さく, 第2層の曲げ応力, 軸力の分担は第1層, 第3層に比べて無視しうほど小さい.
- (ii) 3つの層の z 方向変位は等しい.
- (iii) 第1層, 第3層のせん断変形はゼロである.
- (iv) はりの断面は各層とも変形後も平面が保持される.

以上の仮定により, Fig. 1 において考慮する変位は基本ばりの軸方向変位 u_1 , 拘束層の軸方向変位 u_3 および各層の上下方向変位 w とする.

Fig. 1 のサンドイッチ部分における長さ dx の微少要素に作用する力を示すと Fig. 2 となる. Fig. 2 において, T, Q, M はそれぞれ各層に作用する軸力, せん断力, 曲げモーメントであり, μ は各層の密度である. また, τ_2 は粘弾性層と基本ばりおよび拘束層との間に生じるせん断応力である. ここで, 添字の 1, 2, 3 はそれぞれ基本ばり, 粘弾性層, 拘束層を示す. Fig. 2 よりこの微少要素についての力の釣合いは次のように表される.

z 方向の力の釣合い

$$-\frac{\partial}{\partial x} (Q_1 + Q_2 + Q_3) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F(x, t) = 0 \tag{1}$$

x 方向の力の釣合い

$$T_2 + T_3 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} = \tau^2 B = -\frac{\partial T_1}{\partial x} \tag{3}$$

モーメントの釣合い

$$\frac{Q_2}{H_2} = \tau_2 B \tag{4}$$

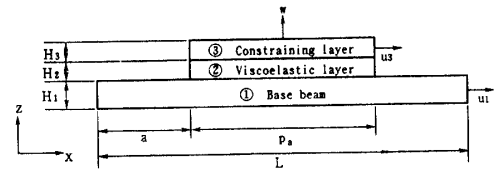


Fig. 1 Geometry and co-ordinate system of the partially covered sandwich beam

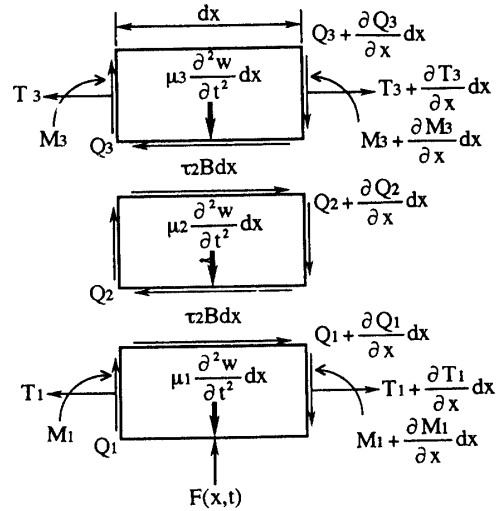


Fig. 2 Forces and moments acting on element of sandwich beam

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} = Q_1 + \tau_2 B \frac{H_1}{2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial x} = Q_3 + \tau_2 B \frac{H_3}{2} \tag{6}$$

次に, 変形と断面力との関係は次式で表される. ここで, E, I はそれぞれヤング率, 断面二次モーメントである.

$$M_1 = E_1 I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad I_1 = BH^3/12 \tag{7}$$

$$M_3 = E_3 I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad I_3 = BH^3/12 \tag{8}$$

$$T_1 = E_1 H_1 B \frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{9}$$

$$T_3 = E_3 H_3 B \frac{\partial u_3}{\partial x} \tag{10}$$

これらの関係のうち(2), (9), (10)より

$$E_1 B H_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + E_3 B H_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

となることから、 u_1 と u_3 は以下の関係を持つ。

$$u_1 = -\frac{E_3 H_3}{E_1 H_1} u_3 \quad (12)$$

ここで、粘弾性層のせん断変形は先に設けた仮定に従って Fig. 3 のように示される。Fig. 3 より粘弾性層のせん断ひずみ γ は u_1 , u_3 および w を用いて次のように示される。

$$\gamma = \frac{1}{H_2} \left\{ u_3 - u_1 + \left(\frac{H_1}{2} + H_2 + \frac{H_3}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \quad (13)$$

粘弾性層のせん断弾性係数を G とすると、粘弾性層に生じるせん断応力 τ_2 は (13) より

$$\tau_2 = G \gamma = \frac{G}{H_2} \left\{ u_3 - u_1 + \left(\frac{H_1}{2} + H_2 + \frac{H_3}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \quad (14)$$

