

非線形制御系の最小時間制御

川 添 容 宏*

Investigation of Minimum-time Control in Nonlinear Control Plants

Yasuhiro KAWAZOE

Abstract

A class of minimum-time control problems in the discrete nonlinear control plant is investigated using the framework of state transition method and variable gain method.

In linear plant, the control signal is a linear combination of the states, and the feedback coefficients are constant every sampling point. However, in nonlinear plant, the feedback coefficients must be variable every sampling point. As a numerical example, the author discusses about the 2nd-order plant with dead zone element.

The purpose of this investigation is to determine an practical solution to the optimum control problem in nonlinear plants.

1. 緒 言

近年、活発に研究の行なわれている最適制御の中の重要な問題の一つに最小時間制御問題がある。最小時間制御は、「ある初期状態から可能な限り短い時間で系の対象を希望の状態に移す制御」ということができる¹⁾。特に、宇宙工学における宇宙船の位置制御、位置ずれによる軌道修正は、できるだけ短い時間に行なわれることが望ましい最小時間制御のよい例の一つである。本報告では、はじめに n 次元線形系の単一制御入力による最小時間制御問題について、状態推移法を用いて直進的に論じ、つぎに、これを基礎にして、非線形要素のある制御対象の最小時間制御に拡張する。最後に、設計法をより明確化するために、非線形要素として不感帯要素を持った 2 次元系について数値例を述べる。

2. n 次元線形離散値系の最小時間制御

(1) 式の離散形式で表わされる n 次元線形制御系の最小時間制御問題を考える。

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(T)\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}(T)m(k) \quad (1)$$

ここで、

\mathbf{x} : n 次元状態ベクトル

m : スカラー操作量

ϕ : $n \times n$ 遷移行列

\mathbf{h} : $n \times 1$ 駆動行列

T : サンプリング周期

k : 任意のサンプリング時点

とする。最小時間制御の問題は、与えられた初期状態 $\mathbf{x}(0)$ から目標の状態 $\mathbf{x}(p) = 0$ へ最小の時間（最小のサンプリング回数）で移すに必要な最適制御入力を求めることである。このとき、制御対象は p サンプリングにて目標状態に最小時間にて制御されたという。いま、系の初期状態 $\mathbf{x}(0)$ が与えられ、 p サンプリング後に系が最小時間にて目標状態 $\mathbf{x}(p) = 0$ 、すなわち、すべての状態値が零となり平衡状態になつたとすれば(1)式において $k = p-1$ とおくことによつて次式が成立する。

$$\mathbf{x}(p) = \phi(T)\mathbf{x}(p-1) + \mathbf{h}(T)m(p-1) \quad (2)$$

$$= 0 \quad (3)$$

$$\therefore \mathbf{x}(p-1) = \mathbf{s}_1 m(p-1) \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{s}_1 \triangleq -\phi(-T)\mathbf{h}(T) \quad (5)$$

以下同じように、 $k = p-2, \dots, 1, 0$ をおくことによつて、つぎの関係が求められる。

$$\mathbf{x}(p-2) = \mathbf{s}_1 m(p-2) + \mathbf{s}_2 m(p-1) \quad (6)$$

.....

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{s}_1 m(1) + \mathbf{s}_2 m(2) + \dots + \mathbf{s}_{p-1} m(p-1) \quad (7)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{s}_1 m(0) + \mathbf{s}_2 m(1) + \dots + \mathbf{s}_p m(p-1) \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{s}_i , $i = 1, 2, \dots, p$ は

$$\mathbf{s}_i = -\phi(-iT)\mathbf{h}(T), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

* 工業短期大学部電気工学教室

である。(8)式を行列表示すれば

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \dots \ \mathbf{s}_p] \begin{bmatrix} m(0) \\ m(1) \\ \vdots \\ m(p-1) \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} m(0) \\ m(1) \\ \vdots \\ m(p-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで

$\mathbf{x}(0) : n \times 1$ 行列

$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_p : n \times 1$ 行列

よつて

$[\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \dots \ \mathbf{s}_p] = \mathbf{S} : n \times p$ 行列

