

未知時変駆動行列の推定とその学習制御への応用

川 添 容 宏*

Estimation of Unknown Time-Varying Driving Matrix and It's Application to Learning Control

Yasuhiro KAWAZOE

Abstract

The problem of estimating state variables and unknown parameters is considered for discrete-time control system of random disturbances and measurement noise. Where, elements of a time-varying driving matrix are considered as unknown parameters. Making use of the fact that a time-varying function is able to be expanded into a polynomial for time, the author expanded unknown elements of a driving matrix into a polynomial for time. Then, estimating constants of a polynomial for time was intended, instead of estimating driving matrix.

Estimating them, we can calculate an estimated value of the driving matrix. To estimate state variables and constants of a polynomial with respect to a driving matrix, the author constituted a new joint vector with them.

After transforming the state transition equation and observation equation into a new transition equation and an observation equation for a joint vector, Kalman filter was adapted to estimate an unknown joint vector. As an application, a learning control was discussed to be optimized with respect to a quadratic criterion function with the aid of dynamic programming method.

1. 緒 言

制御系が簡単な系から複雑な系に進展するにつれ、また、制御の活用される場が増大するにつれ、その系についての情報は完全な形では得難くなりつつある。

言い換えれば、系のパラメータが未知であったり、あるいは、ランダムな雑音により系が汚されていたりする状況の下で系を最適に制御する必要性が生じて来たということが出来る。しかも、系の出力値が直接に観測測定が可能である保証性が少なくなってくると、結局、未知パラメータと状態値を逐次推定しつつ最適に制御を行なわしめなければならない。本稿は、未知パラメータ推定の問題とそれを基にした学習制御についての研究に関するものである。

雑音の影響下にある状態値推定の問題が離散値形式にてカルマンにより示されて以来、デジタルシミュレーションに適しているところから、デジタルコンピュータ使用を前提とした推定問題がカルマンフィルター利用によりいろいろな角度から研究がなされてい

る。1),2),3) ここでは、ハイスピードデジタルコンピュータを全面的に利用した未知時変駆動行列を含んだ離散値制御系のパラメータ推定ならびに最適制御合成について考察を行なう。

時間変化する関数が時間についての多項式に展開できる点に注目すれば、その各時間係数を逐次推定していくことにより結果において、未知時変駆動行列を推定することが可能である⁴⁾。ここでは、この概念を用いる。また、状態値については、完全直接観測が不可能で、出力ベクトルによつて間接的にしか知り得ないとした。したがって、状態値ベクトルと前記未知時変駆動行列の多項式表示による時間に対する係数を成分にした未知結合ベクトルを新たに構成し、それをカルマンフィルターを用いて推定し、二次評価関数を最小にする最適制御を DP 法を用いて行なった。

2. 問題の設定

緒言においても述べたように、本方法はハイスピー

* 工業短期大学部電気工学教室

ドディジタルコンピュータの使用を前提に考察したので最初から離散値的表現を用いる。考察する状態遷移方程式は線形離散値系で(1)式で表わす。

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)m(k) + \mathbf{w}(k) \quad (1)$$

\mathbf{x} : n 次元状態ベクトル

m : スカラー操作量

ϕ : $n \times n$ 遷移行列

\mathbf{G} : $n \times 1$ 駆動行列 (未知)

\mathbf{w} : n 次元外乱ベクトル (独立性ガウシヤン)

平均値 : $\mathbf{0}$, 共分散 : \mathbf{Q}'

ここで、状態ベクトル \mathbf{x} は完全観測不可能で駆動行列が未知時変の要素により構成されているものとする。遷移行列は既知であるとする。つぎに、状態ベクトル \mathbf{x} は(2)式の状態値観測方程式により、その出力ベクトルを観測することによって間接的に知られるものとする。

$$\mathbf{y}_1(k) = \mathbf{M}_1(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_1(k) \quad (2)$$

\mathbf{y}_1 : p 次元観測ベクトル $p \leq n$

\mathbf{M}_1 : $p \times n$ 観測行列

\mathbf{v}_1 : p 次元観測雑音 (独立性ガウシヤン)