また、(3), (10) より

$$\tau_2 = E_3 H_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \quad (15)$$

となる。(14) と (15) は等値であり、(12) の関係を用いることにより u_3 と w についての次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - R u_3 = R S T \frac{\partial w}{\partial x} \quad (16)$$

$$\text{ここで、} R = \frac{G}{H_2} \left(\frac{1}{E_1 H_1} + \frac{1}{E_3 H_3} \right) \quad (17)$$

$$S = \frac{E_1 H_1}{E_1 H_1 + E_3 H_3} \quad (18)$$

$$T = \frac{1}{2} (H_1 + 2H_2 + H_3) \quad (19)$$

はりの上下方向変位 w を与え (16) の微分方程式を解くことにより拘束層の軸方向変位 u_3 が求められる。

いま、任意の支持条件を有する基本ばりの振動変位を次式で仮定する。

$$w = A_1 \sin \lambda_n x + A_2 \cos \lambda_n x + A_3 \sinh \lambda_n x + A_4 \cosh \lambda_n x \quad (20)$$

式中、 $A_1 \sim A_4$ および $\lambda_n (n=1, 2, \dots)$ は支持条件、振動次数によって定められる定数である。(20) を (16) に代入することにより u_3 は次式となる。

$$u_3 = C_1 \cosh \sqrt{R} x + C_2 \sinh \sqrt{R} x + X_1 \sin \lambda_n x + X_2 \cos \lambda_n x + X_3 \sinh \lambda_n x + X_4 \cosh \lambda_n x$$

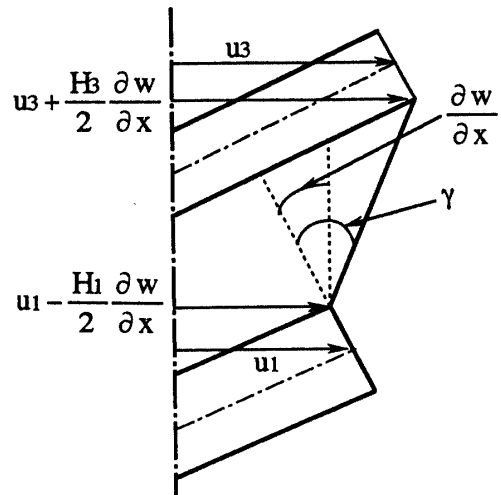


Fig. 3 Shearing displacement of the sandwich element

ここで、 C_1, C_2 : 境界条件より定まる定数

$$X_1 = \frac{R S T A_2 \lambda_n}{R + \lambda_n^2}, \quad X_2 = -\frac{R S T A_1 \lambda_n}{R + \lambda_n^2}$$

$$X_3 = \frac{R S T A_4 \lambda_n}{R - \lambda_n^2}, \quad X_4 = \frac{R S T A_3 \lambda_n}{R - \lambda_n^2}$$

(21) 中の未定定数は拘束層の両端において軸力が 0 となる境界条件 (22) により求められる。

$$x = a : \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \quad x = a + p_a : \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

これより

$$C_1 = \frac{1}{C_{11}} (C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15}) \quad (23)$$

$$C_2 = \frac{1}{C_{21}} (C_{22} + C_{23} + C_{24} + C_{25}) \quad (24)$$

ここで、

$$C_{11} = \sqrt{R} \{ \sinh \sqrt{R} a \cdot \cosh \sqrt{R} (a + p_a) - \sinh \sqrt{R} (a + p_a) \cdot \cosh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{12} = -X_1 \lambda_n \{ \cos \lambda_n a \cdot \cosh \sqrt{R} (a + p_a) - \cos \lambda_n (a + p_a) \cdot \cosh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{13} = X_2 \lambda_n \{ \sin \lambda_n a \cdot \cosh \sqrt{R} (a + p_a) - \sin \lambda_n (a + p_a) \cdot \cosh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{14} = -X_3 \lambda_n \{ \cosh \lambda_n a \cdot \cosh \sqrt{R} (a + p_a) - \cosh \lambda_n (a + p_a) \cdot \cosh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{15} = -X_4 \lambda_n \{ \sinh \lambda_n a \cdot \cosh \sqrt{R} (a + p_a) \\ - \sinh \lambda_n (a + p_a) \cdot \cosh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{21} = \sqrt{R} \{ \cosh \sqrt{R} a \cdot \sinh \sqrt{R} (a + p_a) \\ - \cosh \sqrt{R} (a + p_a) \cdot \sinh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{22} = -X_1 \lambda_n \{ \cos \lambda_n a \cdot \sinh \sqrt{R} (a + p_a) \\ - \cos \lambda_n (a + p_a) \cdot \sinh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{23} = X_2 \lambda_n \{ \sin \lambda_n a \cdot \sinh \sqrt{R} (a + p_a) \\ - \sin \lambda_n (a + p_a) \cdot \sinh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{24} = -X_3 \lambda_n \{ \cosh \lambda_n a \cdot \sinh \sqrt{R} (a + p_a) \\ - \cosh \lambda_n (a + p_a) \cdot \sinh \sqrt{R} a \}$$

