

外周切欠材の応力集中と回転曲げ疲労強度について

第5報 孔付円筒軸 その2

大野元明*

Stress Concentration and Fatigue Strength of Notched Specimens under Repeated Bending Moment (5 th Report)

Circular shaft with a diametral hole No. 2

Motoaki ŌNO

Abstract

The relation between the form factor α and the notch factor β in various notched parts has been researched and discussed by many investigators.

In our country, T. Ishibashi discussed these problems especially in the circular shaft with a diametrical circular hole under bending action and proposed two kinds of empirical formulas of which the first based upon the yielding stress and the second upon the fatigue limit of the plain specimen of the material itself. His formulas are made up of the relative maximum stress gradient at the root of the notch and a small distance ε_0 and ε'_0 from the notch root to the direction of the maximum stress gradient on the minimum cross section.

However in the relation between α and β there should be much more factors : the material strength, part size, stress gradient, relative grain size etc. Then it is desired to devise more profound formula. By an assumption of the criterion limiting the mean stress on a small range measured from the root of the notch to the direction above mentioned necessary for a crack arising and propagation, I devised an empirical formula of the form

$$\beta = \alpha [1 - k \cdot f(d, d/D, \varphi, \varepsilon_0)]$$

where $k = \text{const}$, $d = \text{dia. of the hole}$, $D = \text{dia. of the shaft}$, $\varphi = \text{relative stress gradient}$, $\varepsilon_0 = \text{small distance}$. This formula is reduced to a simplified formula in the calculation of approximate values of β under repeating bending stress or tension compression stress, and has a good fit between calculated values and experimental results.

1. 緒言

円孔付円筒または丸軸が回転曲げ繰返応力をうけるときの形状係数 α ならびに切欠係数 β については以前からかなり詳しく研究されており、ここに論ずる必要もないように思われるけれども他の形状の切欠との比較の必要からこの種の実験を大中小の試験片について行ってきたので本報ではとくにこの場合の切欠係数 β について若干の見解を述べそれに従って疲労限の条件を仮定して実験式を立案してみた。

α に基いて β を算定する計算式は切欠材の疲労限が (1)材料の強さ, (2)寸法効果, (3)寸法比, (4)応力勾配, (5)材料の結晶粒度に関係した量などの関数と考えられるので、これらの因子をすべて含んだものが望まれることになる。しかしこれは必ずしも簡単ではなく満足な計算式はまだえられていないように思う。石橋氏は円孔の小さい尖鋭切欠と円孔の大きい非尖鋭切欠とを区別して前者は疲労限度の繰返応力においても繰返回数初期に切欠底の部分に局部的降伏をおこすのでその範囲 ε_0 を仮定し非尖鋭切欠では平滑材の疲労限

* 機械工学教室

σ_{w0} 以上の応力分布をもつ範囲 ϵ_0 を仮定してこれらのそれぞれと切欠底部の応力勾配を因子として β の実験式を求められている。これは前記の(4), (5)の因子によつて構成されているとみてよい。またこれとは別に前報²⁾(2)式のように材料の強さ σ_B , 円孔直径 d , 軸外径 D および d/D の関数で表した実験式があるがこれは α には無関係に作られており前記(1), (2), (3)の因子によつて構成されている。したがつて実験式としてはこれら両者を適当に組合したようなものが期待されることになる。

筆者は次項に説明する理論に基づいて疲労限度の条件を仮定し上記のような諸因子を含む実験式を立案してみた。

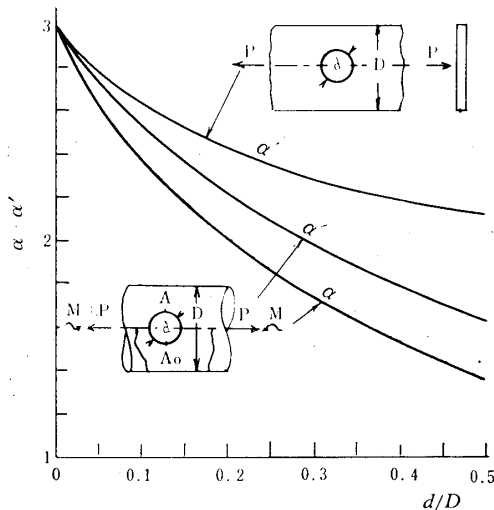


Fig. 1 Form factors α and α'