(10)式において、 $\mathbf{x}(0)$ は初期条件として与えられている。また、行列 \mathbf{S} は (9) 式から明らかなように遷移行列、駆動行列から求められる。未知数を $m(0), m(1), \dots, m(p-1)$ とする方程式(10)が解を持つためには、行列 \mathbf{S} の逆行列が存在しなければならない。すなわち行列 \mathbf{S} は正則行列でなければならない。したがつて、少なくとも $p=n$ でなければならない。 $p=n$ とし、行列 \mathbf{S} の逆行列を次式で表わすことにすれば、

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

最適制御則は、

$$\begin{bmatrix} m(0) \\ m(1) \\ \vdots \\ m(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \quad (12)$$

すなわち

$$\begin{aligned} m(0) &= b_{11}x_1(0) + b_{12}x_2(0) + \dots + b_{1n}x_n(0) \\ m(1) &= b_{21}x_1(0) + b_{22}x_2(0) + \dots + b_{2n}x_n(0) \\ &\dots \dots \dots \\ m(n-1) &= b_{n1}x_1(0) + b_{n2}x_2(0) + \dots + b_{nn}x_n(0) \end{aligned} \quad (13)$$

として求められる。(12), (13)式を用いると最適制御則は初期条件と遷移行列、駆動行列によつて完全に算出できる。ここで、各状態値 x_1, x_2, \dots, x_n のフィードバック係数は各サンプリング時点によつて変化することに注意を要する。すなわち、各サンプリング時点毎に状態値のフィードバック係数を変えていかなければならないことになる。

つきに、(6)~(8)式より、最適操作量に関してつぎの式が得られる。

$$\begin{aligned} m(0) &= \mathbf{b}_1 \mathbf{x}(0) \\ m(1) &= \mathbf{b}_1 \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_2 \mathbf{x}(0) \\ m(2) &= \mathbf{b}_1 \mathbf{x}(2) = \mathbf{b}_2 \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_3 \mathbf{x}(0) \\ &\dots \dots \dots \\ m(n-1) &= \mathbf{b}_1 \mathbf{x}(n-1) = \dots = \mathbf{b}_{n-1} \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式の関係から任意のサンプリング時点 k における最適操作量はその時の状態値によつて

$$m(k) = \mathbf{b}_1 \mathbf{x}(k) \quad (15)$$

として表わされることがわかる。すなわち、あるサンプリング時点における最適操作量は、その時点における各状態値の何倍かをフィードバックした代数和として得られる。言い換えれば、線形対象の最小時間制御則は各状態値の線形結合で表わされる。このときのフィードバック係数は、状態値 x_1, x_2, \dots, x_n に対して、 $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}$ であり、このフィードバック係数はサンプリング時点によつて変わらない。よつ

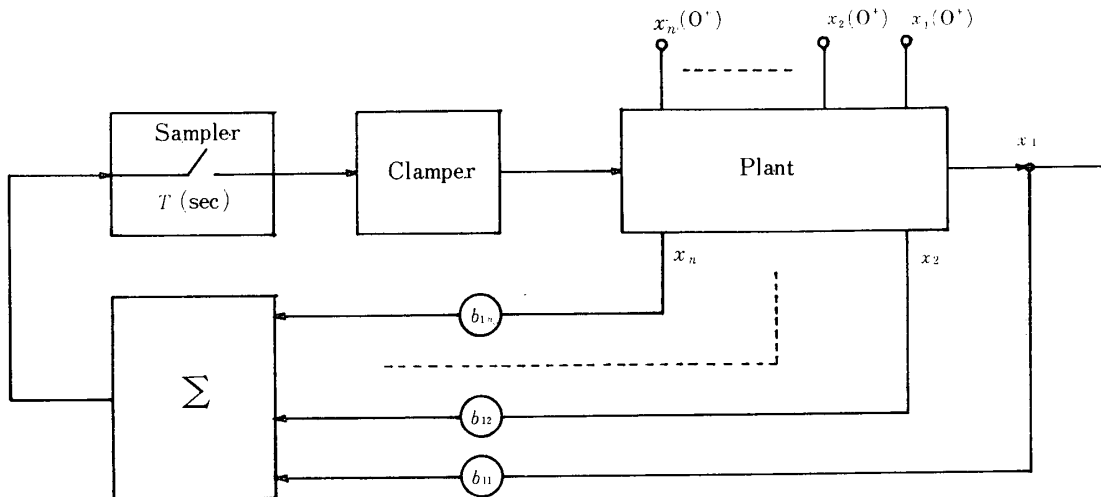


Fig. 1 Block diagram for minimum-time control of the n th order linear plant

て一度各状態値のフィードバック係数を求めて構成しておけば各サンプリング時点でいちいちフィードバック係数を変えるという煩わしさがなくてよい。これは最適制御系の構成上からも非常に重要なことである。

