

# 折れ線要素を用いた二次元静弾性境界要素法

河野俊一\*

## Polygonal Line Element for Two Dimensional Elastostatic Boundary Element Method

Shunichi KAWANO

### Abstract

This report proposes a new element, a polygonal line element, for two dimensional elastostatic analysis by the boundary element method and shows special technique for analytical integrations to overcome singularities of integrants. In addition, the stresses on boundary can be obtained by this method without using the numerical integrations. In order to evaluate the accuracy for the proposed element, the author analyzes the stress concentration factor for bending of a plate with a deep hyperbolic notch. It is made obvious that sufficiently accurate solutions can be obtained with better efficiency than that by using line elements.

### 1. はじめに

境界要素法による計算誤差は、桁落ち等の計算機自身の誤差を除くと、主として要素形状等の離散化に伴う誤差と数値積分誤差に大別できる。前者の誤差を低減させる方法として、誤差の予測とそれに基づく要素の再分割を行うアダプティブ法<sup>1),2)</sup>が提案されている。一方、後者の数値積分誤差に対しては、高久田等<sup>3)</sup>の節点における変位および表面力を滑らかに補間する方法、特異積分を避けた Patterson 等<sup>4)</sup>、結城等<sup>5)</sup>の方法、誤差評価によって Gauss の積分の次数を決定する北川等<sup>6)</sup>多くの研究が報告されている。

ところで、二次元静弾性問題に対しては、東町等<sup>7)</sup>の報告にあるように、線形要素は積分を解析的に求めることができるので、数値積分による誤差を回避できる。しかし、沢田等<sup>8)</sup>が指摘しているように、線形要素は曲げ問題に対しては精度が良くないので、解の精度を向上させるには節点数を多くとる必要がある。

一方、アイソパラメトリック要素は、要素内の変位及び表面力の分布が二次曲線で近似されるために、少

ない節点数で精度良く曲げ問題を解析できるが、解析的な積分が困難であるので、数値積分誤差に対して注意を払わなければならない。

そこで本報告では、二次元静弾性境界要素法を対象として、要素内の変位及び表面力の分布を二次曲線で仮定しても解析的な積分が可能な折れ線要素を提案する。さらに、折れ線要素と一次要素の計算結果を比較し、本方法の妥当性を検討する。

### 2. 折れ線要素を用いた境界要素法の定式化

#### 2.1 基礎式の導出

境界  $\Gamma$  の領域内の点  $P$  の変位  $u_i(P)$  は、相反定理より次のように与えられている。

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} (u_{ik}^* p_k - p_{ik}^* u_k) d\Gamma \quad (1)$$

ここで、 $u_{ik}^*$  と  $p_{ik}^*$  は次式で示す Kelvin の基本解、 $p_k$  および  $u_k$  はそれぞれ  $\Gamma$  上の表面力および変位、 $u_i(P)$  は点  $P$  における変位であり、物体力は考えないものとする。また、以後  $P$  を着力点と呼ぶ。

$$u_{ik}^* = C_U [(3 - 4\nu) \ln(1/r) \delta_{ik} + x_i x_k / r^2] \quad (2)$$

\*機械工学科

$$\begin{aligned}
 p_{ik}^* &= C_P \left[ \left\{ (1-2\nu^*) \delta_{ik} + 2x_i x_k / r^2 \right\} (x_1 n_1 + x_2 n_2) \right. \\
 &\quad \left. - (1-2\nu^*) (x_1 n_k - x_k n_1) \right] / r^2 \\
 C_U &= 1 / \{ 8\pi\mu^* (1-\nu^*) \}, \quad C_P = -1 / \{ 4\pi (1-\nu^*) \} \\
 \mu &= \bar{E} / \{ 2(1+\nu^*) \} \\
 \bar{E} &= E(1+2\nu) / (1+\nu)^2 \\
 \nu &= \nu / (1+\nu) \\
 E &= E, \quad \nu = \nu
 \end{aligned}$$

平面応力

平面ひずみ

なお、 $x_i = X_i - \xi_i$ ,  $X_i$ は固定座標,  $\xi_i$ は着力点の座標,  $E$ は縦弾性係数,  $\nu$ はポアソン比,  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ である. 式(1)の着力点Pを $\Gamma$ 上にとれば境界積分方程式が得られるが, 本研究では離散化後に点Pを節点に移行する方法を採用する.

ここで Fig. 1 に示すような折れ線上の変位及び表面力を, 折れ線に沿った長さ  $s$  の二次式で近似する.