平均値 : $\mathbf{0}$, 共分散 : \mathbf{R}_1

一方、未知時変駆動行列はある観測機構をとうして間接的に測定できるという仮定が成立するものとして、その観測方程式を(3)式で表わす。

$$\mathbf{y}_2(k) = \mathbf{M}_2(k)\mathbf{G}(k) + \mathbf{v}_2(k) \quad (3)$$

\mathbf{y}_2 : q 次元観測ベクトル $q \leq n$

\mathbf{M}_2 : $q \times n$ 観測行列

\mathbf{v}_2 : q 次元観測雑音 (独立性ガウシヤン)

平均値 : $\mathbf{0}$, 共分散 : \mathbf{R}_2

(1), (2), (3)式において雑音は互に独立なものとする。上式の条件下において状態値ならびに駆動行列を推定するのが、本稿の最初の目的である。

3. 推定方程式の導出

ある時間変化関数 $\alpha(t)$ があるとき、これを一般的に表わすと、つぎの時間についての多項式に展開した形で表示することができる。

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_s t^s \quad (4)$$

ここで、 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ は定数である。(4)式は連続形における表現であるが、これをサンプリング周期 T の離散値形にて表わすと、サンプリングの連続した時点 $(k-1)T$ と kT における $\alpha(t)$ の差をとることにより、つぎのように表わされる。

$$\alpha(k) = \alpha(k-1) + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2(2k-1) + \dots + \alpha_s$$

$$\times T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \quad (5)$$

ここで、

$$\binom{s}{r} = \frac{s(s-1)\dots(s-r+1)}{r!} \quad (6)$$

いま、駆動行列が未知時変関数であるから、これを時間に関する多項式で表わすとすれば、未知駆動行列の推定は多項式の定係数を推定することによつてなされ得る。すなわち、未知駆動行列を(7)式で表わすとき、時点 kT において、定係数 a_1, \dots, a_s が推定できれば、その時点における駆動行列 $\mathbf{G}(k)$ は一時点前の $\mathbf{G}(k-1)$ の値を用いて(7)の式から算出できる。

$$\mathbf{G}(k) = \mathbf{G}(k-1) + \mathbf{a}_1 T + \mathbf{a}_2 T^2(2k-1) + \dots + \mathbf{a}_s T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ は $n \times 1$ 行列である。

つぎに、状態ベクトル $\mathbf{x}(k)$ 、駆動行列の $\mathbf{G}(k-1)$ 、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ を成分としたつぎの未知結合ベクトル $\mathbf{z}(k)$ を定義する。

$$\mathbf{z}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{G}^T(k-1) \quad \mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{a}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_s^T]^T \quad (8)$$

ここで、添字 T は転置行列の意味である。 $\mathbf{z}(k)$ は $(s+2)n$ 次元ベクトルである。そこで、(8)式の $\mathbf{z}(k)$ を用いて(1)と(2)、(3)式の状態遷移方程式と観測方程式を書き改めると、(9)、(10)式を得る。

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{W}(k) \quad (9)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{V}(k) \quad (10)$$

ここで、

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} \phi(k) & m(k)\Gamma(k) \\ \mathbf{0} & \Gamma(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & T^2(2k-1) & 0 & \dots & T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T & 0 & T^2(2k-1) & 0 & \dots & T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2(k)\Gamma(k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{V}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(k) \\ \mathbf{v}_2(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\mathbf{A}(k), \Gamma(k), \mathbf{H}(k)$ はそれぞれ

$(s+2)n \times (s+2)n$, $n \times (s+1)n$,
 $(q+p) \times (s+2)n$ 行列, $\mathbf{W}(k)$, $\mathbf{V}(k)$ は各々 $(s+2)n \times 1$, $(q+p) \times 1$ 雑音ベクトルで, 平均値は共に 0, 共分散はそれぞれ \mathbf{Q} , \mathbf{R} とする.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (14')$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (15')$$

(9), (10)式の下でカルマンフィルタ方程式を求めると⁵⁾

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{z}}(k)] \quad (16)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1) [\mathbf{H}(k+1)\mathbf{D}(k+1) \times \mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}]^{-1} \quad (17)$$

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{D}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{D}(k) \quad (19)$$

となる. ここで, $\mathbf{C}(k)$ は (20) 式で定義される誤差共分散行列である.

$$\mathbf{C}(k) = E\{ [\hat{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{z}(k)] [\hat{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{z}(k)]^T \} \quad (20)$$

ここで, E は期待値演算子である.

