

未知変動を伴うシステムの同定についての一考察

沖田 豪, 小林 康秀

A Consideration on Identification of Time Varying Parameter System with Unknown Parameter Variation.

Tsuyoshi OKITA and Yasuhide KOBAYASHI

Abstract

Frequently, we have to deal with the systems whose parameters vary randomly around the unknown trend as the variation of the circumference. It is important to consider the identification problem of such time varying parameter systems. Generally speaking, as the measurements of the system output which are used for the system identification are noisy, the noise influence upon the estimates decreases by time average. But the more measurement data are used to identify the time varying parameter system, the more estimates have the time lag, as the noise influence may be smaller. Therefore, it is natural that the adequate number of the measurement data to be used exists. Especially, in the case of the rapidly varying parameter and the low S/N ratio, it is difficult to identify the system exactly. Under these circumstances, there may be the model whose structure is simpler than the one of the system. In this paper, we investigate the number of to be used and the structure of the model to identify the time varying parameter systems.

1. 緒言

周囲環境の変化により時間の経過とともに制御対象の特性が変動する系に対しては、適応制御の概念が与えられており、そこで、システム同定は重要な役割をはたしている。従来、システムの構造を既知とし、そのパラメータが不規則に変動する場合に、パラメータを推定する方法が種々提案されている。^{(1),(2),(3),(4),(5)}

しかし、現実には、システム・パラメータはある物理法則に支配されるトレンド成分と不特定多数の因子からなる不規則成分とが混在してゆらいでいる。しかも、このトレンド成分および不規則成分の統計量も未知である場合が多い。また、一般に、システム同定のための情報を有している入出力の観測値は外乱、雑音に汚されている。よく知られているように、観測値を多く用いることによって、加法的雑音の影響を軽減できる。しかし、ここで、考察の対象とする時変なシステムについては、必要以上に過去のデータを用いると、推定値に時間遅れを伴う。したがって、適切な利

用データ長が存在すると考えられる。

特に、パラメータ変動が速く、S/N比が悪いという厳しい状況の下では、正確な同定を期待することは難しい。このような場合、正しい構造をもつモデルよりも、与えられた情報のもとで、より良い低次元モデルが存在すると考えられる。

このように、パラメータの推定値のもつ時間遅れ、あるいは低次元化モデルのため、システムの出力とモデルの出力との偏差は、ゆらぎ成分のみならずバイアス成分をもつ。したがって、システム同定のための評価量は、これらゆらぎ成分とバイアス成分を同時に系統的に評価できなければならない。このため、評価量として、Kullback's divergenceを導入する。^{(6),(7)} この評価量のもとで、パラメータ変動の形態と観測雑音の大きさに対して、適切な利用すべき観測データ長およびモデルの次数について考察する。

2. 問題の提示

Fig. 1 に示す時変な線形システムについて考える。システムの入出力をそれぞれ $u(k)$, $x(k)$ とすれば、

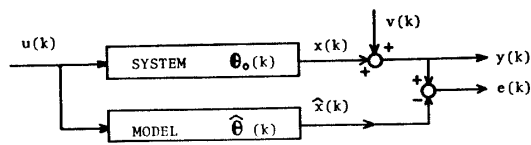


Fig. 1 Time varying parameters system and its model.

その運動方程式は次のように表わされる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(k) \\ I_{n-1} \ \mathbf{o} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(k) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(k) \triangleq [x(k), \dots, x(k-n_1+1)]^T$

$u(k) \triangleq [u(k), \dots, u(k-n_2+1)]^T$

であり、 $\theta_0(k) \triangleq [\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k)]^T$ とおく。

この $\theta_0(k)$ は変動する未知パラメータで、その次元数 n_1+n_2 、すなわち系の構造は未知である。

また、観測方程式は次のように与えられる。

$$y(k) = x(k) + v(k) \quad (2)$$

入力 $u(k)$ および観測雑音 $v(k)$ はその発生源が異なるため、互いに独立であり、 $v(k)$ は白色性でそのモーメントは既知とする。

以上の条件のもとで、時変な線形システムについて、適切な利用すべきデータ数を変動に適應して定め、構造決定とパラメータ推定を行なう問題を考察する。

3. パラメータ推定

まず、モデルの次数を仮に与えて、パラメータ $\theta(k)$ のモデルを考える。その出力を $\hat{x}(k)$ とし、次の偏差を考える。

$$\varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (3)$$

この $\varepsilon(k)$ はシステムとモデルとの差異を表わす量で、システムがあるトレンドをもって変動しているため、あるいはシステムとモデルの構造が異なるため、バイアス成分とゆらぎ成分とからなる。したがって、システム同定のための評価量としては、偏差のゆらぎと共に平均値をも系統的に評価できる量を設定する必要がある。