2. α と β について

Fig. 1は円孔付丸軸の引張および曲げをうける場合の形状係数と中央に円孔をもつ帯板の形状係数を d/D の値について表わしたものである。円孔付丸軸の引張の α' は図中に示したように円孔軸に直角な縦断面上の A_0 における応力集中率³⁾で曲げの α は軸表面上のA点の値である。

一般に切欠材の形状係数 α と切欠係数 β の関係は簡単に表わし難く従来諸種の観点から実験式が提案されている。例えば切欠感度係数 η を用いて $\eta = (\beta - 1)/(\alpha - 1)$ で表わしたもの(Thum), あるいは局部的表面層の変形が切欠底の曲率半径を増大しその結果 α が理論値より低下するとして立案した

$\beta = 1 - (\alpha - 1)/(1 + K_1/\sqrt{\rho})$, $K_1 = \text{const}$ で表わしたもの(peterson)など種々ある。

孔付円筒や環状溝付丸軸が尖鋭切欠の場合には引張

圧縮や回転曲げなどの繰返応力をうけると繰返回数⁴⁾の初期においてその最大応力が降伏点を超えるため切欠底の小部分に局部的降伏をおこしその応力勾配は弾性的応力状態にあるとしての勾配よりも著しく緩和されかつその部分は加工硬化によつて強度はむしろ幾分増大するため疲労破壊に対する抵抗は増加して試験片の疲労限はその材料の疲労限に比較してそれ程低下しない, すなわち β は理論上の α の大なるにもかかわらず1に近い値を呈する。したがつてこのような切欠材では材料の塑性範囲における強靱性が疲労限に直接関係することは明らかで材料の引張強さや結晶粒の大きさなどが疲労限に直接関係し同じ α に対する β の値が異なることになる。円孔付丸軸の引張圧縮や回転曲げの場合には d の寸法が小さくかつ d/D の小さい範囲がこれに相当しており, d がこれより大きくなり d/D が増大するにつれて応力集中率は下ると共に応力勾配も減少するけれども勾配の広がる範囲が切欠底から最大応力勾配の方向に拡大し応力の高い部分が広くなり被害をおこす程度の亀裂が生じ易くまたそれが進展しやすくなり見掛上の疲労限 σ_{wl} はそれに従つて低下するため β が増大する。しかしさらに d を増し d/D が大きくなると応力集中率 α はそれにつれて下り応力勾配も小さくなり平滑材の状態に近づくからその疲労限はまた上昇して β は低下することになる。したがつて β は d/D のある値において極大値をとることになり, この点では $\alpha \sigma_{wl} = \sigma_s$ (降伏点)に近い関係にあるものと考えられる。

Fig. 2は円孔付丸軸または円筒が曲げをうける場合の応力分布を示す説明図である。図の(a)は d/D の小さい範囲についての円孔中心を含む最小断面部の外周面上の応力分布を表わすものとして見掛上の σ_{wl} に対して図のように応力勾配が大きく引張降伏点 σ_s 以上の応力部分は局部的に降伏し, 実際の最大応力値および応力勾配は図のように低下しかつ降伏部分は加工硬化を生じ疲労抵抗は未降伏部分よりもむしろ幾分増大していると考えられる。そこで孔のない場合の疲労限 σ_{w0} のときの応力分布を図のように右に移行してこの図の上に重ねてみると破線のようになり, 切欠低から最大応力勾配の方向にとつたAB範囲(疲労破壊を生ずるに必要な小範囲すなわち結晶粒の大きさに関係した相対的ディメンション ϵ_0 を仮定する)のそれぞれの応力集計が相等しい状態すなわち図示の $d_1 = d'_1$ なれば両者の応力集計が同じであるから見掛上の σ_{wl} が切欠材の疲労限であるとみなす。この応力状態から切欠材に作用する曲げモーメントを増せば応力分布線

