

後ろ向きステップの層流剥離に関する研究 (循環渦におよぼすステップ比の影響)

中西 助次*・大坂 英雄**

On the Laminar Separation of the Flow over a Backward Facing Step (The Effect of the Step Ratio on the Recirculation Zone Length)

Suketugu NAKANISHI and Hideo OSAKA

Abstract

In most of the available work, the Reynolds number based on the step height (step Reynolds number R_{eh}) was used as a single parameter that defined the reattachment length (recirculation zone length) in the laminar backward facing step flow. However, B. F. Armaly et al. (1983) suggested that the reattachment length in the laminar backward facing step flow was not a function of a single variable but was more likely to be a function of three or more variables such as the expansion ratio or step ratio, the velocity profile at the step or inlet-section and the step Reynolds number. A basic data concerning this suggestion has already been reported in our previous paper (1988). In this paper, the variation of the reattachment length was examined as a function of the step Reynolds number and the step ratio. For the flow over a backward facing step mounted in a two-dimensional channel, the Navier-Stokes equations and the continuity equation were solved numerically by the finite difference method. The calculation was performed for the range of step Reynolds number $1 \leq R_{eh} \leq 250$, and for the range of step ratio $0.1 \leq h_s \leq 1.0$. The calculation results clearly indicated that the reattachment length increased with increasing the step Reynolds number and decreasing the step ratio. In addition, the reattachment length for a constant step Reynolds number in channel with different step ratios was presented and was discussed in order to search for the step ratio on the reattachment length.

1. まえがき

後ろ向きステップ流れは、流れの剥離・再付着を伴う基本的な流れ場の一つであり、これに関する研究は流体力学の基礎として重要である。また、流動現象を対象とする工学の広い分野でよく見られる流れ場でもあり、工学的応用面においても重要な流れ場となっている。したがって、これまでにこの流れに関する研究は多い^{1)~4)}。さらに、GAMM-workshop (1981) で、

これまでのキャビティ流れや円柱廻りの流れが変わって、後ろ向きステップ流れがナビエ・ストークス方程式の数値解析の計算スキーム検証問題として選ばれており、この流れに関する数値解析の結果も多い⁵⁾。ところで、この流れに対する数値計算の結果と実験結果との比較検討および計算スキームの検証は、一般に用いられている一つの方法として、ステップ・レイノルズ数と循環渦領域の長さとの関係を調べることによりなされている。特に、層流の場合には乱流に比べて再付着点の決定がそれほど困難でなく、またその定義も明確であること、さらに、循環渦領域の長さ X とステップ高さ h との比 X/h とステップ・レイノルズ数 $R_{eh} = Uh/\nu$ との間に $X/h = f(R_{eh})$ の相似則が存在する(こ

*広島工業大学・物理教室

**機械工学科

れについては以下で議論する)ので、この方法は有力な手段の一つであると考えられている。ところが一方、Armaly らは⁶⁾ステップ下流に形成される循環渦領域の長さはステップ・レイノルズ数の単一関数ではなく、ステップ入口における流速分布、ステップ高さ、あるいはステップ高さと同流路幅との比などに影響されるであろうことを指摘している。そうした場合、それぞれの実験結果もしくは実験結果と計算結果との比較検討を行うには、使用した実験モデルあるいは計算モデルの幾何学的相似とステップ入口流速分布あるいは圧力分布などの力学的相似が満足されているかどうかについても確認が必要であると考えられる。そこで、著者らは既報⁷⁾、上述の問題提起に対して、層流の場合の2次元流路における後ろ向きステップ流れについてナビエ・ストークス方程式を数値的に解いて調べ(著者らによる可視化実験の結果も検討に加えている)、その結果、Armaly らの指摘の妥当性を確認した。ただし、循環渦領域の長さを表現する関数関係についての明確な結論は得られておらず、これに関する系統的な検討が必要であると考えられる。

そこで、本論文ではステップ下流に形成される剝離循環渦におよぼすステップ比の影響に注目し、既報⁷⁾で示した結果をさらに解析し、その結果に対して検討考察するものである。