また、利用可能な観測値は $z(k)$ であり、 $\varepsilon(k)$ に代えて次の量を考えよう。

$$e(k) = z(k) - \hat{x}(k) = \varepsilon(k) + v(k) \quad (4)$$

実システムとモデルが完全に一致したとき、この $e(k)$ は $v(k)$ となる。

いま、 $\varepsilon(k)$ 、 $e(k)$ および $v(k)$ の確率密度関数をそれぞれ $P_\varepsilon(\cdot | \theta(k); \mathbf{r}(k))$ 、 $P_e(\cdot | \theta(k); \mathbf{r}(k))$ 、

および $P_v(\cdot)$ としよう。ただし、 $\mathbf{r}(k)$ は確率密度関数を規定する統計量である。特に、次の関係がなりたつとき、

$$P_e(e | \theta(k); \mathbf{r}(k)) = P_v(e), \quad e \in \mathcal{V} \quad (5)$$

$\varepsilon(k)$ と $v(k)$ との独立性から、次式を得る。

$$P_\varepsilon(\varepsilon) = \delta(\varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathcal{V} \quad (6)$$

このことは、 $P_e(\cdot | \theta(k); \mathbf{r}(k))$ を $P_v(\cdot)$ に近づけることにより、 $\varepsilon(k)$ を確率的な意味で零に近づけられることを示している。この事実と先に述べたように平均値とゆらぎ成分とを系統的に評価することから、次の Kullback's divergence を同定のための評価として導入しよう。

$$D(\theta(k), \mathbf{r}(k)) = \int \left\{ \log \frac{P_e(e | \theta(k); \mathbf{r}(k))}{P_v(e)} \right. \\ \left. \times P_e(e | \theta(k); \mathbf{r}(k)) \right. \\ \left. + \log \frac{P_v(e)}{P_e(e | \theta(k); \mathbf{r}(k))} - P_v(e) \right\} de \quad (7)$$

この $D(\theta(k); \mathbf{r}(k))$ に関して、次の定理が知られている。⁸⁾

『 $D(\theta(k); \mathbf{r}(k))$ は非負であり、

$$P_e(e | \theta(k); \mathbf{r}(k)) = P_v(e), \quad e \in \mathcal{V}$$

でかつそのときのみ $D(\theta(k), \mathbf{r}(k)) = 0$ である。』

この定理と (6) 式を考慮し、評価量 $D(\theta(k), \mathbf{r}(k))$ を最小化することにより、実システムとモデルの偏差を確率的な意味で零に近づけるパラメータが得られる。すなわち、次式を満たすパラメータを推定値として採用しよう。

$$D(\hat{\theta}(k); \hat{\mathbf{r}}(k)) = \text{Min}_{\theta(k)} D(\theta(k); \hat{\mathbf{r}}(k)) \quad (8)$$

ここで、偏差の密度関数 $P_e(e | \theta(k); \hat{\mathbf{r}}(k))$ を利用できる入出力の観測値より、次のグラム・シャリーエ A 型級数展開表示として求めよう。⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

$$P_e(e | \theta(k); \hat{\mathbf{r}}(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2(k)}} \exp\left(-\frac{(e-\hat{\mu}(k))^2}{2\hat{\sigma}^2(k)}\right) \\ \times \left\{ 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \hat{\gamma}_i(k) H_i\left(\frac{e-\hat{\mu}(k)}{2\hat{\sigma}(k)}\right) \right\} \quad (9)$$

ここで、 $H_i(\cdot)$ は i 次のエルミート関数であり、 $\hat{\mathbf{r}}(k)$ は、 $\hat{\mu}(k)$ 、 $\hat{\sigma}^2(k)$ 、 $\hat{\gamma}_3(k)$ 、 $\hat{\gamma}_4(k)$... を要素とする。

これらは観測値より次のように得られる。

$$\hat{\mu}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N}^k \left\{ y(i) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{pmatrix} \right\} \\ - E\left\{ \theta^T(k) \begin{pmatrix} v(i-1) \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\hat{\sigma}^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N}^k \left\{ y(i) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{pmatrix} \right\}^2 \\ - \left\{ \hat{\mu}^2(k) - \text{Var.}(\hat{\mu}(k)) \right\}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N}^k \sum_{s=0}^1 C_s E \{ v^{2-s}(i) (-\boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{\mathbf{y}(i-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right))^s \} \\ \hat{\boldsymbol{r}}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N}^k H_i \left(\frac{\mathbf{y}(i) + \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{\mathbf{y}(i-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right) - \hat{\boldsymbol{\mu}}(k)}{\sigma(k)} \right) \\ - \sum_{s=0}^{i-1} C_s E \{ \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(i-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right) \}^{i-s} \hat{\boldsymbol{r}}_s(k)$$