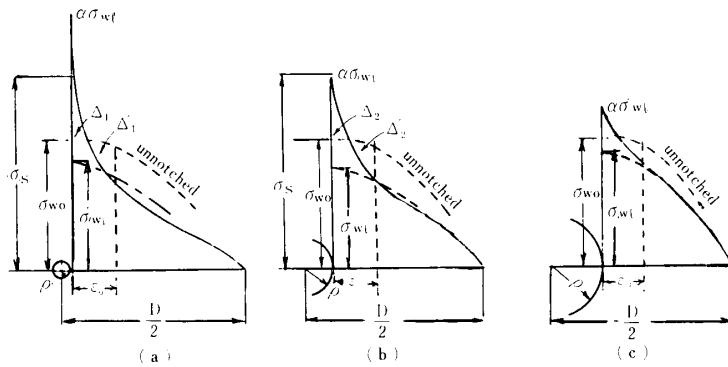


Fig. 2 Bending stress distribution at the endurance limit on the surface of a thin cylinder with a diametral hole penetrated, when the hole axis exists in the plane of maximum bending

はほぼこの形で上方に移行し $d_1 > d'_1$ となつて円孔壁部から亀裂が発生進行して遂に破断をおこすものと推論する。(b)図は d/D がさらに増大して応力の最大値が丁度引張の降伏点 σ_s になつてゐる時の応力分布と見掛の σ_{w1} を示したもので $d_2 = d'_2$ の関係にあるときがその疲労限に相当する、この状態では降伏は起らないが曲げ応力を増せば切欠底に降伏を生じ始め応力分布線は前記のように上方に移行して $d_2 > d'_2$ となつて疲労破壊をおこすことになる。(c)図はさらに d/D が増大したときの関係を表わしたもので応力勾配は減少し最大応力も低く平滑材のものに近づいている状態を示したものである。なお(c)に示した状態では $\sigma_{w1} = \sigma_s/\alpha$ の関係にあり孔縁に降伏がおこる限界にあり尖鋭切欠と非尖鋭切欠の分岐点と見なすことができる。このときの σ_{w1} が d/D の範囲に対して最小となる点すなわち β が最大値をとる点にほぼ相当していると思われる。この点より d/D の小さい範囲の疲労限は切欠底に局部的降伏を生じている弾塑性材の繰返応力の限度で材料の塑性範囲の強さが重要な因子となるものと考えられる。

3. 実験式

上記の推論によつて実験式を作るに当つては塑性範囲の性質と弾性範囲の性質をはつきり区別して疲労限度の条件にとり入れることは困難でかつ複雑になるので簡単のために塑性範囲に対しては相当値を考えることにして、全範囲について弾性的な取扱いをする。

Fig. 3は円孔付丸軸あるいは円孔付帯板が引張をうけるときの応力分布を示すものとする。 σ_{w1} が応力集中のないと考えた見掛の疲労限度とする。これは最小断面部に一様に分布すると仮定した応力である。疲労

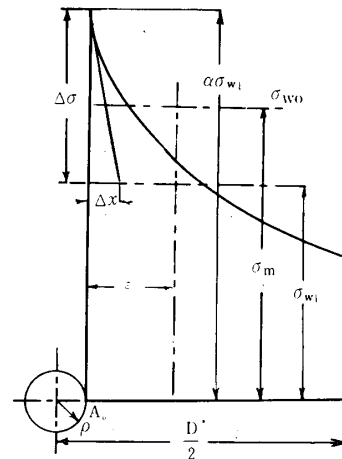


Fig. 3 Stress distribution of the longitudinal section perpendicular to the axis of the hole in the circular shaft with a diametral hole under tension