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2, \quad (f = u, p) \quad (3)$$

要素の各節点における変位及び表面力をそれぞれ  $\{\bar{u}\}$  及び  $\{\bar{p}\}$  とすると, 要素内の変位  $\{u\}$  は次式で表される.

$$\begin{aligned}
 \{u\} &= [A][H]\{\bar{u}\} \\
 \{\bar{u}\} &= \{u_1^i \ u_2^i \ u_1^j \ u_2^j \ u_1^k \ u_2^k\}^T \\
 [A] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s & 0 & s^2 \end{pmatrix} \\
 [H] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & 0 & h_{33} & 0 & h_{35} & 0 \\ 0 & h_{42} & 0 & h_{44} & 0 & h_{45} \\ h_{51} & 0 & h_{53} & 0 & h_{55} & 0 \\ 0 & h_{62} & 0 & h_{64} & 0 & h_{66} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (4)$$

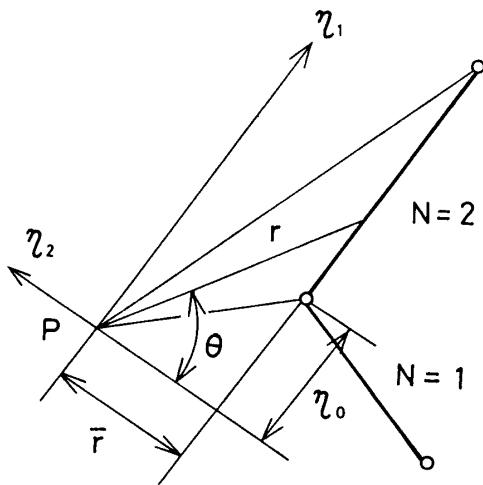


Fig. 1 Polygonal line element.

$$\begin{aligned}
 h_{31} &= h_{42} = -(1+\lambda) / (\lambda s_T) \\
 h_{33} &= h_{44} = 1 / \{ \lambda (1-\lambda) s_T \} \\
 h_{35} &= h_{46} = -\lambda / \{ (1-\lambda) s_T \} \\
 h_{51} &= h_{62} = 1 / (\lambda s_T^2) \\
 h_{53} &= h_{64} = -1 / \{ \lambda (1-\lambda) s_T^2 \} \\
 h_{55} &= h_{66} = 1 / \{ (1-\lambda) s_T^2 \}
 \end{aligned}$$

ここで,  $s_T$ は要素の全長,  $\lambda$ はサブ要素1の長さ $s_1$ と $s_T$ との比である. 表面力に対しては, 式(4)の $u$ を $P$ に置き換えればよい. 式(4)を用いて式(1)を離散化すると

$$\begin{aligned}
 \{u(P)\} &= \Sigma \left( \int \left[ \begin{matrix} \bar{u}^* & s \bar{u}^* & s^2 \bar{u}^* \end{matrix} \right] ds [H] \{\bar{p}\} \right. \\
 &\quad \left. - \int \left[ \begin{matrix} \bar{p}^* & s \bar{p}^* & s^2 \bar{p}^* \end{matrix} \right] ds [H] \{\bar{u}\} \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^* &= \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} & \bar{p}^* &= \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる. ここで, Fig. 1 に示すようにサブ要素に平行に  $\eta_1$  軸, それと垂直に  $\eta_2$  軸をとり, 次式で示す座標変換を行うと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

要素に沿った長さ  $s$  は次式で表される.

$$s = \eta_1 + b, \quad b = (N-1)\lambda s_T - \eta_0$$

ただし, 式(6)の  $l_i$  および  $m_i$  はそれぞれ  $\eta_1$  軸及び  $\eta_2$  軸の固定座標に対する方向余弦,  $N$  はサブ要素番号を表している. 上式を式(5)に代入して整理すると

$$\begin{aligned}
 \{u(P)\} &= \Sigma \left( \int \left[ \begin{matrix} \bar{u}^* & (\eta_1+b) \bar{u}^* \\ & (\eta_1^2+2b\eta_1+b^2) \bar{u}^* \end{matrix} \right] d\eta_1 [H] \{\bar{p}\} \right. \\
 &\quad \left. - \int \left[ \begin{matrix} \bar{p}^* & (\eta_1+b) \bar{p}^* \\ & (\eta_1^2+2b\eta_1+b^2) \bar{p}^* \end{matrix} \right] d\eta_1 [H] \{\bar{u}\} \right) \dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

式(7)左辺の着力点Pを境界上の節点に移行することにより, 折れ線要素を用いた静弾性境界要素法の基礎式が導出できる.

次に, 式(7)の係数マトリックスの計算方法を示す. 式(2)の各項を式(6)のように座標変換すると

$$\left. \begin{aligned} x_1 n_1 + x_2 x_2 &= -\eta_2 \\ x_1 n_k - x_2 n_k &= d_{1k} \eta_1 \\ x_1 x_k &= l_1 l_k r^2 + (l_1 m_k + l_k m_1) \eta_2 \eta_1 \\ &\quad + (m_1 m_k - l_1 l_k) \eta_2^2 \\ d_{11} &= d_{22} = 0, \quad d_{12} = -1, \quad d_{21} = 1 \end{aligned} \right\} (8)$$