ここで、 $\mathbf{y}(i) \triangleq [\mathbf{y}(i), \mathbf{y}(i-1), \dots, \mathbf{y}(i-n_1+1)]^T$ である。

同様に、雑音が非ガウス性を示す場合も考慮し、その確率密度関数を次のように表わす。

$$P_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{(v-\mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right) \\ \times \left\{ 1 + \sum_{i=3}^{\infty} r_{vi} H_i \left(\frac{v-\mu_v}{\sigma_v} \right) \right\} \quad (10)$$

ただし、 $\mu_v = E\{v(k)\}$, $\sigma_v^2 = E\{v(k) - \mu_v\}^2$

$$r_{vi} = E \left\{ H_i \left(\frac{v(k) - \mu_v}{\sigma_v} \right) \right\}$$

である。

4. 系の構造および利用データ数の決定

前節において、未知パラメータの推定値 $\boldsymbol{\theta}(k)$ を得るための評価について考察したが、この節では系の構造を示す $\boldsymbol{\theta}(k)$ の次元数および同定に利用すべきデータ数を決定する問題を考えよう。

パラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ は (8) 式で与えられる評価より、次の非線形方程式の解として得られる。

$$\frac{\partial D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\boldsymbol{\theta}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)} = \mathbf{0} \quad (11)$$

ここで、統計量の推定値 $\hat{\boldsymbol{r}}(k)$ は (9) 式で与えられるが、観測雑音 $v(k)$ のために、次の $\mathbf{r}_0(k)$ の回わりでゆらぐ。

$$\mathbf{r}_0(k) = E\{\hat{\boldsymbol{r}}(k)\} \quad (12)$$

その結果として、推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ もまた確率的な振舞を示す。したがって、(8) 式の評価量を $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ について期待値操作をとることにより、システムの偏差を総合的に評価する必要がある。

$$\mathbf{J} = E \left\{ D(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k); \hat{\boldsymbol{r}}(k)) \right\} \quad (13)$$

この総合的な評価量 \mathbf{J} は $\boldsymbol{\theta}(k)$ の次元数 n およびデータ数 N の関数となる。以下では、この \mathbf{J} を具体的に評価しよう。

いま、(12) 式の $\mathbf{r}_0(k)$ に対応するパラメータの値は $\boldsymbol{\theta}_0(k)$ であることを考慮すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}_0(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

(11) 式を $\boldsymbol{\theta}_0(k)$ および $\mathbf{r}_0(k)$ のまわり近似展開

し、上式を考慮すれば、次式を得る。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) - \boldsymbol{\theta}_0(k) = \left(\frac{\partial^2 D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}(k) \partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k) \\ \mathbf{r}(k) = \mathbf{r}_0(k)}} \right)^{-1} \\ \cdot \left(\frac{\partial D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \mathbf{r}(k) \partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k) \\ \mathbf{r}(k) = \mathbf{r}_0(k)}} \right) (\hat{\boldsymbol{r}}(k) - \mathbf{r}_0(k)) \quad (15)$$

ただし、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ の次元数と $\boldsymbol{\theta}_0(k)$ の次元数は必ずしも同じでない。したがって、高い次元のモデルを基本とし、低い次元のモデルの対応する成分は零とみなす。(12) 式の $\mathbf{r}_0(k)$ の定義および (15) 式より、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ は不偏推定量となる。

$$E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)\} = \boldsymbol{\theta}_0(k) \quad (16)$$

さらに、(15) 式より $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ の共分散行列は次式で与えられる。

$$\text{Cov}\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)\} = \left(\frac{\partial^2 D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}(k) \partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k) \\ \mathbf{r}(k) = \mathbf{r}_0(k)}} \right)^{-1} \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}(k) \partial \mathbf{r}(k)} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k) \\ \mathbf{r}(k) = \mathbf{r}_0(k)}} \right) \text{Cov}\{\hat{\boldsymbol{r}}(k)\} \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \mathbf{r}(k) \partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k) \\ \mathbf{r}(k) = \mathbf{r}_0(k)}} \right) \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 D(\boldsymbol{\theta}(k); \mathbf{r}(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}(k) \partial \boldsymbol{\theta}(k)} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}_0(k) \\ \mathbf{r}(k) = \mathbf{r}_0(k)}} \right)^{-1} \quad (17)$$