破壊を起す条件は切欠底より ϵ_0 の距離までの平均応力とその材料の平滑材の疲労限度 σ_{w0} に等しくなつたときと仮定する。今、切欠底より x の距離にある応力を x に対して指数曲線的に表わされるものとして次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \alpha \sigma_{wt} \left[1 - k d e^{-N \left(e^{\frac{ax}{\rho}} - 1 \right)} \right] \\ N &= n \left(1 + n \frac{d}{D} \right) \frac{d}{D} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- 但し k : 実験的定数
- a : 応力勾配に関する定数
- n : 材料による定数

$x=0$ から ϵ_0 までの平均応力を σ_{w0} に等しいとおき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\epsilon_0} \sigma dx &= \frac{\alpha \sigma_{wt}}{\epsilon_0} \left\{ \epsilon_0 - k d e^{-N} \left[\frac{\rho}{a} \left(\frac{a \epsilon_0}{\rho} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a}{\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{a \epsilon_0}{\rho} \right)^2 + \dots - \epsilon_0 \right] \right\} \\ &= \alpha \sigma_{wt} \left[1 - k d e^{-N} \left\{ \frac{a \epsilon_0}{2 \rho} + \frac{1}{3} \left(\frac{a \epsilon_0}{2 \rho} \right)^2 + \dots \right\} \right] = \sigma_{w0} \\ \therefore \beta = \frac{\sigma_{w0}}{\sigma_{wt}} &= \alpha \left[1 - k d e^{-N} \left\{ \frac{a \epsilon_0}{2 \rho} + \frac{1}{3} \left(\frac{a \epsilon_0}{2 \rho} \right)^2 + \dots \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(2)$$

(1)より無次元応力勾配を求めると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{x=0} &= -\alpha \sigma_{wt} k d e^{-N} \frac{a}{\rho} \\ \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{x=0} \cdot \rho &= k d e^{-N} a \end{aligned}$$

(2)で ϵ_0/ρ は小さい値であるから二乗以上を省くと

$$\beta = \alpha \left[1 - k d e^{-N} \frac{\epsilon_0}{2 \rho} \right] = \alpha \left[1 - k a e^{-N} \epsilon_0 \right] \quad \dots\dots(3)$$

となり第2項は応力勾配と ϵ_0/ρ の積に比例した量である。(1)の N を共に考えて応力勾配を φ で示し

$$\beta = \alpha [1 - k' f(d, d/D, \varphi, \epsilon_0/\rho)] \quad (3)'$$

の形である。(3)の ϵ_0 を一定とすれば

$$\beta = \alpha [1 - k'' e^{-N}] \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。ここで(2)を石橋氏の計算式

$$\beta = \alpha \left[1 - a_1 \left(\frac{\epsilon_0}{\rho} \right) + a_2 \left(\frac{\epsilon_0}{\rho} \right)^2 \right] \quad (a)$$

$$a_1 = \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \right)_{z=0}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_{max}} \left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial z^2} \right)_{z=0}$$

$$z = \frac{x}{\rho}$$

見較べてみると(a)は応力勾配と ϵ_0 のみの関数であるのに対して(2)は(3)'であることが最大の相違点であるが d/D が一定の場合を考えるとその形は相似している。石橋氏は低炭素鋼の円孔付円筒の回転曲げでは $a_1 = 2, a_2 = 0$ として計算されているので結局は(3)と対応することになる。なおこの両者についての詳細な比較はここでは省略しておく。