$$C_{25} = -X_4 \lambda_n \{ \sinh \lambda_n a \cdot \sinh \sqrt{R} (a + p_a) \\ - \sinh \lambda_n (a + p_a) \cdot \sinh \sqrt{R} a \}$$

以上により、基本ばりの振動変位 w を (20) で仮定した場合の拘束層の伸び u_3 は (21) で、また基本ばりの伸び u_1 は (12) より求められる。

一方、粘弾性層がせん断ひずみにより 1 周期中に消費するひずみエネルギー ΔE は次のように表すことができる。

$$\Delta E = 2\pi \left[\frac{1}{2} BG^* \beta H_2 \int_a^{a+p_a} |\gamma|^2 dx \right] \quad (25)$$

式中、 G^* は粘弾性層の複素せん断弾性係数の実部であり、 β は粘弾性層の材料損失係数である。また、系の全ひずみエネルギー E は考えられるすべてのひずみエネルギーの和で与えられ、第 1 層、第 3 層の曲げと伸びによるひずみエネルギーおよび第 2 層のせん断によるひずみエネルギーの和を求めることにより、次式となる。

$$E = \frac{1}{2} E_3 B H_3 \int_a^{a+p_a} \left| \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|^2 dx \\ + \frac{1}{2} E_1 B H_1 \int_0^L \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|^2 dx \\ + \frac{1}{2} \frac{E_3 B H_3^3}{12} \int_a^{a+p_a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\ + \frac{1}{2} \frac{E_1 B H_1^3}{12} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\ + \frac{1}{2} G^* B H_2 \int_a^{a+p_a} |\gamma|^2 dx \quad (26)$$

損失係数 η は 1 周期中の系の最大ひずみエネルギーと粘弾性層により 1 周期中に消費されるひずみエネルギーの比として与えられ次式となる。

$$\eta = \frac{\Delta E}{2\pi E} \quad (27)$$

なお、(27) で求められる損失係数 η と、構造物の減衰性を表すためによく用いられる対数減衰率 δ との間には次の関係がある。

$$\delta = \pi \eta \quad (28)$$

3. 数値解析

3.1 解析条件

第 2 章で示した解析法を用いて数値解析を行った。ここで用いた解析条件を以下に示す。

粘弾性層の材料：高減衰ゴム

$$G^* = 4.9 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad \beta = 0.30$$

支持条件：ピン-ピン，固定-固定，

固定-自由，固定-ピン

はりの長さ：2.0m

はりの幅：1.0m

基本ばりの厚さ：1.0cm

粘弾性層の厚さ：0.5cm

拘束層の厚さ：0.2cm

基本ばりの弾性係数： 2.06×10^{11} Pa

拘束層の弾性係数： 2.06×10^{11} Pa

解析対象振動次数：1 ~ 4 次

3.2 被覆率が損失係数に与える影響

粘弾性層が基本ばりを覆う割合 (被覆率 ξ) が損失係数 η に与える影響について検討する。ここで、被覆率 ξ は基本ばりの全長に対する粘弾性層および拘束層の長さの比と定義し、次式により示される。

$$\xi = Pa/L \quad (28)$$

まず、各支持条件とも左端より徐々に被覆し、最終的にはり全体を覆う ($\xi=1$) ように ξ を変化させ η を求めた。Fig. 4 に解析結果を示す。Fig. 4 より支持条件、振動次数によらず、 ξ が 0.2 以下では η は非常に小さく、その後の ξ の増加につれ η も増加していることがわかる。特にいずれのはりについても 1 次振動の η が大きくなっている。しかし、固定-自由では、はり全体を覆った場合 ($\xi=1$) に 2 次振動における η が最も大きくなっている。また、支持条件で比較すると、ピン-ピンで支持した場合の 1 次振動における η が非常に大きい。したがって、 η は支持条件、振動次数、被覆率により大きく変化することが明かとなった。