さらに、 $\text{Cov}\{\mathbf{r}(k)\}$ は次のように近似的に表わされる。

$$\text{Var}\{\hat{\boldsymbol{\mu}}(k)\} \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \left(1 - \frac{|i|}{N} \right) \\ E\{ (v(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right)) \cdot (v(k-i) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1-i)}{\boldsymbol{\theta}} \right)) \} \\ \text{Var}\{\hat{\sigma}^2(k)\} \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \left(1 - \frac{|i|}{N} \right) \\ \left\{ E\{ (v(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right))^2 \cdot (v(k-i) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1-i)}{\boldsymbol{\theta}} \right))^2 \} - (\sigma_v^2)^2 \right. \\ \left. - \left\{ E\{ v(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right) \} \right\}^2 \right\} \\ + \frac{1}{N} \left\{ (\hat{\sigma}_2(k) - \sigma_v^2) \cdot E\{ v(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right) \} \right\} \\ \text{Var}\{\hat{r}_i(k)\} \doteq \frac{1}{N} \left\{ \sum_{r=0}^i \sum_{h=0}^i C_r C_h \frac{1}{2} \right. \\ \left. \left\{ E\{ H_{i-r} \left(\frac{v(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k) \left(\frac{v(k-1)}{\boldsymbol{\theta}} \right) \right)} \right\} \right\} \right.$$

$$\begin{aligned} & \cdot H_{i-h} \left\{ \frac{v(k-i) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} v(k-1-i) \\ o \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right\} \\ & - E \left\{ H_{i-r} \left\{ \frac{v(k-i) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} v(k-1-i) \\ o \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right\} \right\} \\ & \cdot E \left\{ H_{i-h} \left\{ \frac{v(k-i) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} v(k-1-i) \\ o \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right\} \right\} \\ & \frac{1}{N} \sum_{l=k-N}^k \left\{ \overline{H}_r \left(\frac{x(l) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} x(l-1) \\ v(l-1) \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right) \right\} \\ & \cdot H_h \left\{ \frac{x(l-i) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} x(l-1-i) \\ v(l-1-i) \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} & H_i \left(\frac{x(l) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} x(l-1) \\ v(l-1) \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right) \\ & \doteq H_i \left(\frac{y(l) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} y(l-1) \\ v(l-1) \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)} \right) \\ & - \sum_{r=0}^{i+1} \left(\frac{1}{2} \right)^r E \left\{ H_r \left(\frac{v(l) - \theta^T(k) \begin{pmatrix} v(l-1) \\ o \end{pmatrix}}{\hat{\sigma}(k)/\sqrt{2}} \right) \right\} \cdot C_r \end{aligned}$$

である。

以下、同様にして、 $\text{Cov}\{\hat{\mu}(k), \hat{\sigma}_2(k)\}$, $\text{Cov}\{\hat{\mu}(k), \hat{\sigma}_i(k)\}$ および $\text{Cov}\{\hat{\sigma}^2(k), \hat{\sigma}_i(k)\}$ も求められ、いずれも N^{-1} 以下のオーダーとなる。したがって、データ数 N が $\theta(k)$ の次元数に比して十分大なるときは、 $\theta(k)$ の共分散はデータ数 N に反比例すると考えられる。

このようにして、 $\text{Cov}\{r(k)\}$ が得られれば、(13) 式の総合評価量 J は次のように近似的に表わされる。

$$\begin{aligned} J & \doteq D(\hat{\theta}(k); \hat{r}(k)) + \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial^2 D(\hat{\theta}(k); \hat{r}(k))}{\partial \theta(k) \partial \theta(k)} \right]_{\theta(k) = \hat{\theta}(k)} \right\} \\ & \cdot \text{Cov}\{\hat{\theta}(k)\} \end{aligned} \quad (17)$$

この総合評価量 J はパラメータ $\theta(k)$ の次元数 n および利用するデータ数 N の関数となるが、(17) 式の第一項は残差を表わし、一般に n が大なるほど小さくなる。また、第二項はパラメータの推定誤差に起因し、 n と共に増加し、データ数に反比例する傾向を示す。したがって、この総合評価量を最小にするパラメータの次数および利用すべきデータ数が存在する。よって、次式を満たす n^* および N^* をシステムの構造を示す次元数および利用データ数として採用する。

$$J(n^*, N^*) = M_{n,N} J(n, N) \quad (18)$$

定係数系の同定では、一般に、利用するデータ数が多いほど、平均効果により雑音の影響を軽減し、精度の良い推定が可能となる。しかしながら、時変系におい

ては、過去のデータを利用しすぎると、推定値に時間遅れを伴ないバイアスを生ずる。したがって、変動形態および雑音の大きさに適応して、同定に利用すべきデータ数を決定する必要があることを(18)式は意味している。