上式を用いると、式(7) 右辺の係数マトリックスは次の積分を行うことによって求めることができる。

$$\begin{aligned} \int u_{1k}^* d\eta_1 &= C_U [c_1 \int \ln(1/r) d\eta_1 + c_2 \int d\eta_1 \\ &\quad + c_3 \eta_2 \int (\eta_1/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + c_4 \eta_2^2 \int (1/r^2) d\eta_1] \\ \int \eta_1 u_{1k}^* d\eta_1 &= C_U [c_1 \int \eta_1 \ln(1/r) d\eta_1 + c_2 \int \eta_1 d\eta_1 \\ &\quad + c_3 \eta_2 \int (\eta_1^2/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + c_4 \eta_2^2 \int (\eta_1/r^2) d\eta_1] \\ \int \eta_1^2 u_{1k}^* d\eta_1 &= C_U [c_1 \int \eta_1^2 \ln(1/r) d\eta_1 \\ &\quad + c_2 \int \eta_1^2 d\eta_1 + c_3 \eta_2 \int (\eta_1^3/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + c_4 \eta_2^2 \int (\eta_1^2/r^2) d\eta_1] \\ \int p_{1k}^* d\eta_1 &= -C_P [d_1 \eta_2 \int (1/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + d_2 \eta_2^2 \int (\eta_1/r^4) d\eta_1 \\ &\quad + d_3 \eta_2^3 \int (1/r^4) d\eta_1 \\ &\quad + d_4 \int (\eta_1/r^2) d\eta_1] \\ \int \eta_1 p_{1k}^* d\eta_1 &= -C_P [d_1 \eta_2 \int (\eta_1/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + d_2 \eta_2^2 \int (\eta_1^2/r^4) d\eta_1 \\ &\quad + d_3 \eta_2^3 \int (\eta_1/r^4) d\eta_1 \\ &\quad + d_4 \int (\eta_1^2/r^2) d\eta_1] \\ \int \eta_1^2 p_{1k}^* d\eta_1 &= -C_P [d_1 \eta_2 \int (\eta_1^2/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + d_2 \eta_2^2 \int (\eta_1^3/r^4) d\eta_1 \\ &\quad + d_3 \eta_2^3 \int (\eta_1^2/r^4) d\eta_1 \\ &\quad + d_4 \int (\eta_1^3/r^2) d\eta_1] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= (3-4\nu)^* \delta_{1k}, \quad c_2 = l_1 l_k \\ c_3 &= l_1 m_k + l_k m_1, \quad c_4 = m_1 m_k - l_1 l_k \\ d_1 &= (1-2\nu)^* \delta_{1k} + 2l_1 l_k, \quad d_2 = 2(l_1 m_k + l_k m_1) \\ d_3 &= 2(m_1 m_k - l_1 l_k), \quad d_4 = (1-2\nu)^* d_{1k} \end{aligned}$$

Fig. 2 に示すように角度  $\theta$  をとり、着力点からサブ要素までの距離を  $\bar{r}$  とすると

$$r = \bar{r}/\cos\theta, \quad \eta_1 = \bar{r}\tan\theta, \quad d\eta_1 = (\bar{r}/\cos^2\theta) d\theta$$

となるので、式(9)の積分は  $\theta$  に関する積分となり、着力点を含む要素以外は解析的に求めることができる。例えば

$$\begin{aligned} \int \ln(1/r) d\eta_1 &= \bar{r} \int (1/\cos^2\theta) \{ \ln(\cos\theta) - \ln\bar{r} \} d\theta \\ &= \bar{r} [ \tan\theta \{ \ln(\cos\theta/\bar{r}) + 1 \} - \theta ] \\ &= s_1 - [ \eta_1 \ln(r) + \bar{r}\theta ] \end{aligned}$$

なお、 $s_1$  はサブ要素の長さ、積分範囲は図に示すように  $\theta_A \leq \theta \leq \theta_B$ ,  $r_A \leq r \leq r_B$ ,  $\eta_A \leq \eta_1 \leq \eta_B$  である。また、他の項の積分は付録に示す。

一方、着力点を含む要素の積分は次のようにして求めることができる。着力点を節点に近付けた場合、

$\int p_{1k}^* d\eta_1$  の項のみが特異となるので、この積分のみを考察する。サブ要素①、②の共通節点  $j$  に Fig. 3 に示すように着力点を近付けると、各々の要素に対する積分は次のようになる。(積分は付録参照)

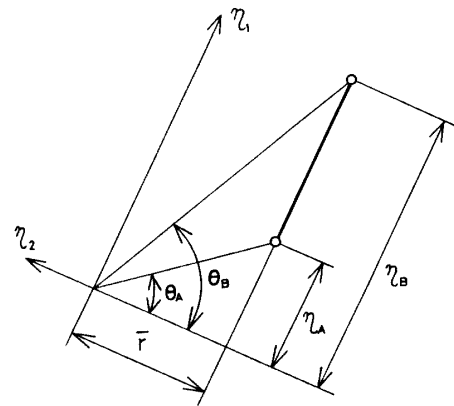


Fig. 2 Transformation of coordinates and angles from endpoints of sub-element.