ここで、Fig. 4 はいずれのはりについても左端から被覆した場合の結果であるが、被覆の進行による影響を検討するために、支持条件が左右とも等しいピン-

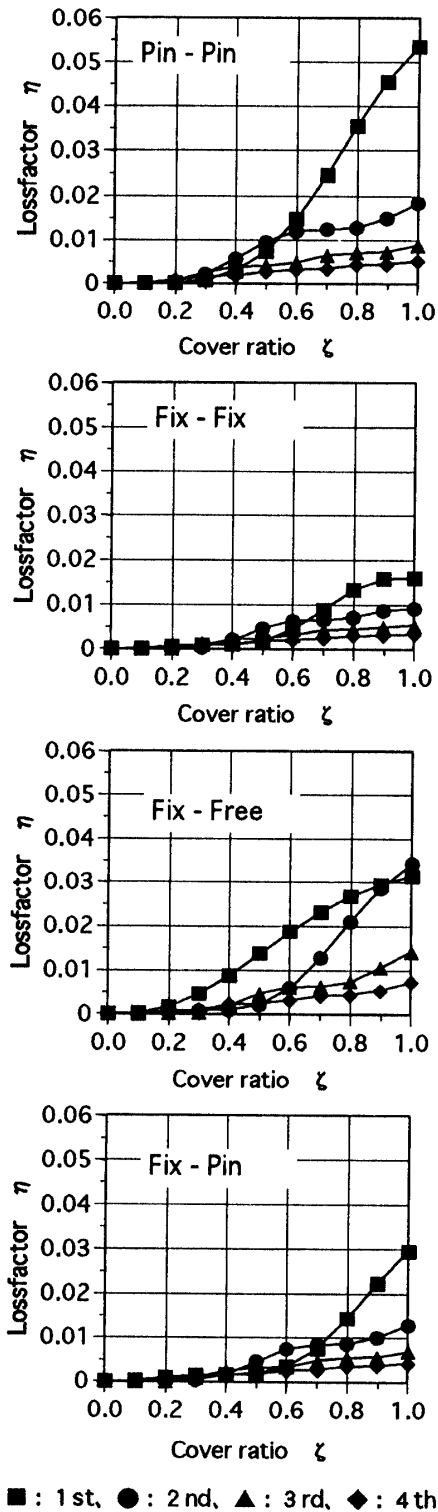


Fig. 4 Effect of cover ratio on loss factor
(Place viscoelastic layer from left edge to right edge)