(16)~(19)のカルマンフィルタの推定機構を簡単に説明すれば, 先ず時点 $k=0$ にて, 先験情報として結合ベクトル $\mathbf{z}(0)$ の推定値 (期待値) $\hat{\mathbf{z}}(0)$ とその誤差共分散行列 $\mathbf{C}(0)$ を与えることにより, 次段における (1) の推定値 $\hat{\mathbf{z}}(1)$ が得られる. 以下同様である. これで推定機構が得られた.

4. 学習制御への適用

制御の評価基準として二次形式評価関数を最小にする最適制御について⁶⁾, 前記の推定機構を用いた学習制御について考察する. 評価関数として次式をとる.

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{x}^T(k) + \lambda m^2(k-1)] \right\} \quad (21)$$

ここで, \mathbf{S} は正定値行列, λ は一定乗数とする.

DP法を用いて最適操作量を求めると,

$$m^0(k) = \mathbf{B}(N-k)\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (22)$$

となる. ここで, フィードバック行列 $\mathbf{B}(N-k)$ はカルマンフィルタの推定機構によって, その段までに得られている結合ベクトル $\mathbf{z}(k)$ の成分の推定値 $\hat{\mathbf{G}}(k-1)$, $\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_s$ を用いて計算された $\hat{\mathbf{G}}(k)$ を用いて, つぎの繰り返し計算式から得られる.

$$\mathbf{B}(N-k) = -[\mathbf{L}_{GG}(N-k+1) + \lambda]^{-1} \times \mathbf{L}_{G\phi}(N-k+1) \quad (23)$$

$$\mathbf{P}(N-k) = \mathbf{L}\phi\phi(N-k+1) + \mathbf{L}_{\phi G}(N-k+1)\mathbf{B}(N-k) \quad (24)$$

ここで,

$$\mathbf{L}_{GG}(N-k+1) = \hat{\mathbf{G}}^T(k) [\mathbf{S}(k+1) + \mathbf{P}(N-k+1)] \hat{\mathbf{G}}(k) \quad (25)$$

$$\mathbf{L}_{G\phi}(N-k+1) = \hat{\mathbf{G}}^T(k) [\mathbf{S}(k+1) + \mathbf{P}(N-k+1)] \phi(k) \quad (26)$$

$$\mathbf{L}\phi\phi(N-k+1) = \phi^T(k) [\mathbf{S}(k+1) + \mathbf{P}(N-k+1)] \phi(k) \quad (27)$$

$$\mathbf{L}_{\phi G}(N-k+1) = \phi^T(k) [\mathbf{S}(k+1) + \mathbf{P}(N-k+1)] \hat{\mathbf{G}}(k) \quad (28)$$

この間の計算の順序をわかりやすく述べると, 現在 i 段として,

(i) カルマン推定機構により, その段までに得られている $\hat{\mathbf{G}}(k-1)$, $\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_s$ を用いて $\hat{\mathbf{G}}(k)$ を (29)式により, $k=i$ より $N-1$ まで計算する.

$$\hat{\mathbf{G}}(k) = \hat{\mathbf{G}}(k-1) + \hat{\mathbf{a}}_1 T + \dots + \hat{\mathbf{a}}_s T^s \sum_{r=0}^{s-1} \binom{s}{r} (k-1)^r \quad (29)$$

これにより, その時点における駆動行列の推定値 $\hat{\mathbf{G}}(i)$, その時点を基準に推定した未来値 $\hat{\mathbf{G}}(i+1), \dots, \hat{\mathbf{G}}(N-1)$ が得られた.

(ii) つぎに, 上で得られた $\hat{\mathbf{G}}(i)$, $\hat{\mathbf{G}}(i+1), \dots, \hat{\mathbf{G}}(N-1)$ を用いて, (23), (24)式の繰り返し計算を $k=N-1$ から i まで行ない $\mathbf{B}(N-i)$ を求める.

(iii) 状態の推定値を用いて最適操作量 $m^0(i)$ を得る.

$$m^0(i) = \mathbf{B}(N-i)\hat{\mathbf{x}}(i) \quad (30)$$

(iv) $(i+1)$ 段のカルマンフィルタ推定を行なう. 以下同様である.