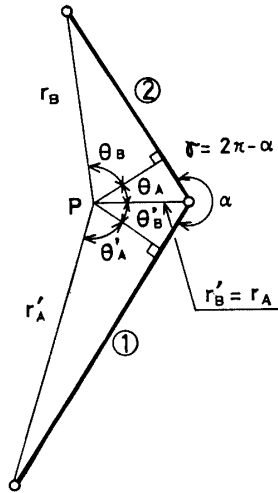


Fig. 3 The fundamental solution at internal point near the boundary node.

$$\int^* p_{ik} d\eta_1 = C_P [(d_1 + d_3/2)(\theta_B - \theta_A) - d_2(\sin^2 \theta_B - \sin^2 \theta_A)/2 + d_3(\sin \theta_B \cos \theta_B - \sin \theta_A \cos \theta_A)/2 - d_4 \ln(r_B/r_A)] + C_P [(d_1' + d_3'/2)(\theta_B' - \theta_A') + d_2'(\sin^2 \theta_B' - \sin^2 \theta_A')/2 + d_3'(\sin \theta_B' \cos \theta_B' - \sin \theta_A' \cos \theta_A')/2 - d_4' \ln(r_B'/r_A')] \dots \dots \dots (10)$$

式 (10) の右辺の第 4 項までがサブ要素②, 他の項がサブ要素①に関する積分である。また

$$\delta_{ik} = l_i l_k + m_i m_k = l_i' l_k' + m_i' m_k'$$

したがって

$$d_1 + d_3/2 = d_1' + d_3'/2 = 2(1 - \nu) \delta_{ik}$$

さらに,  $d_4 = d_4'$ ,  $r_A = r_A'$  であるので, 式 (10) は次のようになる。

$$\int^* p_{ik} d\eta_1 = -\{(\theta_B - \theta_A)/(2\pi)\} \delta_{ik} + C_P [-d_2(\sin^2 \theta_B - \sin^2 \theta_A)/2 + d_3(\sin \theta_B \cos \theta_B - \sin \theta_A \cos \theta_A)/2 - d_4 \ln(r_B)] - \{(\theta_B' - \theta_A')/(2\pi)\} \delta_{ik} + C_P [-d_2'(\sin^2 \theta_B' - \sin^2 \theta_A')/2 + d_3'(\sin \theta_B' \cos \theta_B' - \sin \theta_A' \cos \theta_A')/2 + d_4' \ln(r_A')] \dots \dots \dots (11)$$

着力点を節点に近付けると

$$\begin{aligned} \theta_B &\rightarrow \pi/2, \theta_A' \rightarrow -\pi/2, \theta_B - \theta_A \rightarrow \alpha/2 \\ \theta_B' - \theta_A' &\rightarrow \alpha/2, r_B \rightarrow s_2, r_A' \rightarrow s_1 \\ \sin^2 \theta_A &\rightarrow (1 + \cos \beta)/2, \sin^2 \theta_B' \rightarrow (1 + \cos \beta)/2 \\ \sin \theta_A \cos \theta_A &\rightarrow (\sin \beta)/2 \\ \sin \theta_B' \cos \theta_B' &\rightarrow -(\sin \beta)/2, \sin^2 \theta_B \rightarrow 1 \\ \sin^2 \theta_A' &\rightarrow 1, \sin \theta_B \cos \theta_B \rightarrow 0, \sin \theta_A' \cos \theta_A' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となるので, 式 (11) は次のようになる。

$$\int^* p_{ik} d\eta_1 = -\alpha \delta_{ik} / (2\pi) + C_P [(d_2' - d_2)(1 - \cos \beta)/4 - (d_3' + d_3)(\sin \beta)/4 + d_4' \ln(s_1) - d_4 \ln(s_2)] \dots \dots \dots (12)$$

2.2 内部応力の計算方法

領域内部の応力は, 変位の座標に関する偏導関数から求めることができるので, この導関数を求める方法を以下に示す。式 (7) を着力点の座標  $\xi_i$  で偏微分する。

$$\begin{aligned} \{\partial u(P)/\partial \xi\} &= \Sigma [ \int [ [\partial u^*/\partial \xi] (\eta_1 + b) [\partial \bar{u}^*/\partial \xi] (\eta_1^2 + 2b\eta_1 + b^2) [\partial u^*/\partial \xi] ] d\eta_1 [H] \{p\} - \int [ [\partial p^*/\partial \xi] (\eta_1 + b) [\partial \bar{p}^*/\partial \xi] (\eta_1^2 + 2b\eta_1 + b^2) [\partial p^*/\partial \xi] ] d\eta_1 [H] \{\bar{u}\} ] \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\partial u(P)/\partial \xi\} &= \{\partial u_1/\partial \xi_1, \partial u_2/\partial \xi_1, \partial u_1/\partial \xi_2, \partial u_2/\partial \xi_2\}^T \\ [\partial u^*/\partial \xi] &= \begin{bmatrix} \partial u_{11}^*/\partial \xi_1 & \partial u_{12}^*/\partial \xi_1 \\ \partial u_{21}^*/\partial \xi_1 & \partial u_{22}^*/\partial \xi_1 \\ \partial u_{11}^*/\partial \xi_2 & \partial u_{12}^*/\partial \xi_2 \\ \partial u_{21}^*/\partial \xi_2 & \partial u_{22}^*/\partial \xi_2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