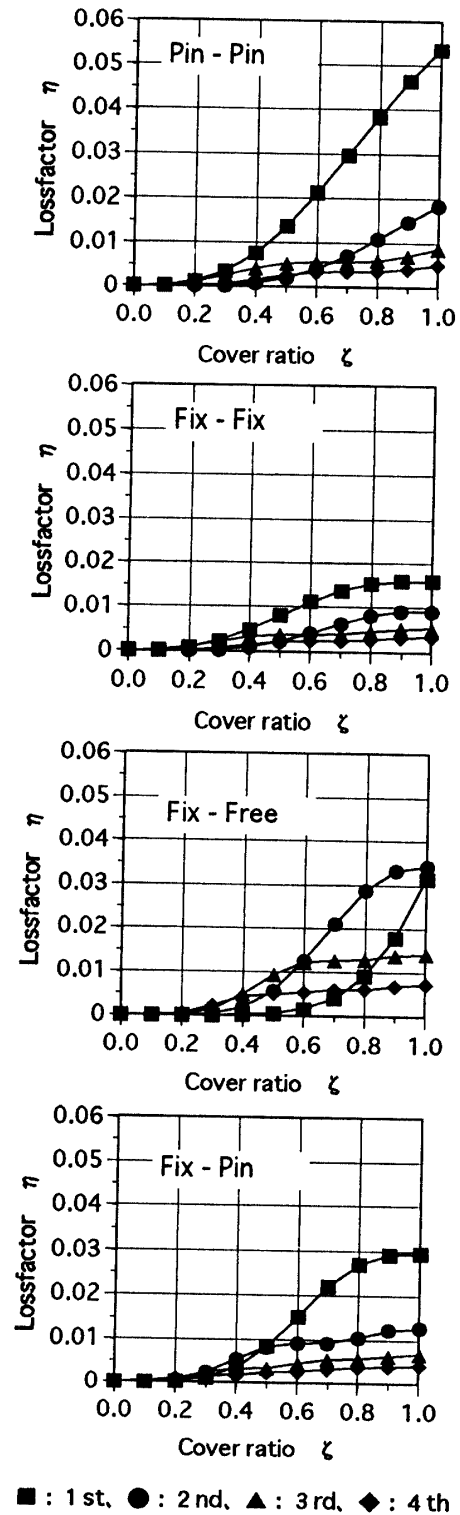


Fig. 5 Effect of cover ratio on loss factor
(Pin-Pin, Fix-Fix : Place viscoelastic layer from center to both edges,
Fix-Free, Fix-Pin : Place viscoelastic layer from right edge to left edge)

ピン、固定-固定については中央より左右対称に、支持条件が左右で異なる固定-自由、固定-ピンについては右端から被覆した場合の結果を Fig. 5 に示す。

Fig. 4 と Fig. 5 を比較すると、同じ被覆率においてもその被覆位置により η が異なることがわかる。特に固定-自由の場合には、固定端から被覆した場合と自由端から被覆した場合とはその傾向が大きく異なり、自由端からの被覆を行うと、2次振動の η が $\xi=0.6$ 以上で1次振動の η よりも大きくなっている。また固定-ピンの場合にもピン端から被覆すると1次振動について $\xi=0.4$ 以上で η が大きくなっている。

以上の結果より、支持条件、振動モードにより最適な被覆位置があるものと考えられる。

3.3 被覆位置が損失係数に与える影響

3.2の結果より、被覆位置により η が異なるものと考えられるため、ピン-ピンおよび固定-自由の場合について被覆率 $\xi=0.2$ とし、被覆位置を左端から右端まで移動させ損失係数の変化を調べた。これにより得られた損失係数をピン-ピンについては Fig. 6 に、固定-自由については Fig. 7 に示す。これらの図において横軸ははりの長さに対する左端から粘弾性層中央までの

長さの比 ξ であり、次式で求められる。

$$\xi = (a + \frac{Pa}{2})/L \quad (29)$$

両端単純支持の場合の損失係数 η は $\xi=0.5$ を中心として左右対称となっている。このことは、はり中央に対して同じ位置を被覆すると同じ η が得られることを示している。これはピン-ピンのように左右とも同じ支持条件であれば、振動モードは左右対称あるいは左右逆対称であるためと考えられる。一方、固定-自由ではこのような傾向はみられない。

Fig. 6, Fig. 7 の結果を (20) で仮定した各次数の振動モードと比較すると、基本ばりの曲げ曲率の大きな位置を被覆した場合に η が大きくなっていることがわかる。これは曲げ変形の大きな位置では基本ばりと拘束層の伸びの違いにより、粘弾性層に大きなせん断ひずみが生じるためと考えられる。