最適制御系を(15)式の最適操作量を用いて構成する場合 Fig. 1 となる。

3. 非線形系への拡張

つぎに、考察する制御対象をより一般的にするために非線形対象（ここでも前と同様、離散値系とする）を取り上げる。非線形性の取り扱いについては、“可変

ゲイン” の概念を用いる²⁾。そのためにつぎの仮定が成立するものとする。

(i) 非線形対象は、その中、非線形性を示す部分と線形性を示す部分とに分割して考えることができる。すなわち、非線形要素の伝達特性を N 、線形部分の伝達関数を L とすると非線形制御対象は Fig. 2 で表わされる。

(ii) 非線形特性はその入出力平面の原点を通る曲線で表わされ、飽和については考慮しない。

なお、飽和離散値系の最小時間制御については文献³⁾参照。

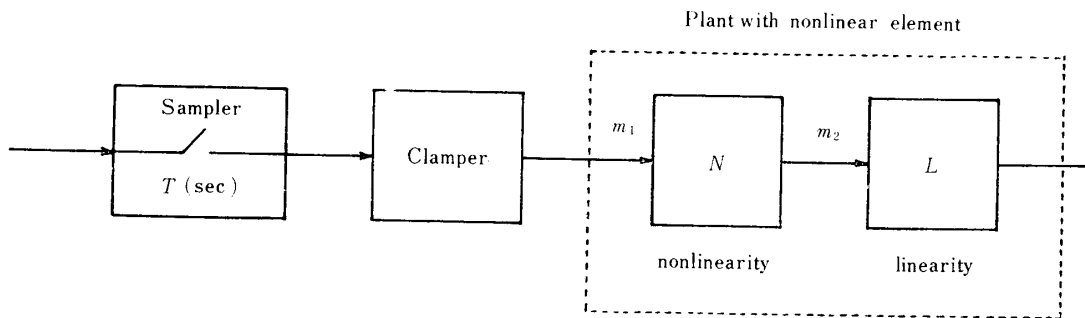


Fig. 2 Nonlinear control plant discussed in this report

いま、サンプリング時点 k における非線形要素の入出力値をそれぞれ $m_1(k)$, $m_2(k)$ で表わすと、そのときの入出力関係は

$$m_2(k) = N_k m_1(k) \quad (16)$$

で表わされる。実際に、 N_k は入力 $m_1(k)$ の値が決まれば非線形特性曲線、あるいは非線形関数からその出力 $m_2(k)$ が決まるから、それらの比として求まるものであるし、また、逆に、出力値が先に決まっている場合入力値が同じく求まるから N_k を決定できる。よつて N_k はある k というサンプリング時点においてのみ意味を持つ非線形要素の入出力を特徴づける数値である。ここで制御目的は最小時間制御のための最適操作量 m_1 の決定にある。 m_1 が最適に選ばれば m_2 も以下の線形対象部分に対して最適でなければならない。このように考えると、 m_2 は線形部分の対象 L の最適操作量とすることができる。こうすれば、 m_2 はすでに前章の(12)~(15)式により求められていることになる。すなわち、 Fig. 2 で表わされる非線形制御対象の最適制御は、まず、(12)~(15)式を用いて m_2 を求め、 m_2 がわかればそのときの N_k が(16)式から求められる。あとはそれを用いてフィードバック係数を決定することである。

いま、線形部分の状態値が x_1, x_2, \dots, x_n , す

なわち \mathbf{x} なる n 次元ベクトルで表わされ、状態推移方程式が(1)式で表わされるとする。ただし、ここで、 $m = m_2$ とする。(15)式を適用すれば、最適操作量 m_2 は、任意のサンプリング時点 k において、

$$m_2(k) = \mathbf{b}_1 \mathbf{x}(k)$$

$$= [b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1n}] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる。つぎに、非線形要素の伝達特性が(16)式で表わされるから、この式と(17)式とを結合すると(18)式が得られる。

$$N_k m_1(k) = [b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1n}] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $m_2 \neq 0$ とすれば $N_k \neq 0$ であるから、

$$m_1(k) = \frac{1}{N_k} [b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1n}] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる。この式は非線形性のある制御対象の最適制御入力 m_1 と、それと同一サンプリング時点における対