$[\partial p^*/\partial \xi]$  については, 上式の  $u$  を  $p$  で置き換えればよい。式 (14) は

$$\begin{aligned} \partial u_{ik}^*/\partial \xi_j &= C_u \{ (3 - 4\nu) \delta_{ik} (x_j/r^2) - (\delta_{ij} x_k + \delta_{jk} x_i)/r^2 + 2x_i x_j x_k/r^4 \} \\ \partial p_{ik}^*/\partial \xi_j &= C_p [ 2(x_1 n_1 + x_2 n_2) \{ (1 - 2\nu) \delta_{ik} (x_j/r^4) - (\delta_{ij} x_k + \delta_{jk} x_i)/r^4 + (4x_i x_j x_k)/r^6 \} - n_j \{ (1 - 2\nu) \delta_{ik}/r^2 + 2x_i x_k/r^4 \} + (1 - 2\nu) \{ (\delta_{ij} n_k - \delta_{jk} n_i)/r^2 - 2x_j (x_i n_k - x_k n_i)/r^4 \} ] \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

となるので、式(15)の各項を式(6)のように座標変換すると、

$$\begin{aligned} x_j &= l_j \eta_1 + m_j \eta_2 \\ x_j(x_1 n_k - x_k n_1) &= d_{jk} \eta_1 (l_j \eta_1 + m_j \eta_2) \\ &= d_{jk} (l_j r_2 + m_j \eta_2 \eta_1 - l_j \eta_2^2) \\ x_1 x_j x_k &= l_1 l_j l_k r^2 \eta_1 \\ &\quad + \{l_1 m_j l_k + l_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \eta_2 r^2 \\ &\quad + \{l_j (m_1 m_k - l_1 l_k) + m_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \eta_2^2 \eta_1 \\ &\quad + \{m_j (m_1 m_k - l_1 l_k) - l_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \eta_2^3 \\ &\quad \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

式(8)、(15)および式(16)を式(13)に代入すると、式(13)の係数マトリックスは、次の積分を行うことにより求めることができる。

$$\begin{aligned} &\int (\partial u_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 \\ &= C_u [g_1 \int (\eta_1 / r^2) d\eta_1 + g_2 \eta_2 \int (1/r^2) d\eta_1 \\ &\quad + g_3 \eta_2^2 \int (\eta_1 / r^4) d\eta_1 + g_4 \eta_2^3 \int (1/r^4) d\eta_1] \\ &\int \eta_1 (\partial u_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 \\ &= C_u [g_1 \int (\eta_1^2 / r^2) d\eta_1 + g_2 \eta_2 \int (\eta_1 / r^2) d\eta_1 \\ &\quad + g_3 \eta_2^2 \int (\eta_1^2 / r^4) d\eta_1 + g_4 \eta_2^3 \int (\eta_1 / r_4) d\eta_1] \\ &\int \eta_1^2 (\partial u_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 \\ &= C_u [g_1 \int (\eta_1^3 / r^2) d\eta_1 + g_2 \eta_2 \int (\eta_1^2 / r^2) d\eta_1 \\ &\quad + g_3 \eta_2^2 \int (\eta_1^3 / r^4) d\eta_1 + g_4 \eta_2^3 \int (\eta_1^2 / r^4) d\eta_1] \\ &\int (\partial p_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 \\ &= C_p [h_1 \int (1/r_2) d\eta_1 + h_2 \eta_2 \int (\eta_1 / r^4) d\eta_1 \\ &\quad + h_3 \eta_2^2 \int (1/r^4) d\eta_1 + h_4 \eta_2^3 \int (\eta_1 / r^6) d\eta_1 \\ &\quad + h_5 \eta_2^4 \int (1/r^6) d\eta_1] \\ &\int \eta_1 (\partial p_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 \\ &= C_p [h_1 \int (\eta_1 / r_2) d\eta_1 + h_2 \eta_2 \int (\eta_1^2 / r^4) d\eta_1 \\ &\quad + h_3 \eta_2^2 \int (\eta_1 / r^4) d\eta_1 + h_4 \eta_2^3 \int (\eta_1^2 / r^6) d\eta_1 \\ &\quad + h_5 \eta_2^4 \int (\eta_1 / r^6) d\eta_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \eta_1^2 (\partial p_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 \\ &= C_p [h_1 \int (\eta_1^2 / r^2) d\eta_1 + h_2 \eta_2 \int (\eta_1^3 / r^4) d\eta_1 \\ &\quad + h_3 \eta_2^2 \int (\eta_1^2 / r^4) d\eta_1 + h_4 \eta_2^3 \int (\eta_1^3 / r^6) d\eta_1 \\ &\quad + h_5 \eta_2^4 \int (\eta_1^2 / r^6) d\eta_1] \\ &\dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= (3-4\nu) \delta_{ik} l_j - \delta_{ij} l_k - \delta_{ik} l_1 + 2l_1 l_j l_k \\ g_2 &= (3-4\nu) \delta_{ik} m_j - \delta_{ij} m_k - \delta_{ik} m_1 \\ &\quad + 2\{l_1 m_j l_k + l_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \\ g_3 &= 2\{l_j (m_1 m_k - l_1 l_k) + m_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \\ g_4 &= 2\{m_j (m_1 m_k - l_1 l_k) - l_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \\ h_1 &= (1-2\nu) [\delta_{ij} n_k - \delta_{ik} n_j - \delta_{ik} n_1 - 2d_{ik} l_j] - 2l_1 n_j l_k \\ h_2 &= -2[(1-2\nu) (\delta_{ik} l_j + d_{ik} m_j) \\ &\quad - \delta_{ij} l_k - \delta_{ik} l_1 + 4l_1 l_j l_k + n_j (l_1 m_k + l_k m_1)] \\ h_3 &= -2[(1-2\nu) (\delta_{ik} m_j - d_{ik} l_j) - \delta_{ij} m_k - \delta_{ik} m_1 \\ &\quad + 4\{l_1 m_j l_k + l_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \\ &\quad + n_j (m_1 m_k - l_1 l_k)] \\ h_4 &= -8\{l_j (m_1 m_k - l_1 l_k) + m_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \\ h_5 &= -8\{m_j (m_1 m_k - l_1 l_k) - l_j (l_1 m_k + l_k m_1)\} \\ &\dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