3.4 拘束層の厚さが損失係数に与える影響

既往の研究では拘束層の厚さは基本ばりの厚さに比べて小さいとの仮定で解析が行われているが、拘束層厚が損失係数 η に与える影響は詳細には検討されてい

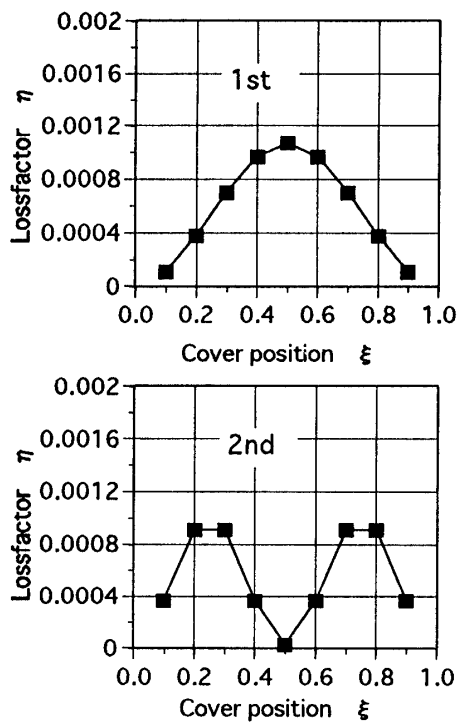


Fig. 6 Effect of cover position on loss factor of Pin-Pin support beam

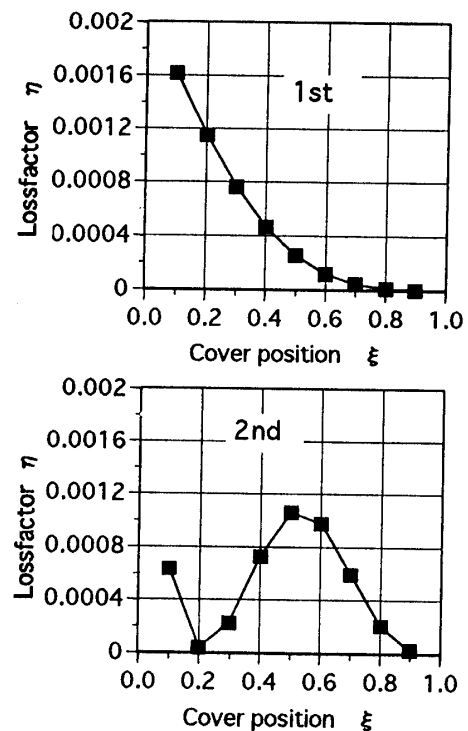


Fig. 7 Effect of cover position on loss factor of Fix-Free support beam

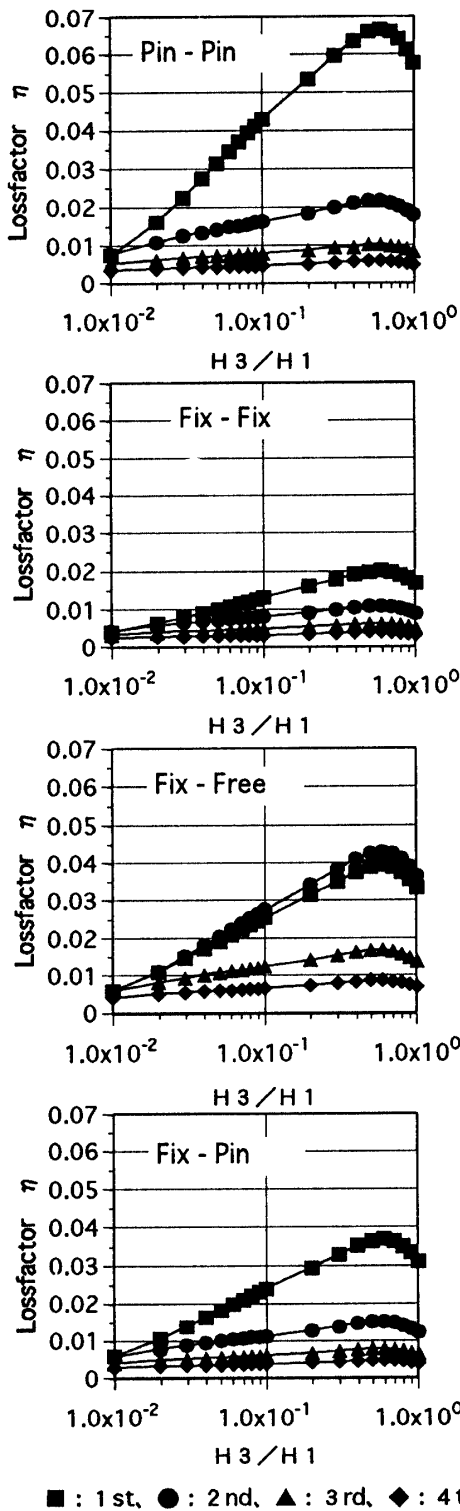


Fig. 8 Effect of constraining layer thickness on loss factor

ない。そこで、基本ばりおよび粘弾性層の厚さを一定とし拘束層の厚さを変化させた場合の損失係数を求め

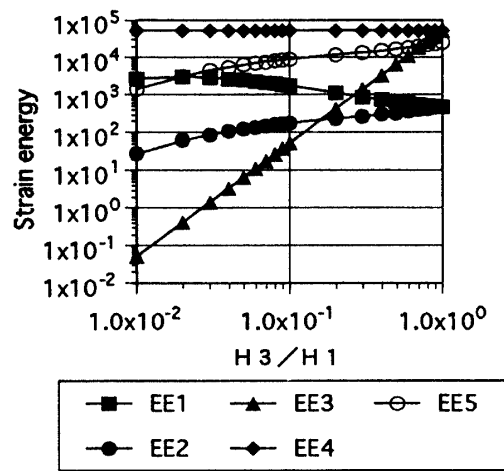


Fig. 9 Effect of constraining layer thickness on strain energy

た、粘弾性層の被覆率 $\zeta=1.0$ の場合の結果を Fig. 8 に示す。Fig. 8 において横軸は基本ばりの厚さ H_1 に対する拘束層の厚さ H_3 の比 H_3/H_1 である。