5. 数値例

5.1 例題 1 単位ステップ入力を持った1次元系の未知時変駆動係数の推定

サンプリング周期 $T=1(sec)$ のつぎの1次元系を考える.

$$x(k+1) = x(k) + g(k)m(k) + w(k) \quad (31)$$

$$y_1(k) = 2x(k) + v_1(k) \quad (32)$$

$$y_2(k) = 3x(k) + v_2(k) \quad (33)$$

ここで, $m(k)$ は単位ステップ関数を考える. (制御目的は無視する.) 駆動係数の真値を(34)式で表わされるものとする.

$$g(k) = g(k-1) - 0.1 + 0.08(2k-1) \quad (34)$$

(34)式を未知パラメータとし, 被推定係数として, 時間に関する多項式の第2項までとってその係数を

a_1, a_2 とし、状態値と結合したベクトル $\mathbf{z}(k)$ を(35)式で定義する。

$$\mathbf{z}(k) = [x(k) \quad g(k-1) \quad a_1 \quad a_2]^T \quad (35)$$

雑音 w, v_1, v_2 は互いに独立かつ時間相関のない平均値零、共分散0.1のガウシヤンとする。初期条件を $x(0)=10, g(-1)=1.0$ (すなわち、 $g(0)=1.083$)

とし、先験情報を

$$g(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (36)$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

として推定を行なわせる。その結果を Fig.1, Fig.2 に示す。

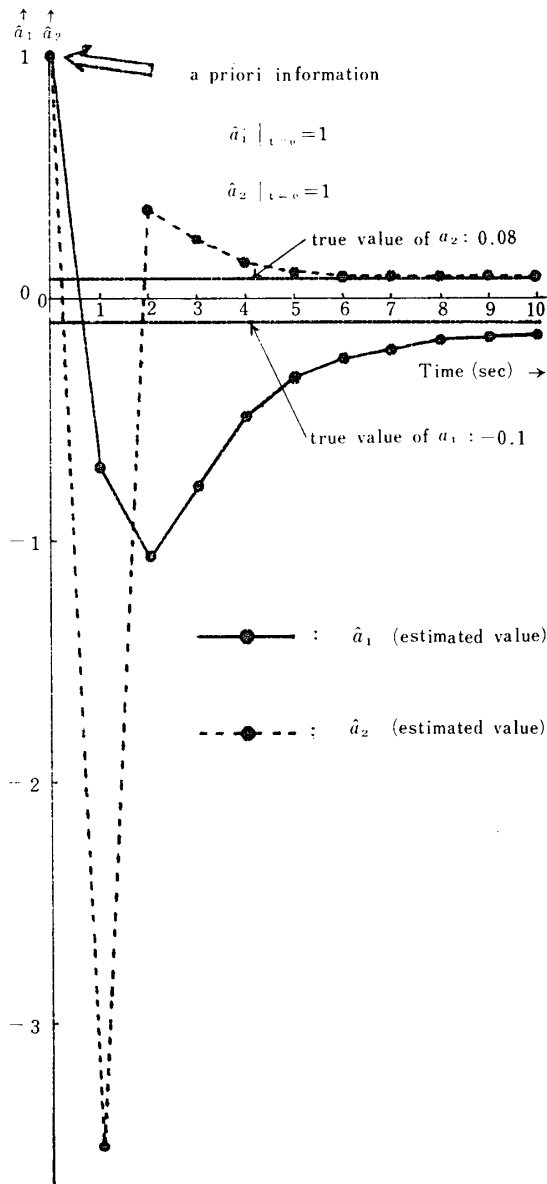


Fig. 1 Estimation of a_1 and a_2 in example 1

5・2 例題 2 未知時変駆動係数を持った1次元制御系の学習制御

例題1 と同じ系について、つぎの評価関数を最小にする最適制御について考察する。

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N [x^2(k) + m^2(k-1)] \right\} \quad (38)$$

$N=100$ として初期条件ならびに先験情報は例題1. と同一のものとする。未知定係数の推定の様子をFig. 3, 状態遷移と駆動係数の推定計算値を Fig.4 にて示す。また、Fig.5 は各段における評価値を、状態値完全観測、既知駆動係数の場合と対照して示す。