2. 計算モデルと基礎方程式

本論文における解析結果は既報⁷⁾と同様の計算モデルおよび計算条件によるものであるが、以下の議論をわかりやすくするためその概要を述べておく。

計算モデルは Fig. 1 に示すようなステップ高さ h の後ろ向きステップをもち、ステップ上流の流路幅が H の2次元流路である。流路の長さは GAMM-workshop で決定されている⁸⁾、代表寸法 H に対する入口境界からステップまでの無次元距離 $L_{in} = 3$ 、ステップから出口境界までの無次元距離 $L = 22$ を基準としている。ただし、ステップによる下流への影響はレイノルズ数お

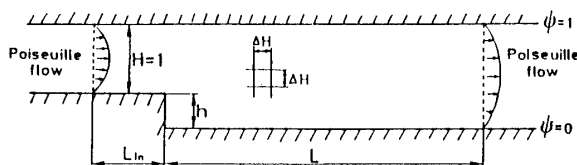


Fig. 1 Computational model for the backward facing step

よびステップ比 $h_s (=h/H)$ の値により異なるので、低レイノルズ数および小さな h_s の値については $L < 22$ としている (L の値はステップ下流に形成される循環渦の長さの2倍以上を必要とすることが著者らの計算で確かめられており⁸⁾、これを満足するように決定された)。

数値解析は、ナビエ・ストークス方程式に渦度と流れ関数を導入して得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2)$$

過度輸送方程式を、入口および出口境界で流れは2次元ポアズイユ流、壁での流れはすべり無し境界条件のもとで差分法を用いて解いたものである。ここで、方程式(1)および(2)は代表速度を平均流速 U 、代表長さをステップ上流の流路幅 H に選んだ無次元表示である。また、 Re は $Re = UH/\nu$ で定義されるレイノルズ数である。

計算した Re_h 数およびステップ h_s の範囲は $Re_h = 1 \sim 250$ および $h_s = 0.1 \sim 1.0$ についてであり、Table 1 に

Table 1 Parameter defining geometry of the computational model and calculated condition

h_s	Lin	L	Reh	ΔH
1.0	2 3	40	25, 50 100, 150 200, 250	
0.7	2 3	40	50, 100 200	0.05
0.5	1 2 3	8 15 31	1, 5, 12.5 25, 40, 55, 70, 85 100, 150, 200, 250	
0.4	1	11	50, 100, 200	0.04
0.25	1	14	50, 60, 70, 80, 90, 100, 200	0.05
0.2	1	10	50, 100, 200	0.04
0.1	1	6 10	50, 75, 100, 125 150, 175, 200	0.02

h_s ; step ratio h/H , L_{in} ; length measured from the step to the inlet of calculation domain, L ; length measured from the step to the end of calculation domain, Re_h ; Reynolds number based on the step height (step Reynolds number), H ; mesh constant

実際に実行した Re_h 数およびステップ比 h_s の値と L_{in} , L および差分格子間隔 ΔH の値を示しておく。ここで、 Re_h はステップ・レイノルズ数 $Re_h = Uh/\nu$ であり、 $Re_h = h_s \times Re$ の関係より評価される。

3. 結果と考察

3.1 循環渦長さ X/h とステップ・レイノルズ数 Re_h との関係

Fig. 2 は循環渦長さ X/h とステップ・レイノルズ数 Re_h との関係を示したものである。ただし、GAMM-workshop で決定されている幾何学形状で、しかも実験および数値計算でよく研究対象とされている $h_s = 0.5, 1.0$ を選んでプロットしたものである。また、既報⁷⁾において著者らの計算結果と他の計算結果および実験結果は良く一致していることを示したが、参考のため、Fig. 2 においても著者らの計算結果の他に Dhatt らの計算結果 (有限要素法)⁹⁾ および Kueny らの実験結果¹⁰⁾ を選んで図示しておく。図から、循環渦長さ X/h は、過去の研究結果にみられるように^{2), 11)}、限定された Re_h 数範囲においてはほぼ Re_h 数の 1 次関数 $X/h = a + bRe_h$ で近似できるものとみてよい。しかしながら、本研究で対象とした Re_h 数範囲 $1 \leq Re_h \leq 250$ においては、低 Re_h 数の領域で X/h の Re_h 数に対する直線性が失われている (ただし、 $50 < Re_h$ に注目した場合の直線近似と比較して) ことから考えて、広範囲の Re_h 数の全領域を 1 次関数で表現するには無理があることが予測される。Fig. 2 の結果を、今仮に X/h が Re_h 数の 2 次関数とみて、 X/h を Re_h 数の 2 次の多項式で近似してみると、