さらに、システム変動が速く、雑音が大きい劣悪な状況下では、低次元モデルを採用すべきことも、(18)式は示唆している。

5. シミュレーションによる考察

前節までの考察に基づいて、デジタル、シミュレーションを行ない、その正当性を検証した。次の二次線形系を対象とし、そのゲインおよび減衰比がそれぞれ変動する場合を取り上げた。

$$\begin{aligned} x(k+1) & = \begin{bmatrix} \theta_{01}(k) & \theta_{02}(k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ & + \begin{bmatrix} \theta_{03}(k) & \theta_{04}(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad \theta_{01}(k) & = 2 \exp(-\xi(k)\omega_0 T) \cos \omega_0 T \\ \theta_{02}(k) & = -\exp(-\xi(k)\omega_0 T) \cos \omega_0 T \\ \theta_{03}(k) & = \{1 + \exp(-\xi(k)\omega_0 T) \sec(\varphi) \cos(\omega_0 T - \varphi) - 2 \exp(-\xi(k)\omega_0 T) \cos \omega_0 T\} g(k) \\ \theta_{04}(k) & = \{\exp(-\xi(k)\omega_0 T) - 1\} \exp(\xi(k)\omega_0 T) \sec(\varphi) \cos(\omega_0 T - \varphi) \\ & \quad g(k-1) \end{aligned}$$

であり、 ω_0 は固有振動数、 T はサンプリング周期である。

また、観測方程式は(2)式で与えられる。さらに、入力および観測雑音として、 $u(k) \sim N(0, \sigma_u^2)$, $v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$ なるガウス乱数を用いた。したがって、偏差 $e(k)$ の確率密度関数は正規分布となる。このとき評価量 $D(\theta(k); r(k))$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D(\theta(k); r(k)) & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{\sigma}^2(k)}{\sigma_v^2} - \frac{\sigma_v^2}{\hat{\sigma}^2(k)} \right\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\hat{\sigma}^2(k)} + \frac{1}{\sigma_v^2} \right\} \cdot \{\hat{\mu}(k) - \mu_v\}^2 \end{aligned}$$

考察の対象となる事柄は、(1) パラメータの変動形態すなわち、どのパラメータがどのような速さで変動するか、(2) 雑音の大きさがシステム同定に及ぼす影響である。

ここでは、具体的に次のような場合について考察する。

$$\begin{aligned} (1) \text{ ゲインが変動する。} \quad g(k) & = 1 + 0.9 \sin(k\omega T), \\ \xi(k) & = 0.5, \quad \omega_0 = 2\pi/(10T) \end{aligned}$$

(2) 減衰比が変動する. $\xi(k) = 1 + 0.9 \sin(k\omega T)$,

$$g(k) = 1, \omega_0 = 2\pi/(10T)$$

- (a) $\omega = 2\pi/(500T)$
- (b) $\omega = 2\pi/(1000T)$
- (i) $\sigma_v^2 = 0.1^2$
- (ii) $\sigma_v^2 = 0.2^2$

それぞれの組合せについて, モデルの次数および利用データ数を決定し, パラメータを推定して, 比較検討を行なう.

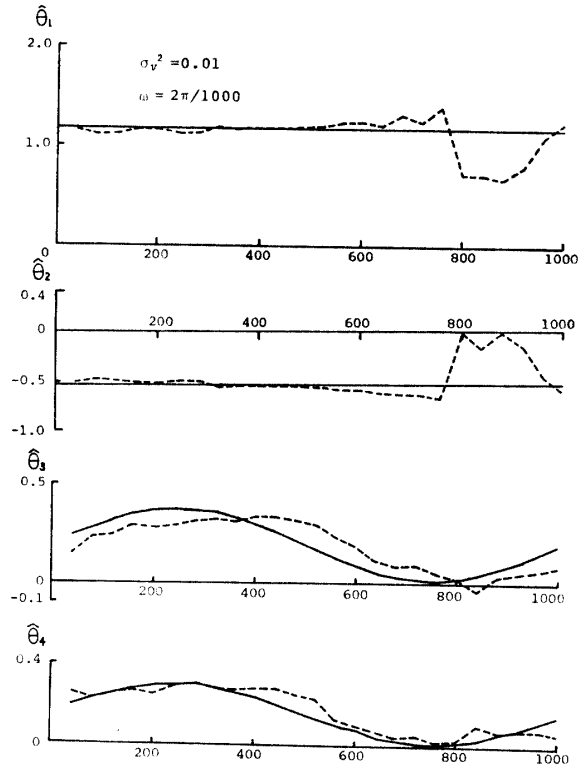


Fig. 2 System parameters and its estimates in Case of varying gain.

