

未知時変駆動行列の推定とその学習制御への応用（続報）

川 添 容 宏*

Estimation of Unknown Time-Varying Driving Matrix and Its Application to Learning Control (Further Report)

Yasuhiro KAWAZOE

Abstract

This is a further report of the previous one discussing the problem of estimating states and unknown parameters, and learning control for discrete-time control system of random disturbances and measurement noise.

Unknown parameters (in this report a driving matrix is considered) are time-varying, and the author considered an estimation of a polynomial for an unknown driving matrix with respect to time in order to estimate directly an unknown driving matrix.

The difference between this report and the previous one is that the one considered only state-observation equation as observation schemes, the other both a state-observation equation and a parameter observation equation.

Kalman filter is applied directly as estimation equation. As numerical examples, estimation of a state and an unknown time-varying driving coefficient and learning control in the first order control systems are shown.

1. 緒 言

著者は前報において、未知パラメータ推定問題の一つとして、状態値が不完全観測で、系の駆動行列が未知なる時間変化をする関数である場合の状態値推定ならびに未知パラメータ（この場合、駆動行列）推定に関して報告した¹⁾。すなわち、未知時変パラメータを時間に対する多項式で近似させ、その時間に対する定係数を推定していくことにより、その結果として、各段におけるパラメータ値を推定させ良好なる結果を得ることができた。その場合、状態値ならびに未知駆動行列は既知なる観測方程式を有しているとして取り扱った。

本報告においては、状態値観測方程式のみの存在下における未知時変駆動行列と状態値の推定につき考察し、この推定機構を応用して学習制御系を構成させる。この場合のように、観測方程式として、状態値観測方程式のみ考えることはより一般性を有し、かつ現実的な問題である。

推定機構の導出過程は前報とほとんど類似しているが未知パラメータ（言い換えれば被推定時間定数）の

真値に対する修正が状態値の各段における遷移を通してなされるのが本稿の特徴である。

2. 問題の設定と推定機構の導出

考察する状態遷移方程式ならびに状態値観測方程式は前報と同じ形をとる。すなわちそれらを各々、(1)、(2)式で表わす。

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)m(k) + \mathbf{w}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2)$$

\mathbf{x} : n 次元状態ベクトル（不完全観測）

m : スカラー操作量

ϕ : $n \times n$ 遷移行列（既知）

\mathbf{G} : $n \times 1$ 駆動行列（未知時変）

\mathbf{y} : p 次元観測ベクトル, $p \leq n$

\mathbf{M} : $p \times n$ 観測行列

\mathbf{w} : n 次元独立性ガウシヤン

平均値 = 0

共分散 = \mathbf{Q}'

\mathbf{v} : p 次元独立性ガウシヤン

平均値 = 0

共分散 = \mathbf{R}

* 工業短期大学部電気工学教室

ここで、被推定量は状態値ならびに駆動行列である。つぎに、未知時変駆動行列 $\mathbf{G}(k)$ をつぎの時間に関する多項式で近似する。

$$\mathbf{G}(k) = \mathbf{G}(k-1) + \mathbf{a}_1 T + \mathbf{a}_2 T^2 (2k-1) + \dots + \mathbf{a}_s T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ は $n \times 1$ 行列で時間に無関係である。これらを推定して結果において(3)式の駆動行列を推定するという考え方は前報と全く同一である。そこで、つぎの結合ベクトル $\mathbf{z}(k)$, $(s+2)n$ 次元ベクトルを構成すると、

$$\mathbf{z}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{G}^T(k-1) \quad \mathbf{a}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_s^T]^T \quad (4)$$

(1)式ならびに(3)式からつぎの方程式が得られる。

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{W}(k) \quad (5)$$

ここで、

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} \phi(k) & m(k)\Gamma(k) \\ \mathbf{0} & \Gamma(k) \\ & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2 & \dots & T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \\ 0 & 1 & T & \dots & T^{s-1} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

平均値 = 0

$$\text{共分散} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

つぎに、同じような要領で、(2)式を書き換えれば、

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (9)$$

ここで、

$$\mathbf{H}(k) = [\mathbf{M}(k) : \mathbf{0}] \quad (10)$$

(5), (9)式にカルマンフィルターの推定方程式を適用すると、

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{K}(k+1) \times [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{z}}(k)] \quad (11)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1) \times [\mathbf{H}(k+1)\mathbf{D}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}]^{-1} \quad (12)$$