$h_s = 0.5$ の場合、

$$X/h = -2.40 \times 10^{-5} Re_h^2 + 0.0544 Re_h + 0.980 \quad (3)$$

$h_s = 1.0$ の場合、

$$X/h = -3.66 \times 10^{-5} Re_h^2 + 0.0473 Re_h + 0.466 \quad (4)$$

が得られる。(3) および (4) の近似式から、 Re_h 数が 1 程度のオーダの場合は、 Re_h 数の 2 次の項は 1 次の項に比べて無視できる程度に小さく、 X/h は Re_h 数の 1 次関数として近似できそうである。 Re_h 数が 100 程度のオーダについてみると、 Re_h 数の 2 次の項は 1 次の項に比べてもはや無視することができないことがわかる。このようにみると、実験結果を忠実に多項式で近似した (3), (4) 式は、i) 循環渦長さ X/h の Re_h 数に対する変化は Re_h 数の増加にともない直線的に伸びるが Re_h 数の 2 乗に比例して減少する、ii) $Re_h \rightarrow 0$ の極限においてもステップ高さと同程度の長さ領域の循環渦が存在する、を意味しており、物理的に説明のつき

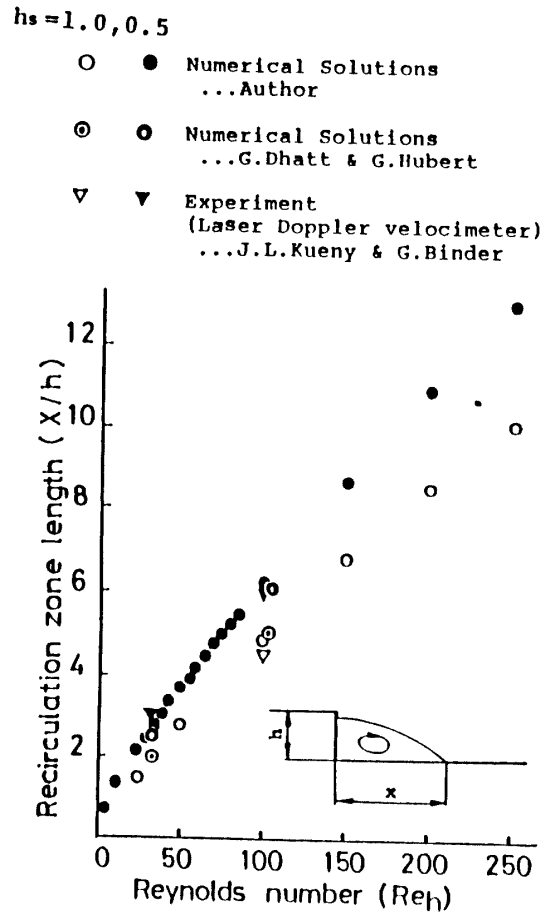


Fig. 2 Recirculation zone length ($h_s = 0.5$ and $h_s = 1.0$)

にくい実験式となっていると言える。また、Fig. 2 に示した結果は、 $h_s = 0.5$ の場合と $h_s = 1.0$ の場合とは明らかに異なった曲線となっており、これは前述した循環渦長さ X/h は Re_h 数のみの関数ではないとの Armary の推測を裏づけるものであると考えられる。

3.2 定性的推論による循環渦長さ X/h の関数関係

ステップ下流の流れを、Fig. 3 (a) のような無限拡大部における自由せん断層と同様に取り扱えるものと仮定する。そうすると、

$$\delta \sim \sqrt{\nu X/U} = X/\sqrt{Re_x}, \quad \text{ここで } Re_x = UX/\nu$$

また、 $U\delta/\nu \sim U\sqrt{\nu X/U}/\nu = \sqrt{Re_x}$ であるので、
 $Re_\delta = U\delta/\nu$ を用いて、
 $X/\delta \sim Re_\delta \quad (5)$