式(17)の積分も付録に示すように解析的に求めることができる。

次に、境界上の応力の算出方法を示す。Fig. 4に示すように内点をサブ要素の中点に近付けると、式(18)の第4式のみが特異となる積分を含んでいるので、これについて解析する。内点とサブ要素の距離を  $\bar{r}$ 、サブ要素の長さを  $s_1$  とすると

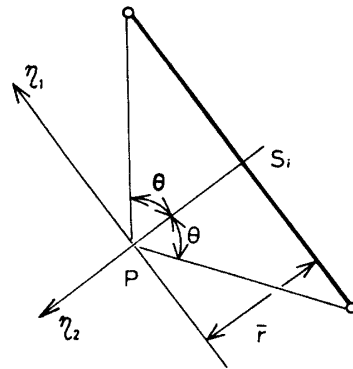


Fig. 4 The fundamental solution at internal point near the sub-element.

$$\int (1/r^2) d\eta_1 = \pi/\bar{r}, \quad \eta_2 \int (\eta_1/r^4) d\eta_1 = 0$$

$$\eta_2^2 \int (1/r^4) d\eta_1 = 2/s_1 + (\pi/2\bar{r})$$

$$\eta_2^3 \int (\eta_1/r^6) d\eta_1 = 0$$

$$\eta_2^4 \int (1/r^6) d\eta_1 = 3/(2s_1) + (3\pi/8\bar{r})$$

式 (17) の第 4 式は

$$\int (\partial p_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1$$

$$= (\pi C_p / \bar{r}) \{ h_1 + (h_3/2) + (3h_5/8) \}$$

$$+ (C_p / 2s_1) (4h_3 + 3h_5)$$

式 (16) および  $d_{ik} = l_1 l_k + m_1 m_k$ ,  $d_{ik} = -(l_1 m_k - l_k m_1)$   
 および  $n_1 = -m_1$  等より上式の右辺の第 1 項は

$$h_1 + (h_3/2) + (3h_5/8) = 0$$

したがって、式 (17) の第 4 式は次のように特異でなくなるので、式 (13) および式 (17) を用いることにより境界上の応力を求めることができる。

$$\int (\partial p_{ik}^* / \partial \xi_j) d\eta_1 = (C_p / 2s_1) (4h_3 + 3h_5)$$

..... (19)

### 3. 計算例

一次要素との比較のため、まず中央に円孔を有する板に引張荷重が作用した場合の円孔周辺の応力解析を行った。要素分割は Fig. 5 に示すように板の対称性からその 1/4 について行い、角点には二重節点を配した。

Fig. 6 に円孔縁の周方向応力の分布を示す。折れ線要素を用いた計算結果と一次要素のそれはほぼ一致し、またいずれの計算結果も応力集中係数は約 3.5 となった。

次に、半円弧の切欠きを有する板に曲げモーメントが作用した場合について応力解析を行った。Fig. 7 に総節点数 50 の要素分割を示す。折れ線要素を用いた計算結果は、Fig. 8 に示すように応力集中係数は 1.98 となり、文献 [9] の結果と極めて良好な一致がみられた。また、節点数を 30 とした計算結果は節点数 50 の計算結果とほぼ一致しており、本研究で提案した折れ線要素が面内曲げの問題に対しても極めて有効であることが明らかになった。一方、一次要素の計算結果は折れ線要素の計算結果に比較して約 2 倍の値となり、一次要素を用いる場合は、さらに節点数を増やす必要があることがわかった。

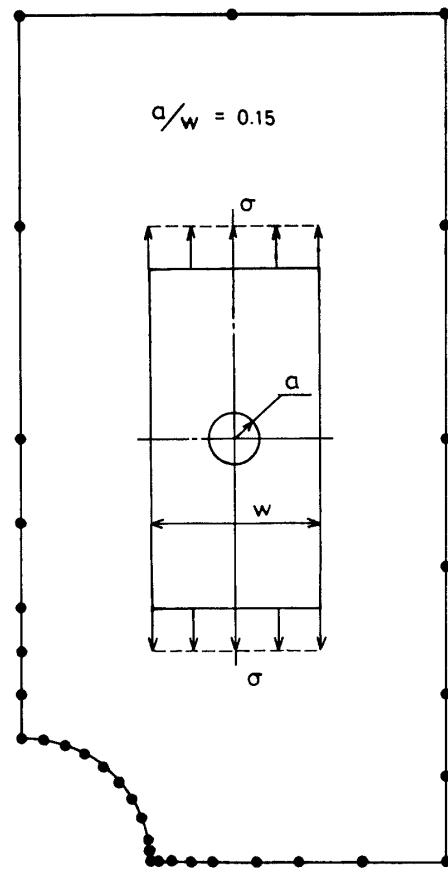


Fig. 5 Boundary element mesh for a plate with a hole.