まず, ゲインが変動し, その結果, $\theta_0^*(k)$ が Fig. 2 実線のように変化する場合を考察する. このパラメータ変動形態は未知として, 総合評価量 J を最小にする利用データ数 N^* およびモデルの次数 n^* を決定した. N^* の決定には簡単のため, 二次内挿法を用い, n^* は低次より逐次比較により決定した. ゲインが $\omega = 2\pi/(1000T)$ で変動する場合の N^* を Fig. 3 に示す. また次の各モデルに対する総合評価量を Fig. 4 に示す. この図で, $IN = 3$ は

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) & \theta_2(k) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \theta_3(k) \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$IN = 4$ は

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) & \theta_2(k) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \theta_3(k) & \theta_4(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k)$$

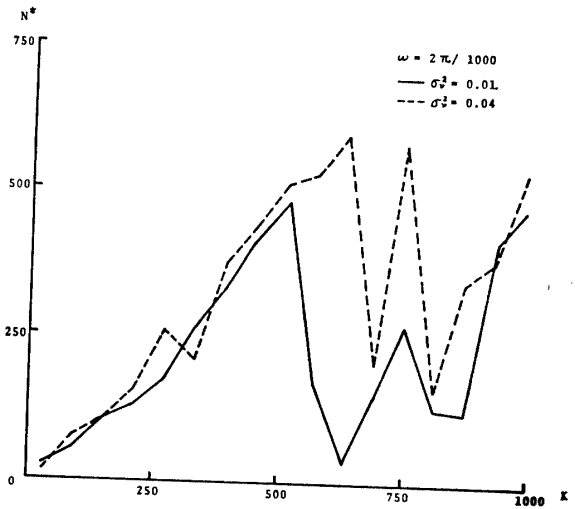


Fig. 3 Number of data to be used N^* in case of varying gain.

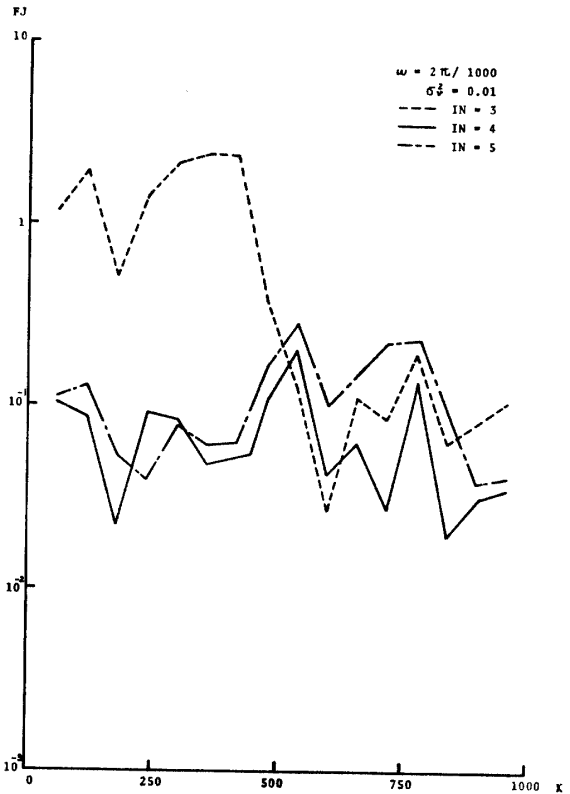


Fig. 4 Total criterion J in case of varying gain.

$IN = 5$ は

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) & \theta_2(k) & \theta_3(k) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \theta_4(k) & \theta_5(k) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k)$$

なるモデルをそれぞれ示している.

N^* を用いて、正しい次数を示す $IN=4$ とした場合、パラメータの推定結果を Fig. 2 に点線で示す。

さらに、ゲイン変動の速さを Fig.2 に示すものの二倍にした場合、利用データ数 N^* はFig. 5 に示すようになる。

次に、減衰比が変化し、パラメータがFig. 6 の実線のように変動する場合について考察しよう。ゲイン変動の場合と同様にして決定した N^* を Fig. 7 に示す。各モデル $IN=3,4,5$ に対する総合評価量 J を Fig. 8 に示している。正しい次数のモデルに対するパラメータの推定値 $\theta(k)$ を Fig. 5 に点線で示す。なお、パラメータ推定は評価量 $D(\theta(k); r(k))$ を、Fletcher-Powell 法により初期設定値を o として、最小化し

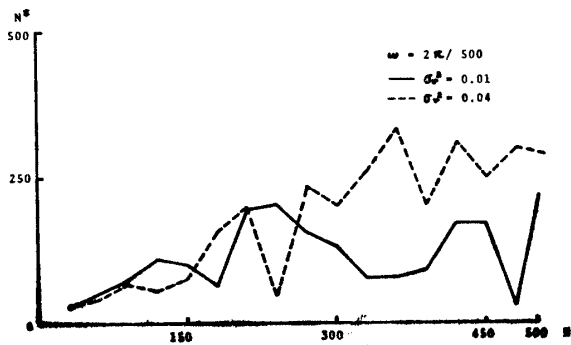


Fig. 5 N^* in case of fast varying gain.