象の状態量との間の関係を示す。すなわち、非線形制御対象への最適操作量は、純線形系でのフィードバック量を $1/N_k$ 倍すれば得られる。

つぎに、 $m_2(k)=0$ のときは、倍数 $1/N_k$ の値が何であつてもよいはずである。ここで、線形系との対比上注意しなければならないのは倍数 $1/N_k$ は各サン

プリング時点による変数であるということである。すなわち、非線形系においては、フィードバック係数は各サンプリング時点毎に可変でなければならない。

本制御系をブロックダイアグラムで示せば Fig. 3 で表わされる。

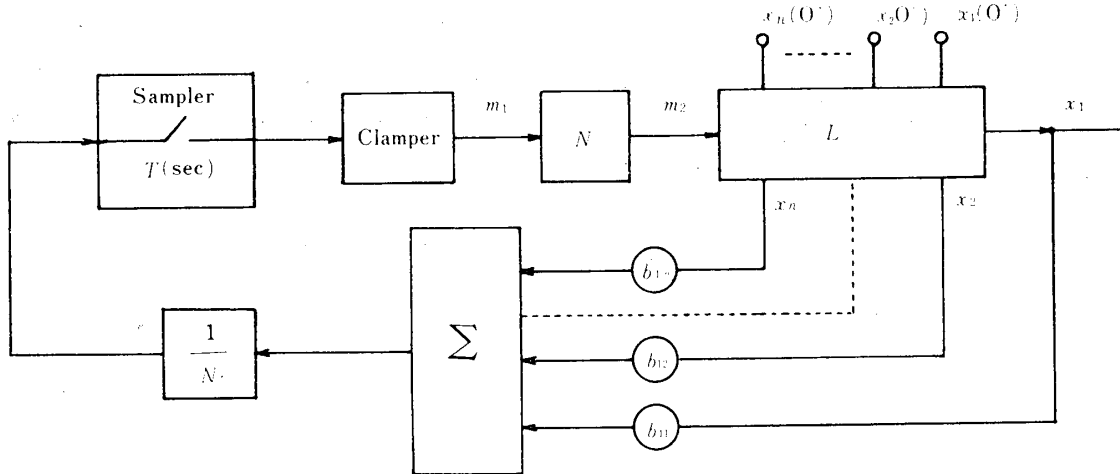


Fig. 3 Block diagram for minimum-time control of a nonlinear plant

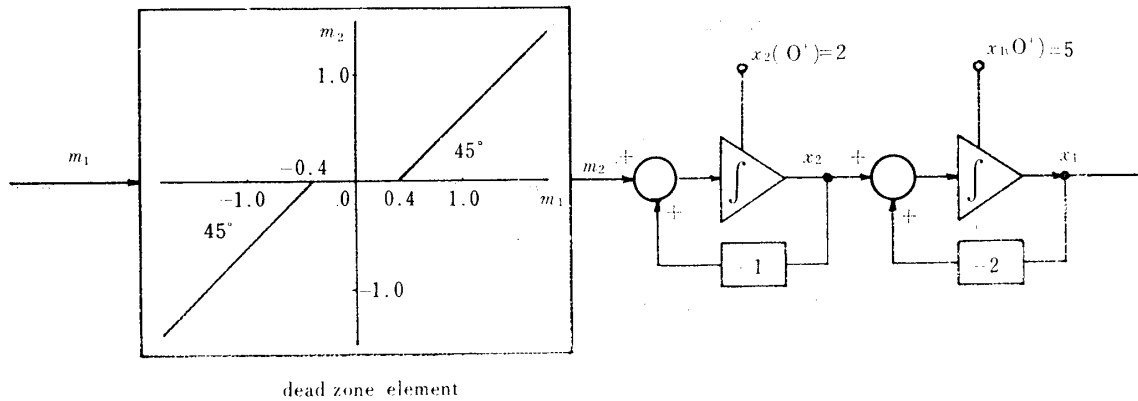


Fig. 4 The 2nd order plant with dead zone in the example

4. 例題 不感帯要素のある2次元制御対象の最小時間制御

Fig 4 のブロックダイアグラムで表わされる対象について具体的に述べる。

ここで、

制御対象の線形部分の伝達関数： $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

不感帯特性：不感帯幅 0.4×2 ，勾配 1 の対称型

状態ベクトル： $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2]^T$

初期状態： $x_1(0)=5.000, x_2(0)=2.000$

サンプリング周期： $T=1(sec)$

Fig.4 より制御対象の線形部分の状態推移方程式は次式で表わすことができる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(T)\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}(T)m_2(k) \quad (20)$$

ここで、

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} a^2 & a-a^2 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{h}(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+a^2-2a) \\ 1-a \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$a \triangleq e^{-T} \quad (23)$$

よつて、 \mathbf{S}_i は

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= -\phi(-iT)\mathbf{h}(T) \\ &= -a^{-i}(1-a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-a^{-i}-a^{-i+1}+2) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{S} = -a^{-1}(1-a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-a^{-1}+1) & \frac{1}{2}a^{-1}(-a^{-2}-a^{-1}+2) \\ 1 & a^{-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

\mathbf{S} の逆行列 \mathbf{S}^{-1} は

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{(a-1)(a^{-1}-1)(a^{-1}+1)} & \frac{a^{-1}+2}{a^{-1}(a-1)(a^{-1}+1)} \\ \frac{-2a^2}{(a-1)(a^{-1}-1)(a^{-1}+1)} & \frac{-a^2}{(a-1)(a^{-1}+1)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる。ここで、サンプリング周期 $T=1$ (sec) だから、

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.182 & -0.739 \\ 0.067 & 0.057 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\therefore m_2(0) = -0.182x_1(0) + 0.739x_2(0) \quad (28)$$