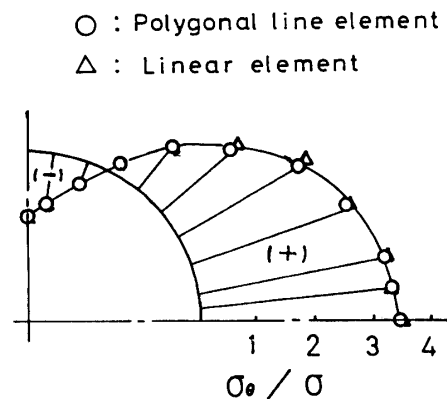


Fig. 6 Tangential stress at boundary of hole.

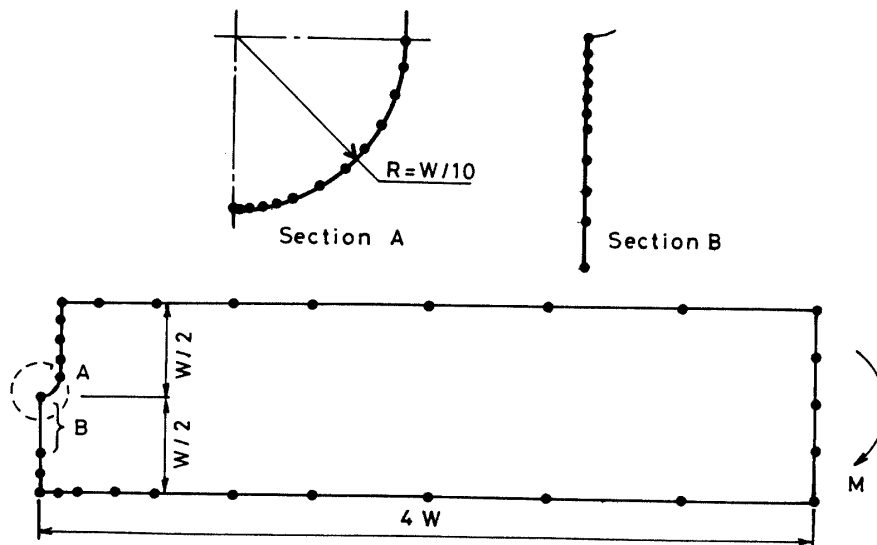


Fig. 7 Bending problem a plate with a deep hyperbolic notch. Geometry and discretization.

- : Polygonal line element (50 nodes)
- △ : Polygonal line element (30 nodes)
- : Linear element (50 nodes)

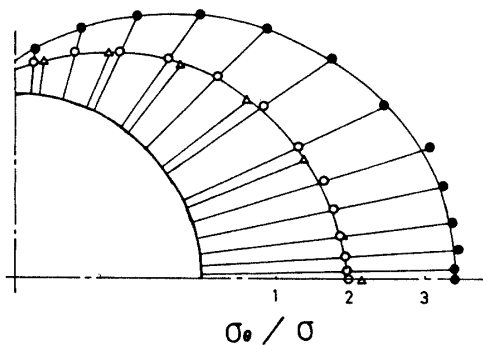


Fig. 8 Tangential stress at boundary of notch.

#### 4. 結 言

要素内の変位および表面力の分布を二次曲線で仮定した折れ線要素を提案し、さらに要素上の応力の算出をも含め、数値積分を使わない計算方法を示した。

また、板中央に底部が半円弧の切欠きを有する板の

曲げ解析を行い、一次要素を用いた計算結果との比較検討を行った。その結果、本研究で提案した折れ線要素は、面内曲げの応力解析においても極めて有効であることがわかった。

#### 参考文献

- 1) Alarcon, E., and Reverter, A., Int. J. Num. Mech. Eg., 28, 801 (1986).
- 2) Rencis, J. J., and Mullen, R. L., Int. J. Num. Mech. Eg. 23, 1509 (1986).
- 3) 高久田・小泉・渋谷, 機論, 51-461, 81 (1985).
- 4) Patterson, C., and Sheikh, M. A., Application of The Direct Regular Methods to Linear Elastic Fracture Mechanics (Brebbia, C. A. 編), Boundary Element vl, 9-29, Springer-Verlag (1984).
- 5) 結城・松本・木須, 機論, 52-480, 1877 (1986).
- 6) 北川他3名, 機論, 50-450, 129 (1984).
- 7) 東町・他3名, 機論, 51-486, 1967 (1985).
- 8) 沢田・葉, 機論, 54-503, 1359 (1988).
- 9) Peterson, R. E., Stress Concentration Factors, John-Wiley & Sons, (1974)

(平成2年10月15日受理)