と表せる。今、Fig. 3 (b) に示したような、ステップより h 下方の位置に仮定の底壁 B を想定して、ステップより距離 X の間で循環渦が存在すると仮定する。勿論この場合、底壁は流れの伴流現象に対して必要な下方

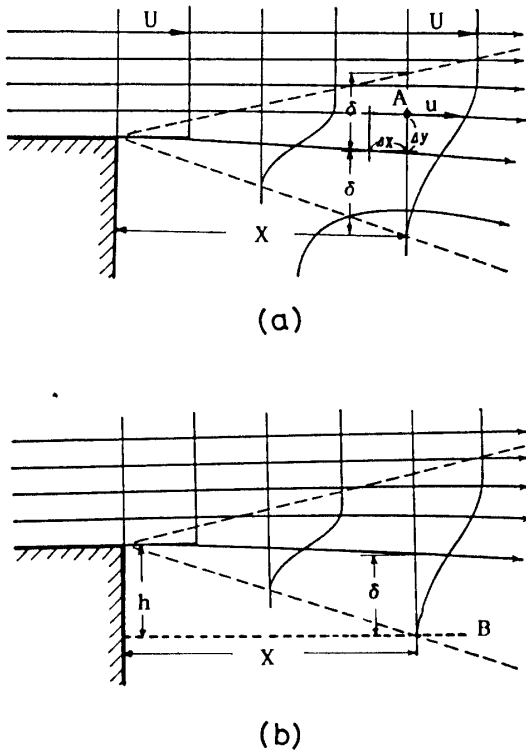


Fig. 3 Diagrammatic representation for estimated order of magnitude of the reattachment length

からの流入を阻害し、また、壁でのすべり無し条件などにより流れは複雑性を増すが、ここでは単純化してそのことは考えないものとする。そうすると、 $\delta \approx h$ と考えて(5)式を書き換えると、

$$X/h \sim Re_h \tag{6}$$

と予測される。つぎに、ステップ比 h_s の変化すなわち流路拡大の変化 $((H+h)/H = 1+h_s)$ は、ステップ下流における圧力勾配の変化の原因となることが考えられる。したがって、ここでは循環渦におよぼすステップ比の影響を循環渦に対する圧力勾配の影響として検討してみる。

今、流れを記述する運動方程式の慣性項および圧力項の各項が同程度のオーダー

$$O. \left[\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right] \sim O. \left[\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \tag{7}$$

$$O. \left[\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right] \sim O. \left[\frac{\partial u^2}{\partial x} \right] \tag{8}$$

であると仮定する。ここで $O. ()$ はオーダーを意味する。図中の点 A (Fig. 3 (a)) に注目すると、

$$O. \left[\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \sim \nu \frac{u}{\Delta y^2}, \quad O. \left[\frac{\partial u^2}{\partial x} \right] \sim \frac{u^2}{\Delta x}$$

ここで、 $u = \Delta y \frac{du}{dy} \sim \Delta y \frac{U}{\delta}$ とすると、

$$O. \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \sim \frac{\nu U}{\delta \Delta y}, \quad O. \left[\frac{\partial u^2}{\partial x} \right] \sim \frac{U^2 \Delta y^2}{\delta^2 \Delta x} \tag{9}$$

また、 $\frac{dp}{dx} \sim \frac{\Delta p}{\Delta x}$ とおき、(9)式の関係を用いると、

$$O. \left(\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \right) \sim \frac{\nu U}{\delta \Delta y} \tag{10}$$

$$O. \left(\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \right) \sim \frac{U^2 \Delta y^2}{\delta^2 \Delta x} \tag{11}$$

(10), (11)式より

$$O. \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \right)^2 \right] \sim \frac{\nu U}{\delta \Delta y} \cdot \frac{U^2 \Delta y^2}{\delta^2 \Delta x} \\ = \frac{\nu U^3}{\delta^3} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

したがって、

$$O. \left[\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \right] \sim \left(\frac{\nu U^3}{\delta^3} \right)^{1/2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^{1/2} \tag{12}$$