$$m_2(1) = -0.182x_1(1) + 0.739x_2(1) \quad (29)$$

初期条件 $x_1(0)=5.000$, $x_2(0)=2.000$ より、

$$m_2(0) = -2.388$$

$$m_2(1) = 0.450$$

不感帯特性曲線より、 $m_2(0) = -2.388$ だから

$$m_1(0) = -2.788, \text{ したがって、}$$

$$\frac{1}{N_0} = 1.168$$

同様にして

$$\frac{1}{N_1} = 1.889$$

以上により、Fig.4 の非線形制御対象の最小時間制御は Fig.5 のブロックダイアグラムで構成できる。また、このときの各状態値の変化は Fig.6 となる。

つぎに初期条件が

$$x_1(0) = -4.060$$

$$x_2(0) = 1.000$$

の場合は、

$$m_2(0) = 0$$

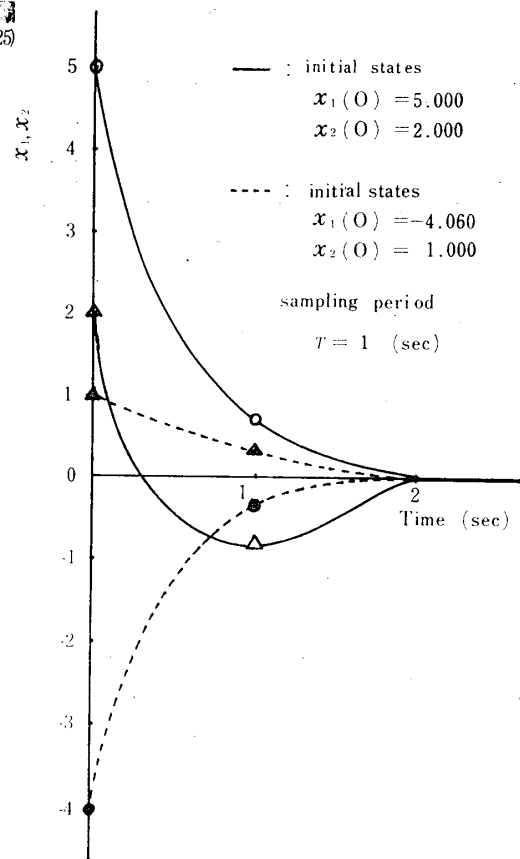
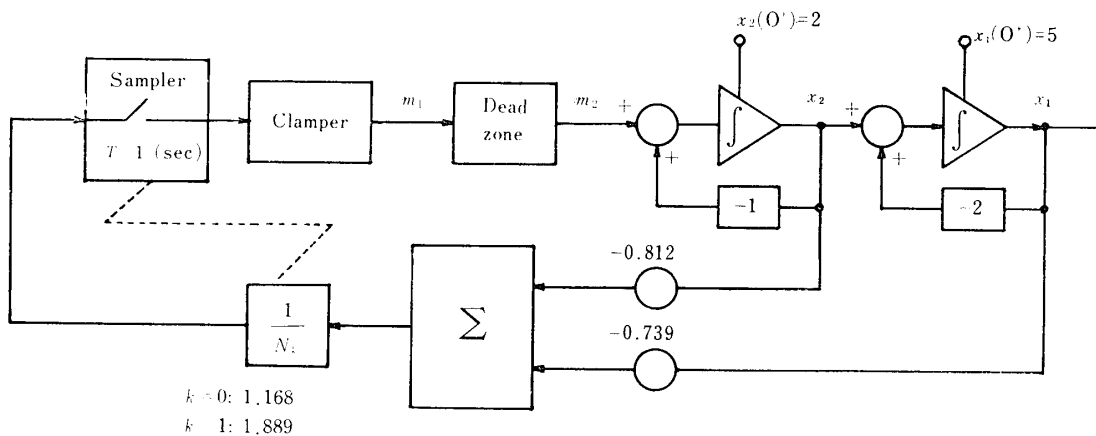


Fig. 6 Response in the example

$$m_2(1) = -0.215$$

となり、最初のサンプリング時点では、可変ゲインエレメントの倍数 $1/N_0$ は任意の値をとつてよい。

これは、 $\sum_{j=1}^2 b_{1j} x_j(0)$ が零から明らかである。第2サンプリング時点にあつては $1/N_1 = 2.860$ であるが、前の理由により、第1サンプリング時点から $1/N_0$ として2.860を与えておいても構わない。



$k=0: 1.168$
 $k=1: 1.889$

Fig. 5 Minimum-time control system in the example

5. 結 言