6. 例題に対する検討

最初に例題1 の推定のみの場合については、Fig.1 に示すように被推定定数 a_1 に比し a_2 の

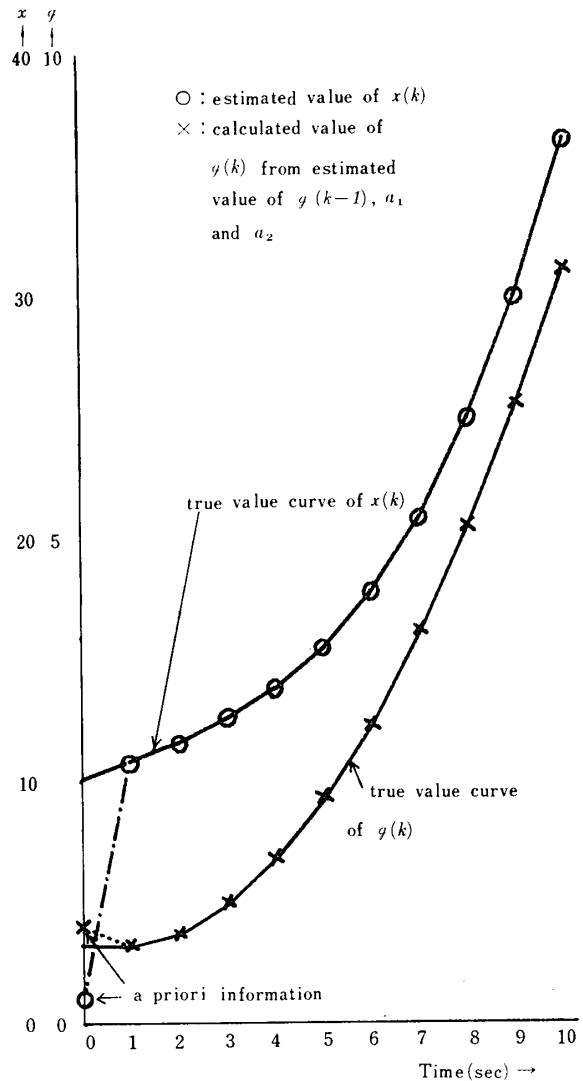


Fig. 2 Estimation of state $x(k)$ and calculated value of driving coefficient $g(k)$ from estimated value of $g(k-1), a_1$ and a_2

推定の度合いが良好である。それに比べ a_2 の方は時間初期における分散の様子は a_1 よりも良いが真値への収束性は劣っている。先験情報は a_1, a_2 共に1としているから a_2 の方がより真値に近い値となっている。一方, a_1, a_2 の推定値を基にして計算により求めた $g(k)$ の時間変化はFig. 2からわかるようにすでに一段目において真値と一致している。もっとも、この場合、先験情報 $g(-1)=1$ が真値と全く一致していることも若干影響しているものと思われるが、概して良い結果を与えるようである。つぎに、状態遷移の状況は同じくFig. 2に示すごとく、初期条件(真値) $x(0)=10$ に比し、先験的推定値は $\hat{x}(0)=1$ と、かなりの差があるにもかかわらず第1段目において、ほぼ良い結果を得、第2段目以後においては完全に推定が行なわれたと見ることができる。