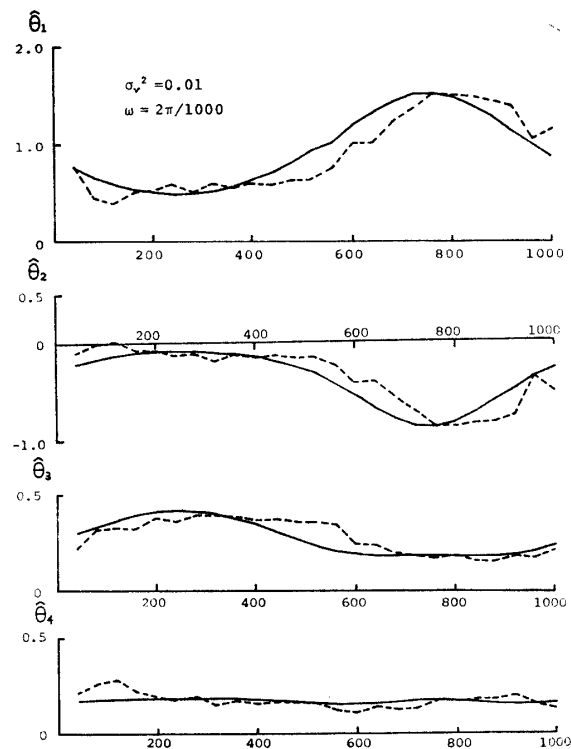


Fig. 6 System parameters and its estimates in case of varying damping factor ratio.

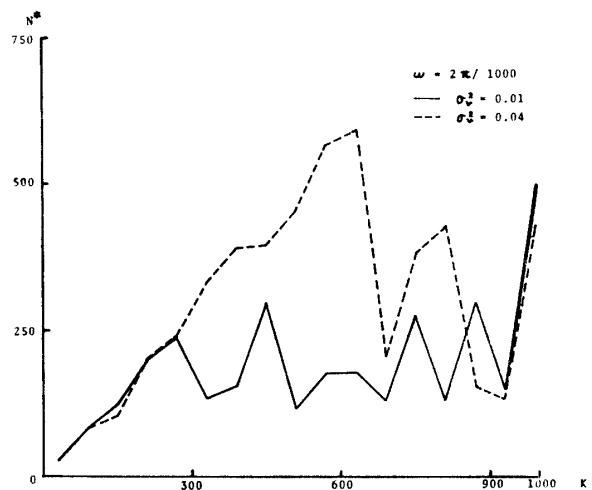


Fig. 7 N^* in case of varying damping factor ratio.

て行なった。Fig. 9 には、減衰比の変動の速さを Fig. 5 の二倍にした場合の N^* を示している。

これらの結果から、次のことが推察される。

(1) モデルの次数について

Fig. 4 および Fig. 8 の総合評価量 J は多くの時点で、正しい次数を示す $IN=4$ で最小となっている。これは、システムの次数を J により識別できたことを

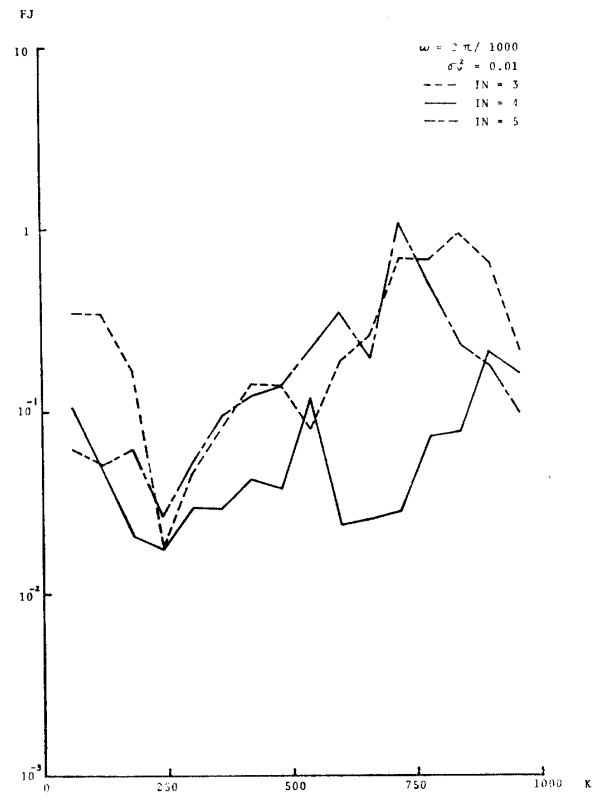


Fig. 8 Total criterion J in case of varying damping factor ratio.