(4)は ϵ_0 を一定とした簡単な実験式で K' と N を実験的に定めればよいが N はすでに(1)に掲げたように d/D の関数で材料定数 n の値を定めれば決定されるものであり、また $d/D = 0$ に対しては $N = 0$ となるので $\beta = 1$ に対する α の値から K' が容易に定められる。そこで Fig. 1 の d/D について表わした円孔付丸軸の曲げの α の値から β を計算する式は

$$\beta = \alpha \left[1 - 0.667 e^{-n \left(1 + \frac{d}{D} \right) \frac{d}{D}} \right] \quad (5)$$

となり、 n の値を1.5~10の数値に対して [] 内の第2項を図示すると Fig. 4 となり β は後に掲げる Fig. 10となる。(5)はいうまでもなく引張圧縮の場合にも適用されこれも後の Fig. 11 に示す。

3. 実験結果との比較

上記の実験式が実験結果に適合するか否かについて調べてみよう。

Table 1 Mechanical properties of the material used

DiV	Testpiece dia. mm	Upper yield. pt. kg/mm ²	Lower yield. pt. kg/mm ²	Tensile strength kg/mm ²	Elongation %	Area contraction %
K	10.00	33.5	31.7	46.6	28.9	—
L	12.00	30.8	29.6	44.1	30.3	64
R	10.00	38.1	34.8	48.8	28.4	65.6

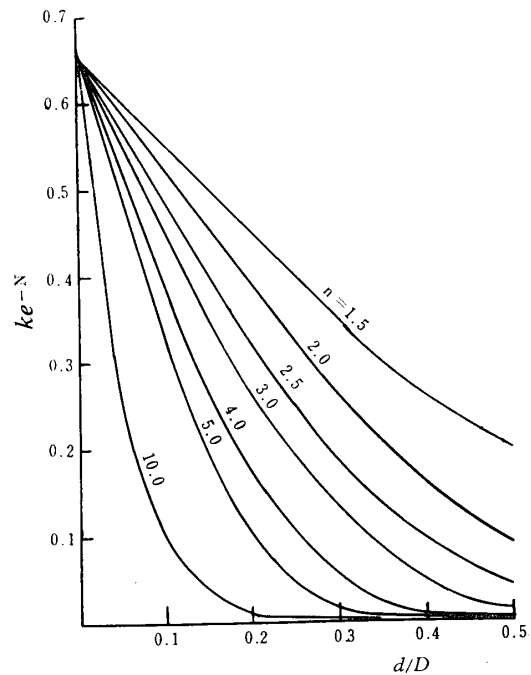


Fig. 4 The value of the 2nd term of the eq.(5)

Table 1 は実験に使用した S 25 C の機械的性質を示したもので材料区分 K, R, M の三系列についてそれぞれ引張試験を行つた結果であり同材として一括的に考えてもよい。Fig. 5 の試験片に加工し中央位置に円孔を直径方向に貫通した、円孔直径は Table 2, Table 3 に記入してある。試験機は小野式回転曲げ試験機で回転数は1600回/分である。各系列ともに107までの繰返数について疲労限度を求めることにした。試験片の曲げ応力は円孔中心線が最大曲げモーメントをうける上下方向の位置にあるときの断面係数で曲げモーメントを除して求めた。

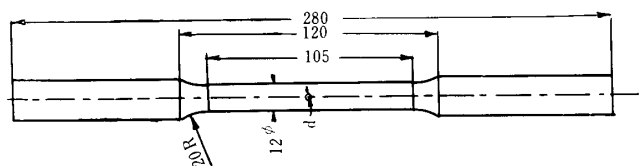


Fig. 5 Size of the test piece.