例題2の場合は考察する系は例題1と同一のものであるが、例題1が制御目的を無視したのに比べ、ここでは制御そのものが目的である。Fig. 3に被推定係数

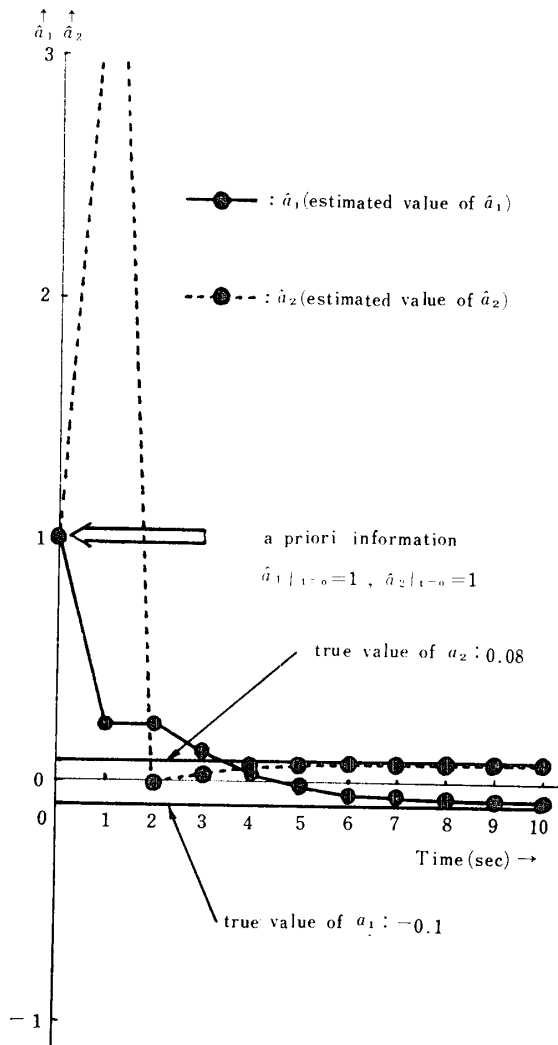


Fig. 3 Estimation of a_1 and a_2 in example 2

a_1, a_2 の推定状況を示す。これによると真値に近い先験情報を与えられた a_2 の方が推定は良好である。

Fig 1 の例題1の場合を比較するとこちらの方が推定状況は良好となっている。Fig. 4に a_1, a_2 の推定値によって算出した $\hat{g}(k)$ の時間変化を示す。これによると例題1と同様に非常に良い近似が得られていることがわかる。Fig. 4にはまた状態値推移状況を示している。状態値についても推定が非常に良好に行なわれていることがわかる。第1段目においてすでに満足される結果を得ている。この学習制御と対比させるために、既知パラメータ、状態値完全観測なる系の最適制御の場合の状態値変化をFig. 4中に示しておいた。Fig. 5には各段における評価量を、既知パラメータ、状態値完全観測の場合の最適制御と対照して示す。ここで、例題1

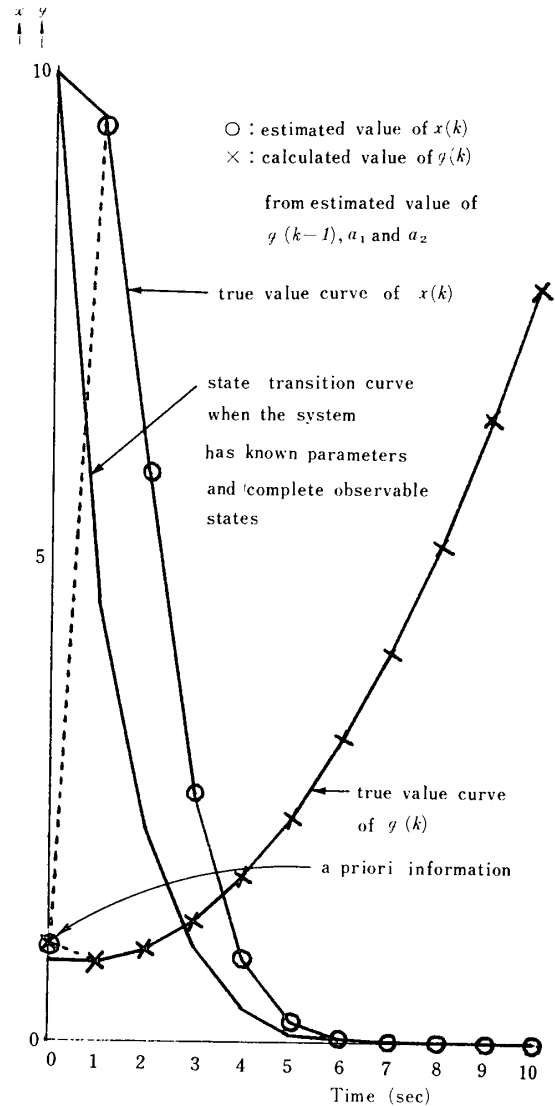


Fig. 4 State transition curve, estimation curve of state $x(k)$ and calculated value curve of driving coefficient $g(k)$ from estimated value of $g(k-1), a_1$ and a_2

と例題2の場合における定係数の推定はかなり差があるけれども(例題1よりも例題2の方が概して良い。)それを基にして計算して出された駆動係数そのものはほとんど差がなく第1段目でほぼ真値と一致している。これは定係数の推定値が真値からずれていても当該段より1時点前の駆動係数値の推定値がやはり真値からスライドしており、計算された結果においては、互いにスライドした量を打ち消し真値と一致していることを示すものである。