ここで、 $\Delta y / \Delta x = 1$ に選んでもさしつかえなく、また圧力を ρU^2 で、長さを X で無次元化すると、

$$O. \left[\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{X}{U^2} \right] \sim \frac{X}{U^2} \left[\frac{\nu U^3}{\delta^3} \right]^{1/2} \\ = \left[\frac{\nu}{U \delta} \right]^{1/2} \frac{X}{\delta}$$

この関係より、

$$\frac{X}{\delta} \sim \frac{\Delta p}{\Delta x} \sqrt{Re_{\delta}} \tag{13}$$

これを上述と同様に $\delta \approx h$ として書き換えると、

$$\frac{X}{h} \sim \frac{\Delta p}{\Delta x} \sqrt{Re_h}, \quad (" \sim " \text{ は無次元量を示す}) \tag{14}$$

の関係が予測される。上述の定性的推論により得られた(6)式と(14)式から、循環渦長さ X/h に対して、

$$X/h \sim A Re_h + B \sqrt{Re_h} \tag{15}$$

の関係式を予測し、以下で著者らの計算結果を整理することを試みてみる。ここで、 B はステップ比に依存すると考えられるが、既報⁷⁾の計算結果によると圧力勾配はステップ比 h_s と Re_h 数の関係でもあることに注意しなければならない(ただし、これに関する系統的で詳細なデータは得られていない)。

3.3 循環渦長さ X/h におよぼすステップ比 h_s の影響

Fig. 4 は Table 1 に示した全ての条件についての計算結果を、循環渦長さ X/h と Re_h 数との関係で示したものである。図から、 X/h は h_s にも依存しており、 Re_h 数のみで整理できないことがわかる。そこで、 X/h におよぼす h_s の影響を調べるため、 Re_h 数を一定にして見た場合の X/h と h_s との関係を示したものが Fig. 5 である。図から、いずれの Re_h 数の場合においても、 $0 <$

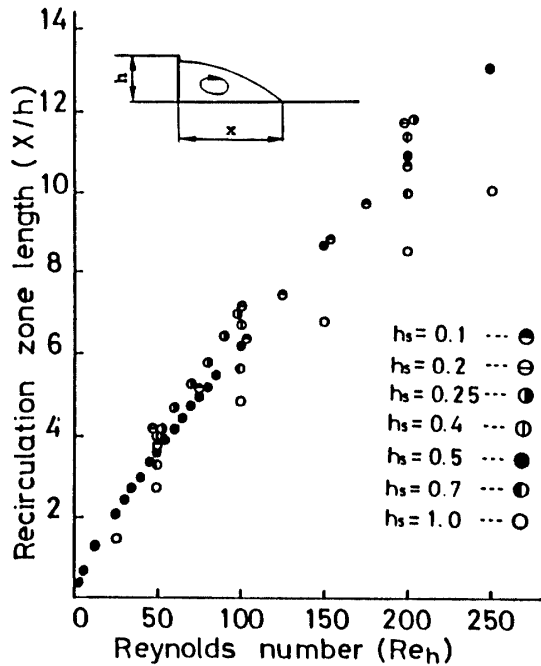


Fig. 4 Recirculation zone length for the various step ratio ($h_s=0.1\sim 1.0$)

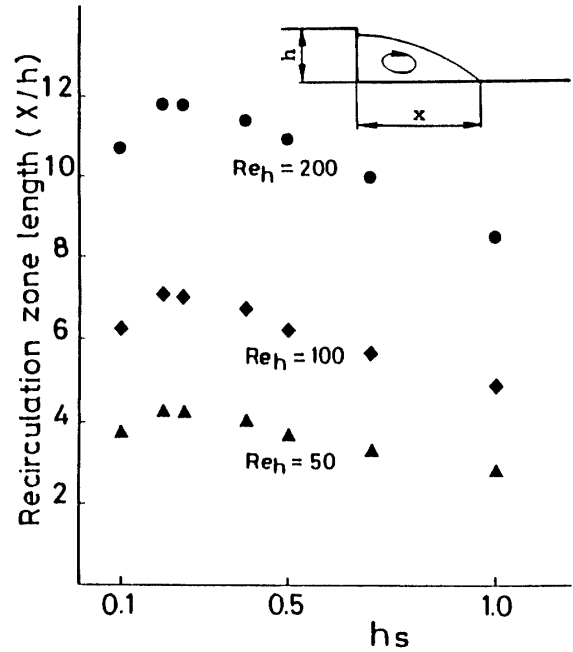


Fig. 5 Relation between the recirculation zone length and step ratio as a parameter Re_h