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q} \quad (13)$$

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{D}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{D}(k) \quad (14)$$

ここで、

$$\mathbf{C}(k) = E\{[\hat{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{z}(k)][\hat{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{z}(k)]^T\} \quad (15)$$

(11)~(15)の推定方程式において、現在 $k=i+1$ 時点と

すれば、一時点前の i 時点における誤差共分散行列(14)式と、同じく i 時点における操作量 $m(i)$ の関数である行列 $\mathbf{A}(i)$ によって(13)式から $\mathbf{D}(i+1)$ が得られ、それを用いて修正ゲイン $\mathbf{K}(i+1)$ が(12)式から求められる。

この修正ゲインは現 $i+1$ 時点における出力行列と、一時点前における結合ベクトルの期待値による推定出力行列との差にかかる。かくして、(11)式から $i+1$ 時点における推定値が得られる。適応制御への応用(学習制御)については前報と全く同一なる手法であり説明を省略する。

3. 数 値 例

3.1 例題1 単位ステップ入力を持った1次元制御系の未知時変駆動係数の推定

サンプリング周期 $T=1(sec)$ のつぎの1次元系について考える。

$$x(k+1) = x(k) + g(k)m(k) + w(k) \quad (E1-1)$$

時変駆動係数の真関数を

$$g(k) = g(k-1) + 0.02 - 0.002(2k-1) \quad (E1-2)$$

すなわち、時間に対する定係数を $a_1=0.02$,

$a_2=-0.002$ とする。また、状態値観測方程式を、 y を観測量(出力量)として、観測雑音 $v(k)$ が附加され、

$$y(k) = 2x(k) + v(k) \quad (E1-3)$$

で表わされるものとする。ここで、雑音 $w(k), v(k)$ は互いに平均値零、共分散値0.1の独立性雑音と見なされるものとする。また、制御入力 $m(k)$ として単位ステップ関数を採用したのは、特別な理由はないが、単に系の未知パラメータの同定のみを目的としているからであり、ここでは制御の目的は考えに入れていない。いま、被推定未知パラメータ(駆動係数)を時間についての多項式で近似し、その第2項までとってみる。

そうすると、状態値と結合した未知結合ベクトルは、

$$\mathbf{z}(k) = [x(k) \quad g(k-1) \quad a_1 \quad a_2]^T \quad (E1-4)$$

にて構成される。初期値(真値)を $g(0)=1.022, x(0)=1.0$ とする。前もって得られている先験情報 $\hat{\mathbf{z}}(0), \mathbf{C}(0)$ を夫々、

$$\hat{\mathbf{z}}(0) = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T \quad (E1-5)$$

$$\mathbf{C}(0) = \begin{bmatrix} & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (E1-6)$$

として、デジタルコンピュータを用いてシミュレーションする。計算結果を Fig.1 から Fig.3 までに示す

Fig.1 は未知パラメータの時間に対する多項式の定係数の推定の模様を示す。この図では、推定値の真値に対する割合でもって推定状況を表わしている。10段目以前では係数 a_1, a_2 共に推定はよくなく、推定値は

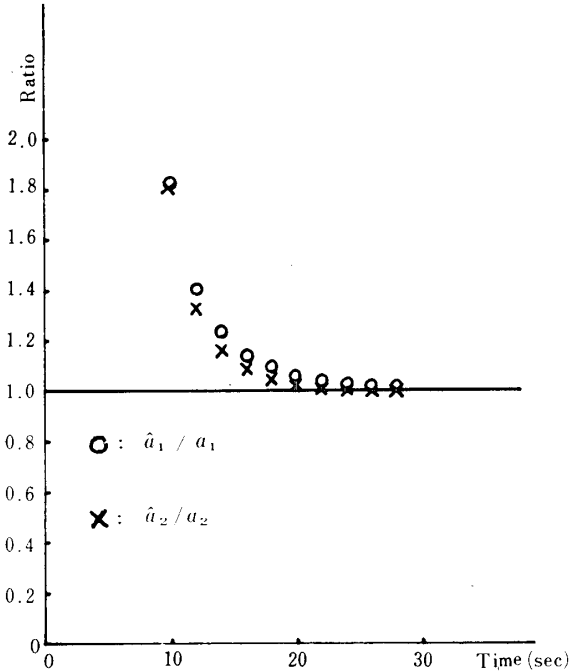


Fig. 1 Estimation of constants, a_1 and a_2 of polynomial of time varying driving matrix in example 1