Table 2 Results of fatigue tests. K and L material

DiV		No.	d mm	2ρ mm	Z mm ³	W kg	σ kg/mm ²	No $\times 10^5$	× or ○	
d/D	Unnotched	1	12.02	0	169	30	17.75	101.3590	○	
		2	11.98	0	〃	25	14.80	59.4740	○	
		5	12.03	0	〃	35	20.7	17.6230	×	
		6	12.02	0	〃	33	19.5	21.6350	×	
		7	12.09	0	〃	32	18.92	68.0290	×	
		8	12.01	0	〃	31	18.35	107.1010	○	
K	3 m/m Hole	10	11.99	3.05	116.2	24	16.58	2.8230	×	
		11	12.00	3.05	〃	28	19.35	1.2280	×	
		12	12.01	3.15	〃	18	12.44	100.0320	○	
		13	12.02	3.03	〃	15	10.37	58.5300	○	
		14	12.00	3.02	〃	20	13.80	1.0260	—	
		15	12.01	3.00	〃	20	13.80	11.9270	×	
	1 m/m Hole	20	12.00	1.06	144.8	19	16.35	63.8900	○	
		21	12.00	1.03	〃	25	21.43	12.6010	×	
		22	11.99	1.05	〃	23	19.80	22.2910	×	
		23	12.01	1.00	〃	22	18.95	57.1940	×	
		25	11.98	1.05	〃	21	18.05	74.1910	×	
		26	12.04	1.01	〃	20	17.20	113.3350	○	
	L	Unnotched	2	11.88	0	169.0	36	21.30	21.1500	×
			3	12.03	0	〃	35	20.70	27.5700	×
			4	11.97	0	〃	33	19.50	100.1300	○
5			11.95	0	〃	34	20.1	25.9600	×	
6			11.90	0	〃	31.5	18.62	100.9400	○	
14			11.93	0	〃	45	26.60	0.0760	×	
15			11.91	0	〃	40	23.64	0.3870	×	
3 m/m Hole			8	11.90	3.10	101.8	15	14.75	33.8200	×
		10	12.01	〃	〃	14	13.75	101.1300	○	
		11	11.91	〃	〃	13	12.78	93.8700	○	
		12	11.81	〃	〃	16	15.72	24.2600	×	
		13	12.00	〃	〃	18	17.70	13.7800	×	
2 m/m Hole		16	11.90	2.16	120.5	22	18.26	7.7800	×	
		17	11.92	2.20	〃	18	14.92	43.6700	×	
		18	11.91	2.21	〃	16	13.26	95.4900	○	
		19	11.92	2.24	〃	17	14.10	64.3600	×	
1 m/m Hole		22	11.91	1.59	131.0	20	15.26	91.8700	○	
		23	11.95	1.73	〃	19	14.50	93.1700	○	
		24	11.95	1.67	〃	22	16.78	32.9700	×	
		25	11.93	1.57	〃	21	16.02	32.9100	×	

Table 2はK, L系列の実験結果(R系列は省略)でそれぞれについての実験値が幾分不足の憾があるけれどもこれによつてFig. 6~Fig. 8の耐久線を画き疲労限度を大略定めた。直径dを横座標にとつて疲労限度を図示するとFig. 9となる、これより β を求めるとFig. 10中に記入したようになる。この図はFig. 1に示した円孔付丸軸の曲げに対する α を用い(5)式でその値を1.5~10について計算して β 曲線を画いたものであつて上記の実験結果は $n=2.7$ 位の曲線に沿うていることがわかる。またこの β は $d/D=0.2\sim 0.3$ の間に極大値がある。これに他者の実験結果を記入し

てみると図示の通り何れも計算曲線に沿うていることが知られる。よつてnの値を実験的に定めうる。

前項の終りに記したように(5)式は引張圧縮の繰返応力による β の算出にも適用することができる、この場合形状係数はFig. 1の α' を用いる。 $n=1.5\sim 5.0$ について計算した結果をFig. 11に示した。文献⁴⁾より実験値を引用して比較してみると図のように何れも計算曲線に沿うていることがわかる。