#### 付録 不定積分

Fig. A-1 に示すように座標をとり、線積分を行うサブ要素の長さを  $s_1$  とする。なお、角度  $\theta$  は 1 および 4

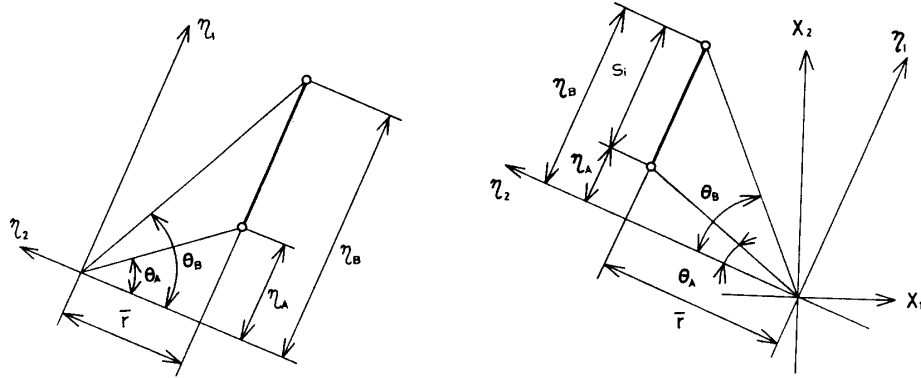


Fig.A-1 Transformation of coordinates and angles from endpoints of sub-element.

象限は Fig. A-1(a), 2 および 3 象限は Fig. A-1(b) のようにとるものとする。参考のために、計算に用いる諸量を次に示す。

$$\begin{aligned} \bar{r} &= |\eta_2| \\ \sin\theta_A &= \eta_A/r_A, \quad \cos\theta_A = \bar{r}/r_A \\ \sin\theta_B &= \eta_B/r_B, \quad \cos\theta_B = \bar{r}/r_B \\ \theta_A &= \tan^{-1}(\eta_A/\bar{r}), \quad \theta_B = \tan^{-1}(\eta_B/\bar{r}) \\ \tan\theta_A &= \eta_A/\bar{r}, \quad \tan\theta_B = \eta_B/\bar{r} \\ \ln(\cos\theta_A) &= \ln(\bar{r}/r_A), \quad \ln(\cos\theta_B) = \ln(\bar{r}/r_B) \\ \ln(\cos\theta_A/\bar{r}) &= \ln(1/r_A), \quad \ln(\cos\theta_B/\bar{r}) = \ln(1/r_B) \end{aligned}$$

以下に示す式の [ ] は不定積分を意味し、積分範囲を次のように取る。

$$\theta_A \leq \theta \leq \theta_B, \quad r_A \leq r \leq r_B, \quad \eta_A \leq \eta \leq \eta_B$$

$$\begin{aligned} \int d\eta_1 &= s_1 \\ \int \eta_1 d\eta_1 &= s_1(\eta_A + \eta_B)/2 \\ \int (\eta_1)^2 d\eta_1 &= s_1\{(s_1)^2 + 3\eta_A\eta_B\}/3 \\ \int \ln(1/r) d\eta_1 &= s_1 - [\eta_1 \ln(r) + \bar{r}\theta] \\ \int \eta_1 \ln(1/r) d\eta_1 &= s_1(\eta_A + \eta_B)/4 - (1/2)[\bar{r}^2 \cdot \ln(r)] \\ \int \eta_1^2 \ln(1/r) d\eta_1 &= (1/3)[\eta_1^3\{(1/3) - \ln(r)\} + \bar{r}^3\theta] - (\bar{r}^2/3)s_1 \\ \int (1/r^2) d\eta_1 &= (1/\bar{r})(\theta_B - \theta_A) \\ \int (\eta_1/r^2) d\eta_1 &= \ln(r_B/r_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (\eta_1^2/r^2) d\eta_1 &= s_1 - \bar{r}(\theta_B - \theta_A) \\ \int (\eta_1^3/r^2) d\eta_1 &= s_1(\eta_A + \eta_B)/2 - \eta_2^2 \ln(r_B/r_A) \\ \int (1/r^4) d\eta_1 &= (1/2\bar{r}^3)[\theta + \sin\theta\cos\theta] \\ \int (\eta_1/r^4) d\eta_1 &= (1/2\bar{r}^2)[\sin^2\theta] \\ \int (\eta_1^2/r^4) d\eta_1 &= (1/2\bar{r})[\theta - \sin\theta\cos\theta] \\ \int (\eta_1^3/r^4) d\eta_1 &= \ln(r_B/r_A) - (1/2)[\sin^2\theta] \\ \int (1/r^6) d\eta_1 &= (1/8\bar{r}^5)[3\theta + \sin\theta\cos\theta(3 + 2\cos^2\theta)] \\ \int (\eta_1/r^6) d\eta_1 &= -(1/4\bar{r}^4)[\cos^4\theta] \\ \int (\eta_1^2/r^6) d\eta_1 &= (1/8\bar{r}^3)[\theta + \sin\theta\cos\theta(1 - 2\cos^2\theta)] \\ \int (\eta_1^3/r^6) d\eta_1 &= (1/4\bar{r}^2)[\sin^4\theta] \\ \int (\eta_1^4/r^6) d\eta_1 &= (1/8\bar{r})[3\theta - \sin\theta\cos\theta(5 - 2\cos^2\theta)] \end{aligned}$$