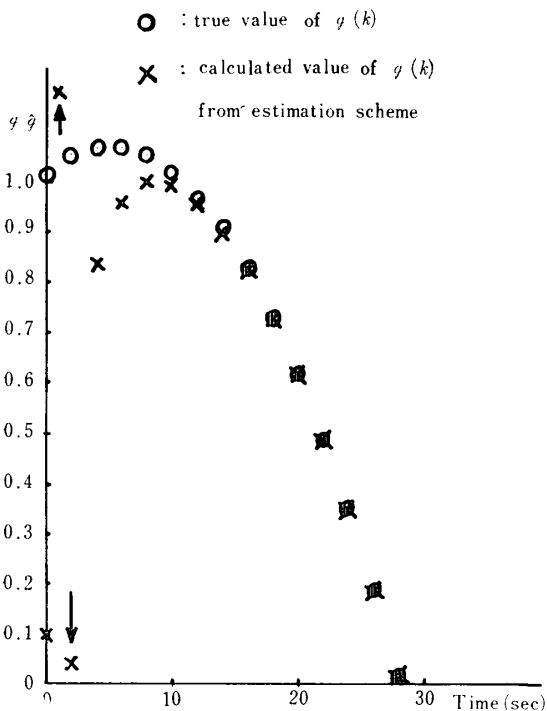


Fig. 2 Calculated value curve of $g(k)$ from estimated values of $g(k-1), a_1$ and a_2 in example 1

真値の倍以上の値を示している。推定誤差が10%以内になるのはおおむね18段目以後である。

30段目でほぼ真値に一致している。Fig. 2は前記の a_1, a_2 の推定値と結合ベクトルの成分の一つの $g(k-1)$, すなわち現時点より一時点前の駆動係数を用いて計算により得られた駆動係数の当該時点における値を各時点にて示したものである。初期においては、真値曲線に対してオーバーシュートが見られるが、5, 6段で急激に真値に近づき、10段目以後では推定が良好に達成されているとすることができる。つぎに、状態値の推定をFig.3で示した。初期真値1.0に対し、先験情報は0.1と十分の一であるが第1段目ではほぼ満足のいく結果が得られている。

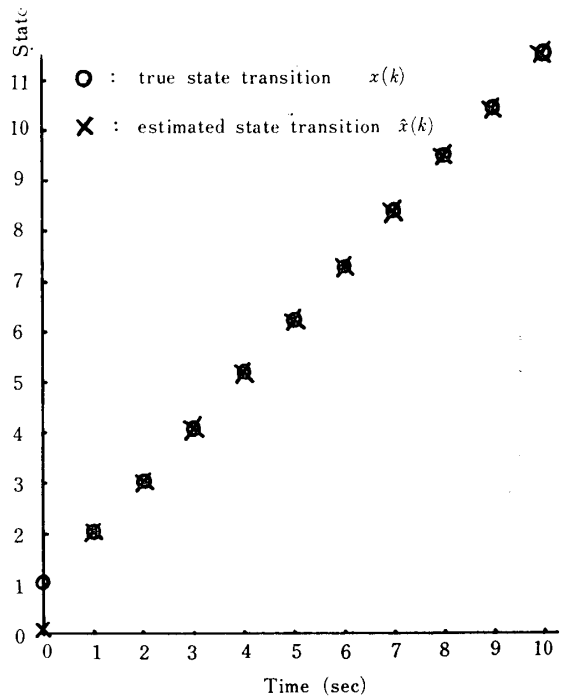


Fig. 3 State transition curve in example 1

3・2 例題 2 未知時変駆動係数を持った1次元系の学習制御

例題1で考察したサンプリング周期 $T=1(sec)$ の同様な制御系について考える。

$$x(k+1) = x(k) + g(k)m(k) + w(k) \quad (E2-1)$$

未知時変駆動係数 $g(k)$ の真関数を $a_1=0.015, a_2=-0.0005$ なる次式で表わされるものとする。

$$g(k) = g(k-1) + 0.015 - 0.0005(2k-1) \quad (E2-2)$$

状態値観測方程式も例題1と同じ

$$y(k) = 2x(k) + v(k) \quad (E2-3)$$

とする。雑音 $w(k), v(k)$ は共に平均値零、共分散値0.1で互いに独立とする。本例題2では推定そのものは

目的でなく、制御が目的である。制御の評価関数を次式とする。Eは期待値演算子である。

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^{50} [x^2(k) + m^2(k-1)] \right\} \quad (E2-4)$$