Fig. 12~Fig. 14は破断面を示す。

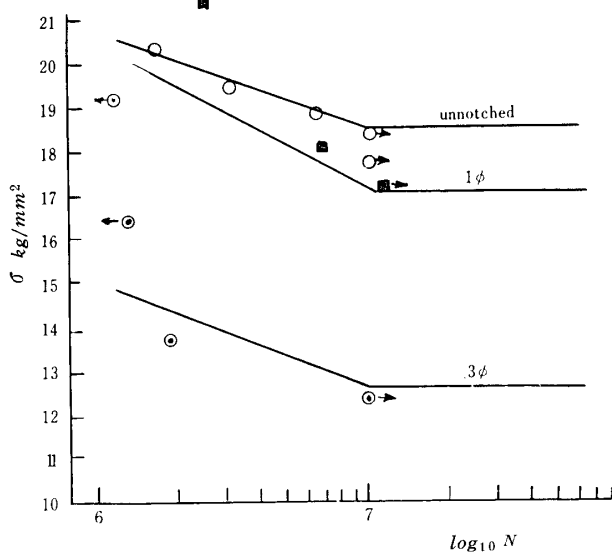


Fig. 6 S-N curve of K series

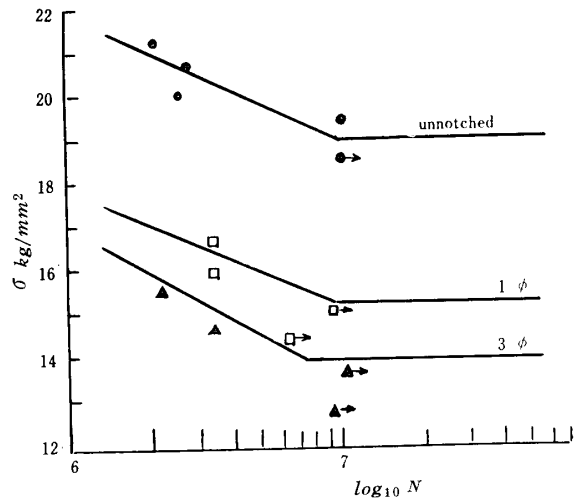


Fig. 7 S-N curve of L series

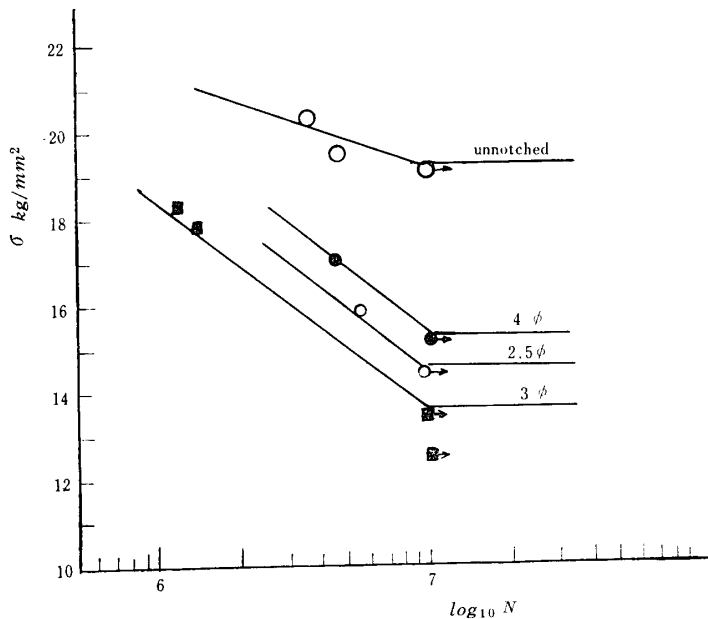


Fig. 8 S-N curve of R series

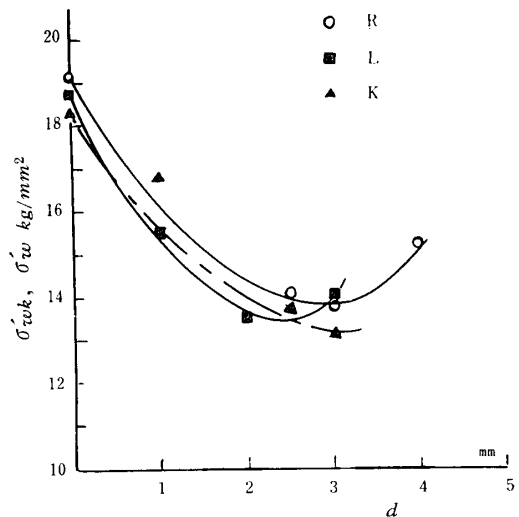