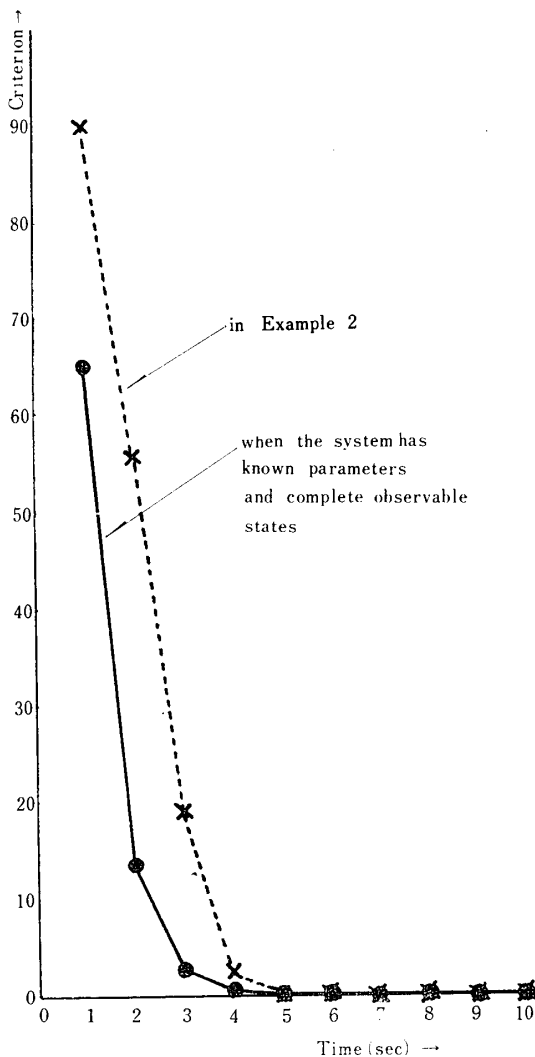


Fig. 5 Criterion in each step in example 2

7. 結 言

本稿は、未知パラメータ推定問題の一つとして、未知時変駆動行列を含む制御系のパラメータ推定、ならびに学習制御について論じた。時間多項式に展開した形でその係数と1時点前における当該パラメータを推

定し、簡単な計算によって未知パラメータの推定値を計算して行く方法は非常に推定状況が良好なることがわかる。ただし、未知時変パラメータが時間について少数の項にて近似できそうな場合は別として、かなりの項数をとらなければ近似できない場合、状態値をも含めた結合ベクトルの成分数はずいぶん大きなものとなる。これは現段階では、過去の経験等により、あるいは場合場合により処理していかなければならない。つぎに問題となるのがデジタルコンピュータの計算時間等の問題であり、推定ならびに最適操作量の計算を1サンプリング間隔の間にやっってしまうなければならない。ちなみに、本例題2によるシミュレーションでは段数100で約40分の計算時間を必要とした。(本学設置 FACOM-231使用) 計算時間短縮の観点から、初期段階ではかなりラフな制御を行ない推定が進むに従いシビアな制御を行なうやり方も一方法と思われる。ハイスピードデジタルコンピュータが次々に開発されてはいるけれども、タイムシェアリング等のコンピュータの高度運用等の面から考えても計算時間短縮化のための手法は非常に重要な問題の一つになると思われる。最後に本稿では(3)式の仮定を設けたが、この仮定を設けなくてもかなり良好に未知パラメータを推定させることが後日明らかになったので追って発表する予定である。

終りに臨み、いろんな面より種々懇切丁寧なるご指導を賜わった九州大学 辻 節三教授、また日頃ご鞭撻いただく本学 牧 元教授、いろいろとご指導、ご意見をいただく神谷健児助教授に深甚の謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Kalman, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, J. Basic Engineering, 82, 35 (1960)
- 2) Lee, R. C. K.: "Optimal Estimation, Identification, and Control", M. I. T. Press Research Monograph, (1964)
- 3) Aoki, M.: "Optimization of Stochastic Systems", Academic Press, N. Y. (1967)
- 4) 辻, 中村: 第20回電気四学会九州支部連合大会論文集, 261 (昭和42年)
- 5) Sorenson, H. W.: On the Error Behavior in Linear Minimum Variance Estimation Problem, IEEE Transaction AC-12 557 (1967)
- 6) Tou, J. T.: "Optimum Design of Digital Control Systems", Academic Press N. Y. (1963)

(昭和43年11月5日受理)