未知パラメータの多項式近似を時間に関して第2項までとれば未知結合ベクトルは、

$$\mathbf{z}(k) = [x(k) \quad g(k-1) \quad a_1 \quad a_2]^T \quad (E2-5)$$

となる。初期真値として $g(0) = 0.0655, x(0) = 10$ をと

る。先験情報として、

$$\hat{\mathbf{z}}(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (E2-6)$$

$$\mathbf{C}(0) = \begin{bmatrix} 100 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 2 \end{bmatrix} \quad (E2-7)$$

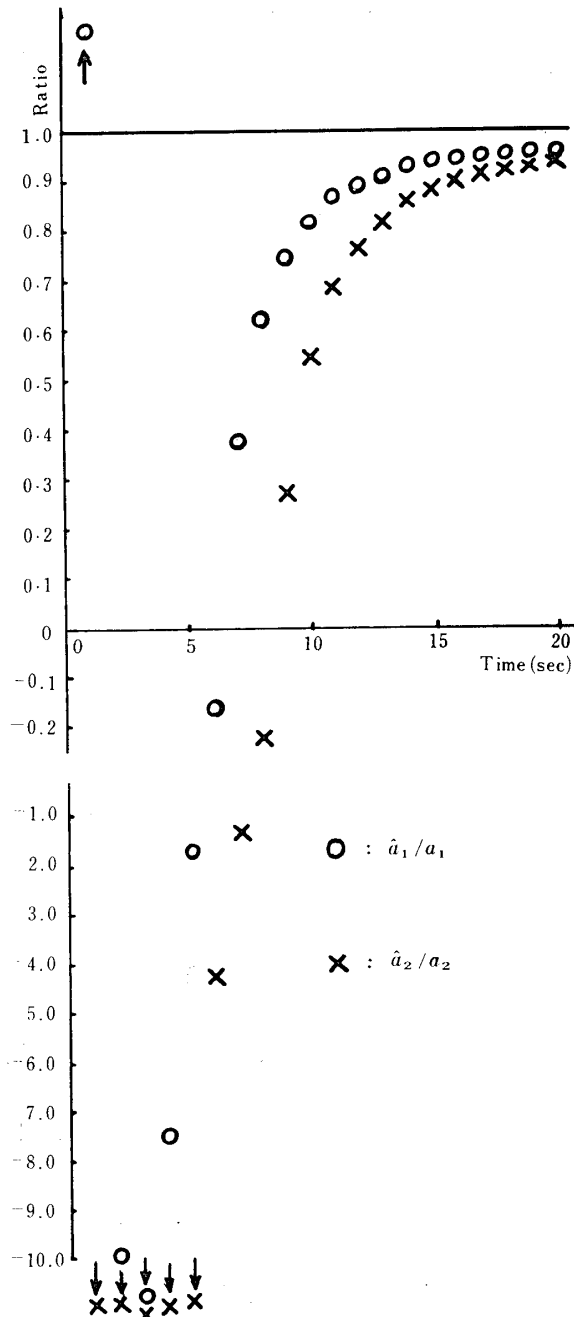


Fig. 4 Estimation of constants, a_1 and a_2 of polynomial of time varying driving matrix in example 2

が与えられたときの推定ならびに制御の状況をFig. 4からFig.6に示す。ただし、評価関数を最小にする最適操作量の決定にはO.P.法を用いた。

Fig.4は駆動係数の時間に関する多項式の定係数 a_1, a_2 の推定の様子である。これは真値との比で示した。

10数段目で推定誤差が10%以内になっている。Fig.5はこの係数の推定値に基づき算出された駆動係数値である。10段目でほぼ真値と一致している。この図では20段以後は省略されているが、40段位からいづれか推定値が真値からずれてきている。つぎに、状態値の遷移状況、推定状況を Fig. 6 にて示す。状態値の真値10、先験値1に対してすでに1段でほぼ真値に近い推定値が得られている。以後は、推定値は完全に真値に一致している。図中で、これと対照的に描いたのが、既知パラメータ、状態値完全観測の場合の最適制御の状態値遷移である。30段位まではいづれかの差異が認められるがそれ以後ではほとんど同一と見ることが出来る。(ほぼ整定に近い)