本報告は離散値形式による状態推移方程式を有する多次元線形系の最小時間制御則を導出し、つぎにそれを利用して非線形制御対象に関する最小時間制御のための設計法を示した。まず、純線形制御対象の最小時間制御則は、各状態値の線形結合として表わされることがわかる。すなわち、各状態量の一定割合をサンプリング時点に無関係にフィードバックして最適操作量が得られる。したがって、この場合、フィードバック係数の決定に重点が置かれる。このフィードバック係数は系方程式の遷移行列と駆動行列を基にして得られる。系の次元数の低い間はフィードバック係数の計算はあまり複雑ではないが、高次になるにつれて、逆行行列の計算により複雑となってくる。

非線形系に対する拡張は非線形要素を各サンプリング時点毎の可変ゲインとして取り扱うことによつて可能となる。本報告で考察した非線形性としては、飽和性、単一入力多出力性のものなどは考慮に入れず、3. 章 (i), (ii) の仮定を設けた。これは説明の簡単

化にもよるが、非線形性全般について統一的な手法を述べることは不可能に近く、個々の非線形性の取り扱いについてはそれに合った方法を採用すべきだと思われるからである。また、飽和性の場合、一般的には、制御対象は入力制限を受けることになるから n 次元対象の場合 n サンプリングにて最小時間制御が達成されるとは限らない³⁾。この場合、特別な設計手法が必要となる。

最後に、具体的数値例として、不感帯要素を持つた2次元制御対象の最小時間制御系の設計法を示した。ついに終りに臨み、日頃、ご鞭撻いただく本学牧元教授、神谷健児助教授に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Julius T. Tou : "Optimum Design of Digital Control Systems", Academic Press (1963) P. 21
- 2) 川添容宏 : 山口大学工学部研究報告, 18 (2), 68 (1967)
- 3) Julius T. Tou : "Synthesis of Discrete Systems Subject to Control Signal Saturation", J. Franklin Inst., 277, 401 (1964)

(昭和43年6月11日受理)