$h_s > 0.25$ の領域では h_s の増加にともない X/h は増加の傾向を、一方、それとは逆に、 $0.25 < h_s < 1.0$ の領域では h_s の増加とともに X/h は減少する傾向を示す結果となっている。この傾向は乱流における Durst らの結果¹²⁾ と定性的に一致している。

Fig. 4 に示した結果を前項(3.2項)で示した(15)式 $X/h = A \cdot Re_h + B \sqrt{Re_h}$ で近似すると、各 h_s について、

- $h_s = 0.1$: $A = 0.0354, B = 0.273,$
- $h_s = 0.2$: $A = 0.0362, B = 0.348,$
- $h_s = 0.25$: $A = 0.0372, B = 0.328,$
- $h_s = 0.4$: $A = 0.0363, B = 0.309,$
- $h_s = 0.5$: $A = 0.0352, B = 0.266,$
- $h_s = 0.7$: $A = 0.0347, B = 0.217,$
- $h_s = 1.0$: $A = 0.0327, B = 0.155,$

が得られる。これを、Fig. 6 に A および B の値と流路拡大割合 $(H/h)/H = (1+h_s)$ との関係で示しておく。図から、 A の h_s に対する依存度はさほどでないが、 B については(14)および(15)式から推測されるように、 h_s に依存して変化の様子が顕著にみられる。また、 $h_s = 0.25$ を境にして、 $0.25 < h_s$ と $h_s < 0.25$ の領域では B の h_s に対する変化の傾向が異なっている。今、 $0.25 < h_s$ の領域に注目すると、 A および B と h_s との関係式が

$$A = 0.043 - 0.0058(1 + h_s),$$

$$B = 0.637 - 0.241(1 + h_s)$$

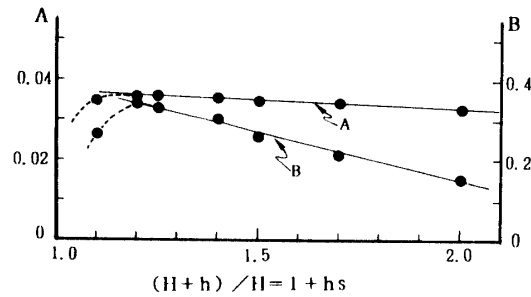


Fig. 6 Influence of the expansion ratio of channel on the parameter A and B

したがって、

$$A = 0.0372 - 0.0058h_s \tag{16}$$

$$B = 0.396 - 0.241h_s \tag{17}$$

で与えられる。

上述したように、循環渦長さが $X/h = F(Re_h, A, B)$ の関数で表されると考えて、 Re_h, A および B の変化 $d(Re_h), dA$ および dB による X/h の変化 $d(X/h)$ をみると、

$$d(X/h) = \frac{\partial(X/h)}{\partial(Re_h)} dRe_h + \frac{\partial(X/h)}{\partial A} \cdot dA + \frac{\partial(X/h)}{\partial B} dB \tag{18}$$

と表せる。さらに、 $X/h = F(Re_h, A, B)$ は、(15)、

(16) および (17) 式の関係があるとして、 R_{eh} = 一定の場合についてみると、

$$d(X/h) = R_{eh}dA + R_{eh}^{1/2}dB \quad (19)$$

ここで、 $dA = -0.0058dh_s$ 、 $dB = -0.241dh_s$ したがって、

$$d(X/h) = -0.0058R_{eh}dh_s - 0.241R_{eh}^{1/2}dh_s \quad (20)$$

が得られる。得られた(19)、(20)式から、ステップ比の変化 dh_s による循環渦長さの変化 $d(X/h)$ は、 R_{eh} 数が小さい場合はほとんど $B\sqrt{R_{eh}}$ の項に依存していることがわかる ($R_{eh} = 1$ の場合、 $d(X/h)$ に対する $R_{eh} \cdot dA$ の寄与率は約 2% に過ぎない。ただし、 R_{eh} 数が増加して $R_{eh} = 200$ になると、約 25% 影響するようになる)。