4. 結果に対する検討

例題1、例題2共に未知時変パラメータは時間に関してゆるやかに変化する2次曲線である。共に時間多項式を2項まで展開し定係数の推定を行なわしめた。

まず、例題1の推定のみに関しては、定係数 a_1, a_2 の推定は終段に至るまでさほど良好とは思われなくてもかかわらず、それらの推定値を基にして算出された駆動係数値そのものはきわめて真値に近い。これは a_1, a_2 の推定値の真値からのずれと同様に、 $g(k-1)$ の推定値も真値からずれており、結果として、それらの関数値である駆動係数値が良好に推定されていることになる。このことは例題2についても概して同様である。Fig.3に示されているように状態値の推定が良好なのはその時点において状態値の1次結合である出力量が得られ、かつ状態量が他の入力項や雑音の項に比しかなり大きいため、カルマンフィルターにおける状態値の真値への修正が大きく効果を発揮するためと思われる。それに比し、未知パラメータの推定は実際

の状態値の変化を何回か経験した後でなければ、未知パラメータの時間変化による状態値変化を捕えることができないためかなりの時間を必要とする。

つぎに例題2については、未知駆動係数の時間多項式の係数 a_1 , a_2 の推定状況は例題1のそれとたいした変化はない。ただ時間初期において例題1が真値よりも大きな推定値を有しているのに対し、例題2の方は逆に小さな推定値を持っている。これは、例題1, 例題2で未知関数の係数値が異なるため、一般的にはこれから論じられないにしても、ある程度同定に関する最適(同定速度が速いという意味で)入力存在を示唆しているように思われる。これについては今後の課

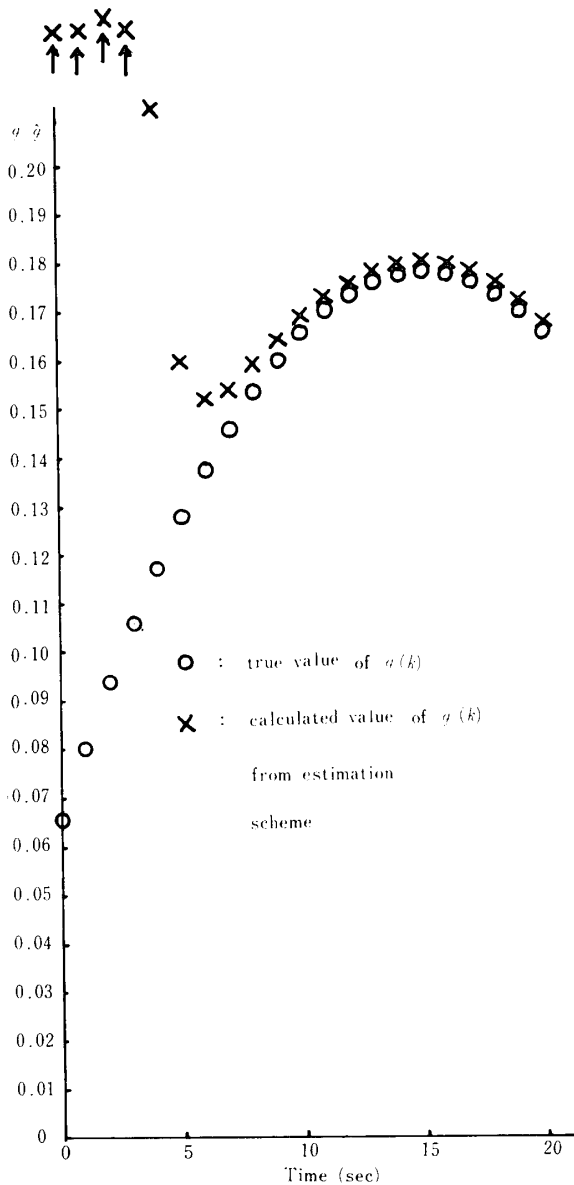


Fig. 5 Calculated value curve of $g(k)$ from estimated values of $g(k-1)$, a_1 and a_2 in example 2