Fig. 8 から全ての支持条件、振動次数において H_3/H_1 が 0.6 付近で η が極大となっていることがわかる。ここで、 $H_3/H_1=0.6$ 付近で η が極大となる現象をひずみエネルギーの変化より考察する。Fig. 9 に Fig. 8 におけるピン-ピンの 1 次振動のひずみエネルギーの変化を示している。Fig. 9 は (26) の中で示される全てのひずみエネルギーの変化を示したものであり、EE1 は拘束層の伸びひずみエネルギー、EE2 は基本ばりの伸びひずみエネルギー、EE3 は拘束層の曲げひずみエネルギー、EE4 は基本ばりの曲げひずみエネルギー、EE5 はせん断層のせん断ひずみエネルギーである。Fig. 10 から EE4 は H_3/H_1 によらず一定であること、 H_3/H_1 が増加するにつれ EE1 は小さくなるが、EE2、EE3、EE5 は大きくなることわかる。特に EE3 の増加率は他のエネルギーの増加率に比べて大きく、 $H_3/H_1=1.0$ では基本ばりの曲げひずみエネルギーと等しくなっている。EE3 と EE5 を比較すると $H_3/H_1=0.6$ 付近を境にして EE3 が EE5 よりも大きくなっている。このために (27) の分母が大きくなり、損失係数が減少すると考えられる。

3.5 粘弾性層の厚さが損失係数に与える影響

粘弾性層の厚さが損失係数に与える影響を検討するために、基本ばりを全長に渡って被覆 ($\zeta=1$) し、粘弾性層の厚さを変化させ損失係数 η を求めた。この結果を Fig. 10 に示す。ここで、Fig. 10 の横軸は H_2/H_1 で