以上で述べたことは $0.25 < h_s$ の領域についてのものであり、 $h_s < 0.25$ の領域についてはデータ不足のため検討できなかった。さらに、 $h_s < 0.25$ の領域と $0.25 < h_s$ の領域とで傾向が異なっていることに関して検討しておくことは重要であると考えられるが、これを明確に説明するのに必要な詳細かつ系統的な力学量特性に関するデータが不足しているため、検討できなかった。

4. まとめ

ステップ・レイノルズ数の範囲が $1 < R_{eh} < 250$ およびステップ比の範囲が $h_s = 0.1 \sim 1.0$ についての計算結果に基づいて解析した上述の検討結果をまとめると、

- (1) 循環渦長さ X/h と R_{eh} 数との関係は、限定された R_{eh} 数範囲に注目する限りにおいては、直線関係が成立するとみてよい。
- (2) 循環渦長さ X/h は R_{eh} 数の単一関数ではなく、ステップ比にも依存する。
- (3) $1 < R_{eh} < 250$ の R_{eh} 数範囲の結果から、循環渦長さ X/h は $X/h = A \cdot R_{eh} + B\sqrt{R_{eh}}$ で表すことができる。この場合、 A および B がステップ比の関数であり、ステップ比 h_s が $0.25 < h_s$ の領域では、 A 、 B いずれも h_s の 1 次関数として表すことができる。
- (4) ステップ比 h_s が $0.25 < h_s$ の領域と $h_s < 0.25$ の領域とでは循環渦におよぼすステップ比の影響は全く異なった傾向を示す。

本論文での解析結果は、層流 2 次元流路内の定常流、十分発達した流れの領域にステップを置くなど、比較的条件をおさえた流れ場について R_{eh} 数とステップ比 h_s の 2 つのパラメータのみに注目した計算結果に基づいたものであり、上述したように、循環渦長さ X/h にお

よぼすステップ比 h_s の影響をある程度明らかにすることができたものと考えられる。ただし、循環渦におよぼすステップ比の影響が $0 < h_s < 0.25$ の領域と $0.25 < h_s < 1.0$ の領域とでは全く異なったものとなっていることに関しての検討は今後の研究課題として残っている。すなわち、これを明確に説明するためには、さらに詳細かつ系統的に R_{eh} と h_s を変化させた場合について調べる必要があると考えられる。また、本論文では力学量特性のデータおよびそれに基づいた考察が不足していると思われる。したがって、力学量特性に関するデータを補足するための計算を実行するとともに、特に、流れの剥離現象に最も重要な圧力勾配を系統的に変化させた場合についての計算を実行し、その計算結果に基づいて、ステップ下流の剥離渦の構造をさらに調べて行く予定である。

参考文献

- 1) D. E. Abbott and S. J. Kline ; Trans. ASME, D, J. Basic Eng., 84, 317 (1962)
- 2) R. J. Goldstein, V. L. Eriksen, R. M. Olson and E. R. G. Eckert ; Trans. ASME, D, J. Basic Eng., 92, 732 (1970)
- 3) M. K. Denham and M. A. Patrick ; Trans. Inst. Chem. Eng., 52, 361 (1974)
- 4) J. K. Eaton and J. P. Johnston ; AIAA J., 19-9, 1093 (1981)
- 5) K. Morgan, J. Periaux and F. Thomasset ; Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.9 "Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step" Friedr. Vieweg and Sohn, 1 (1984)
- 6) B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira and B. Schonung ; J. Fluid Mech., 127, 473 (1983)
- 7) 中西・大坂 ; 山口大学工学部研究報告, 38巻2号 203 (1988)
- 8) 中西・大坂 ; 広島工業大学研究紀要, 22巻26号 129 (1988)
- 9) G. Dhatt and G. Hurbert ; 文献(5)の p.162
- 10) J. L. Kueny and G. Binder ; 文献(5)の p.32
- 11) I. J. Sobey ; J. Fluid Mech., 151, 395 (1985)
- 12) F. Durst and C. Tropea ; Proc. Turbulent Shear Flow, 3 Symp. Davis, (1981)

(平成 2 年 10 月 13 日受理)