題であろう。つぎにFig.6にて示す状態値遷移については、推定そのものは第1段目でほぼ真値に近く、またあわせて既知パラメータ、状態値完全観測の場合の状態値遷移と比較した。

5. 結 言

以上論じた未知パラメータの推定機構はカルマンフ

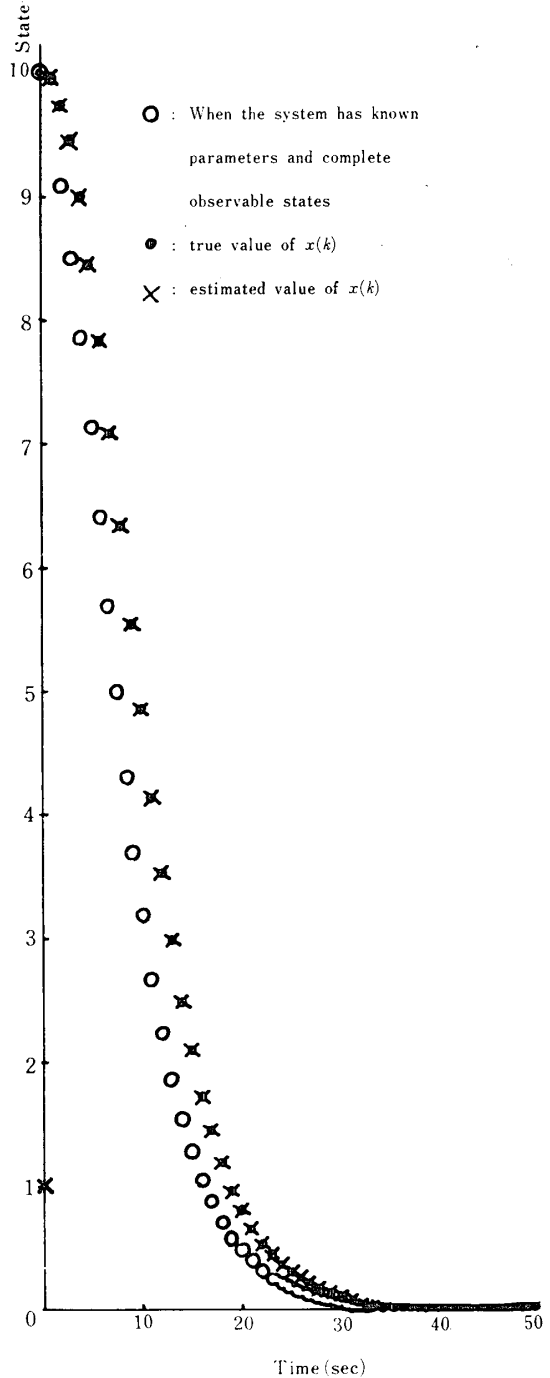


Fig. 6 State transition curves in Example 2 and in the case that the system has known parameters and complete observable states

フィルターの直接的応用であるが、状態値遷移を間接的に観測することによって、パラメータを推定する手法である。観測は状態値に係る出力量のみで、この点が前報に比し大きく異なる点であり、また、より現実性を考慮したものである。未知結合ベクトルの成分数が増すことさえ厭わなければ、未知関数への近似が一層良好に行われるであろうことは明白である。制御系において、単に未知パラメータの推定のみを目的とする場合は僅少で、推定機構をいかに最適制御に取り入れるかが問題である。すなわち、未知パラメータの制御系では、その未知パラメータを逐次学習推定（探索）していくことにより、その最良推定量を基にして最適制御方策の決定を実行していくのである。したがって、多くの場合、推定機構と最適制御機構はオンラ

インにて実施されるのが望ましい。本稿で述べた方法は推定と制御をオンラインで交互に繰り返すやり方である。よって、実際の場合では、その計算時間短縮のために大きな努力が払われなければならない。それにはデジタルコンピュータの高速化と並行して制御の質を落とすことなくどの程度計算機構が簡略化して計算時間の短縮がはかれるか今後の課題として残る。

終りに臨み、終始懇切丁寧にご指導戴いた九州大学辻 節三教授、日頃ご鞭撻戴く本学牧 元教授、種々ご意見を戴く神谷健児助教授に深く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 川添容宏：山口大学工学部研究報告19,3 (1968)

(昭和43年11月14日受理)