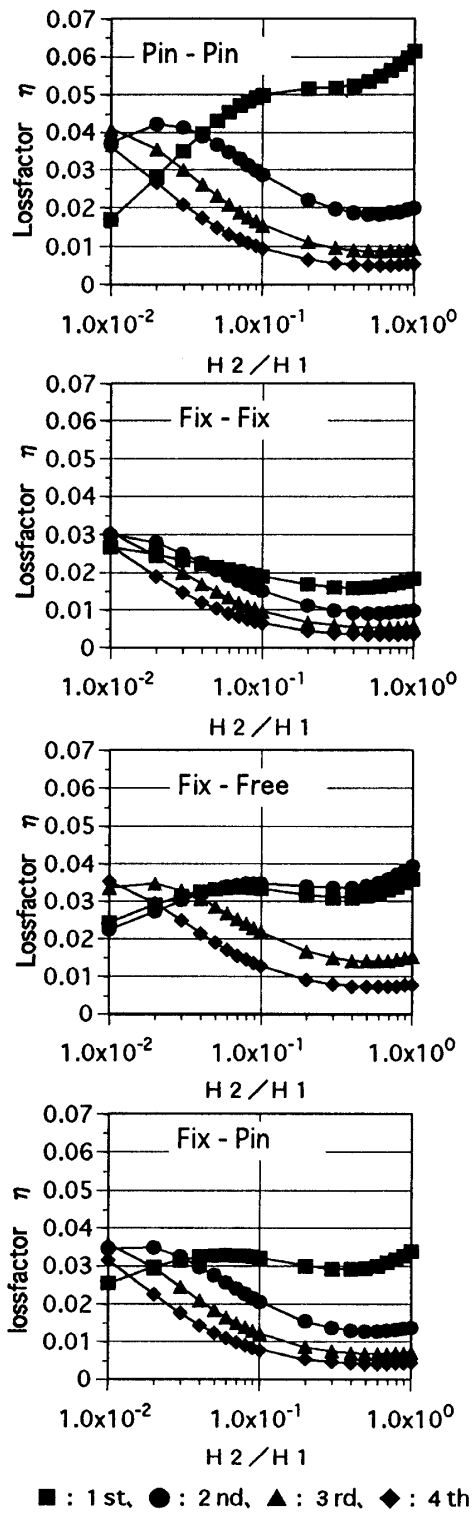


Fig.10 Effect of viscoelastic layer thickness on loss factor

あり、基本ばりの厚さに対する粘弾性層の厚さの比である。Fig.10から支持条件によらず3次振動と4次振

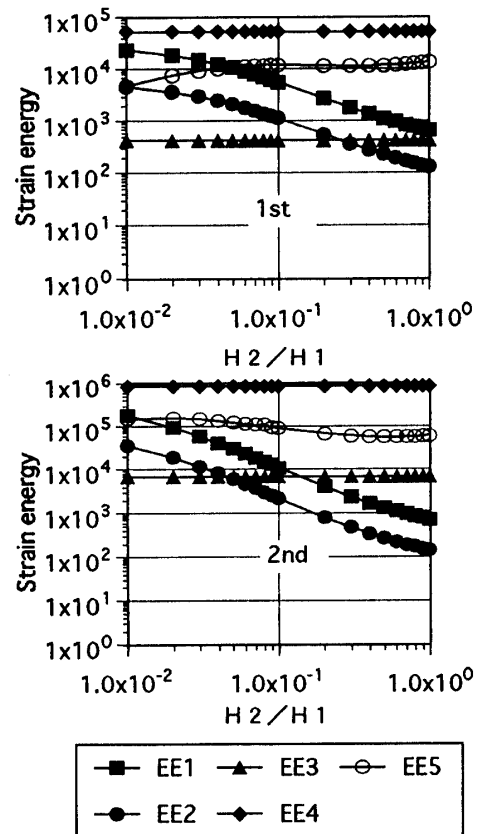


Fig.11 Effect of viscoelastic layer thickness on strain energy

動については H_2/H_1 が増加するにつれ η は減少し、 H_2/H_1 が0.6以上ではほぼ η は一定となっている。しかし、ピン-ピンの1次振動、固定-自由の1、2次振動および固定-ピンの1次振動では H_2/H_1 の増加により η も大きくなり、他と異なった傾向を示している。

ここで、Fig.11はピン-ピンの場合について1、2次振動のひずみエネルギーの変化をFig.9と同様に示したものである。1次振動と2次振動ではいずれもEE3および簡E4は一定であり、EE1、EE2は H_2/H_1 が増加するにつれ小さくなる。しかし、EE5は1次振動においてのみ H_2/H_1 の増加につれて大きくなっている。このEE5の変化が1次振動に特徴的であり、これにより η も1次振動だけが異なっていると考えられる。以上の傾向は他の支持条件についても同様であった。

4. 結 論

本研究により拘束粘弾性層を有するはりの損失係数について以下のような特性が明らかとなった。

- (1) 損失係数は支持条件, 振動次数によって変化し, 高次振動になるほど損失係数は小さい.
- (2) 損失係数は粘弾性層の被覆率の影響を受ける. 被覆率が大きくなると損失係数の値は大きくなり, 基本ばりを全長に渡って被覆した場合に最も大きな損失係数が得られる.
- (3) 損失係数は粘弾性層の被覆位置によって変化し, これは基本ばりの各振動モードにおける曲げ曲率に関係する. 基本ばりの曲率が大きい位置では粘弾性層のせん断ひずみが大きいため, この位置を被覆することにより大きな損失係数が得られる.
- (4) 拘束層厚および粘弾性層厚を変化させ損失係数を求めたところ, 損失係数はこれらの影響も強く受けることが明らかになった.

最後に (株) 横河ブリッジの今田安男氏には高減衰ゴムの諸物性についての資料を提供していただいた. 記して感謝します.

参考文献

- 1) 時田保夫 他: 防振制御ハンドブック, フジ・テクノシステム, 1992
- 2) Unger, E. E.: Loss factors of viscoelastically damped beam structures, J. Acoustical Society of America Vol.34 No.8, pp. 1082-1089, 1962
- 3) Ditaranto, R. A.: Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams, J. Applied Mechanics 32, pp. 881-886, 1965
- 4) Mead, D. J. et. al.: The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions, J. Sound and Vibration Vol.10 No.2, pp.163-175, 1969
- 5) Mead, D. J. et al: Loss factors and resonant frequencies of encastre damped sandwich beams, J. Sound and Vibration Vol.12 No.1, pp. 99-112, 1970
- 6) Lall, A. K. et. al.: Damping analysis of partially covered sandwich beams, J. Sound and Vibration Vol.123 No.2, pp.247-259, 1988
- 7) 小林繁夫: 振動学, 丸善, 1994
- 8) 林 毅: 軽構造の理論とその応用(上), JUSE 出版社, 1966

(平成7年4月14日受理)