意味している。

また、システムの出力が小さくなり、相対的に SN 比が悪い状態では (ゲイン変動では $3/4$ 周期, 減衰比変動では $1/4$ 周期付近), 低次元モデルに対する J が小さくなっている。この傾向は雑音により大きく, パラメータ変動がより速いほど顕著に現われており, このような厳しい状態では, 低次元モデルが重要なことを意味している。

(2) 利用データ数について,

Fig. 3, Fig 5, Fig. 7 および Fig. 9 より, この変動範囲では, N^* は変動速度に反比例する。また, N^* は SN 比にほぼ反比例する。特に, SN 比が悪い状況下 (ゲイン変動では $3/4$ 周期, 減衰比変動では $1/4$ 周期, 付近) で, N^* は増加し, SN 比が良い状況下 (ゲイン変動では, $1/4$ 周期, 減衰比変動では $3/4$ 周期付近) で, N^* は小さくなっている。

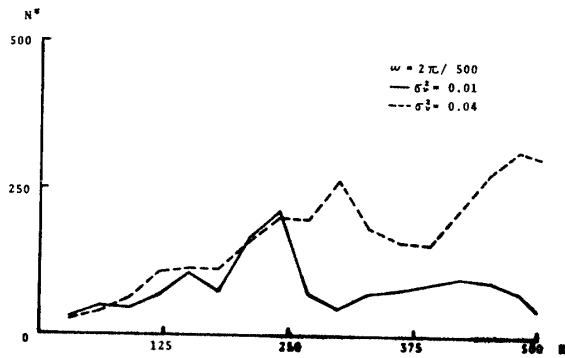


Fig. 9 N^* in case of fast varying damping factor ratio.

(3) パラメータの推定精度について,

Fig. 2 および Fig. 6 より, SN 比が悪くなるゲイン変動 $3/4$ 周期, 減衰比変動 $1/4$ 周期付近では, 推定値のばらつきが大きい。また, パラメータ変動が速いゲイン変動 $1/2$ 周期 および 減衰比変動 1 周期付近では, 推定値に大きな時間遅れがみられる。この対策としては, パラメータ予測機能を新しく付与することによって改善が期待できる。

6. 結 言

未知変動を伴うシステムについて, そのモデルの次数を決定し, パラメータを推定する問題について考察した。その際, 同定に利用すべき観測データ数について, システム変動の形態, 観測雑音の大きさとの関連を考察し, 利用データ数は変動速度にほぼ反比例し, 雑音の大きさに比例することを明らかにした。また, システム変動速く, 雑音の大きい厳しい状況下では, 低次元モデルが重要であることを示唆した。

今後の課題としては, パラメータの推定値に時間遅れを伴うことから, システムにパラメータ予測機能を付与することにより, パラメータ変動に適応させることが考えられる。

最後に, 卒業研究として協力いただいた松村潔氏 (現大阪大大学院生), 坪井俊洋氏 (現沖電気K. K.) に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) R. C. K. Lee: Optimal Estimation, Identification and Control, 1964.
- 2) R. Severstahl: The 4th Congress of IFAC, on Identification, (1969), p.63
- 3) W. N. Anderson: Annals of Mathematical Statistics, 40, 2064 (1969)
- 4) R. K. Mehra: IEEE Trans, Automatic Control, AC-16, 12 (1971)
- 5) 沖田, 竹田: 電気学会論文誌, 95-C, No. 7 (1975).
- 6) H. Akaike: Ann. Inst. Statist. Mathe., 23, 267 (1971).
- 7) 沖田, 中島, 大田: 電気学会論文誌, 97-C, No. 99 (1979).
- 8) Kullback & Solomon: Information Theory and Statistics, 22, John Wiley, (1959) p.22
- 9) P. I. Kuznetsov et: Theory of Probability and Its Applications, 5, 80 (1960).
- 10) 竹内: 確率分布の近似, 96, 教育出版, (1975.) p.96
- 11) 沖田, 竹田: 電気学会システム制御研究会資料, SC-79, 27 (1979).

(昭和55年10月15日受理)