Fig. 9 Fatigue limits of K, L, R series against the diameter of the hole

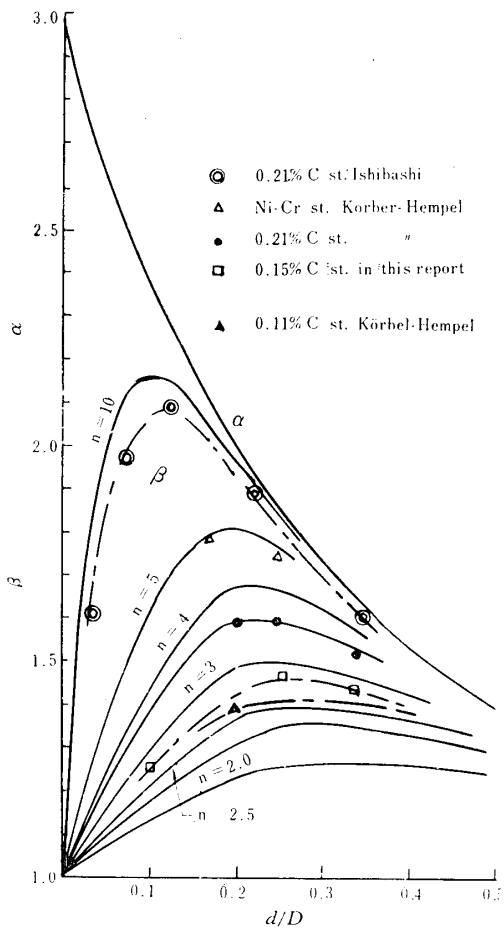


Fig. 10 Calculated β and experimental results of circular shafts with a diametral hole under rotary bending moment

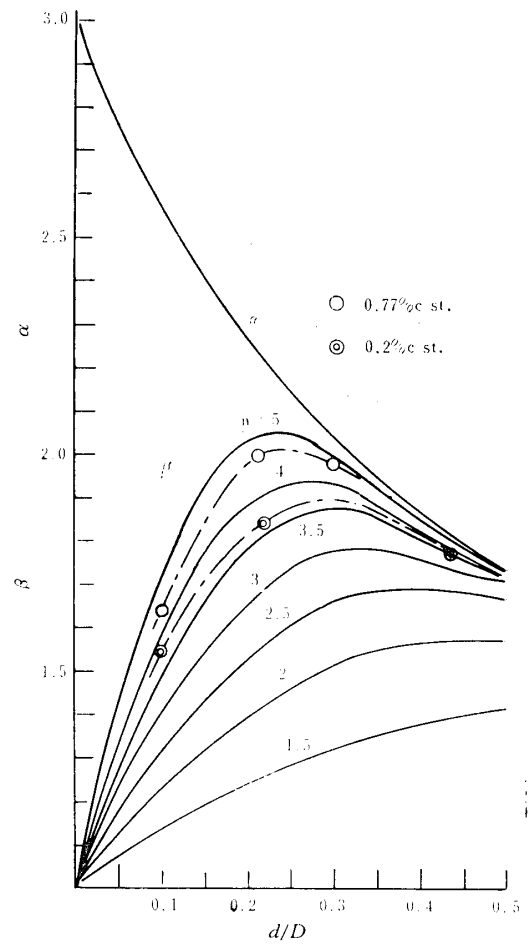
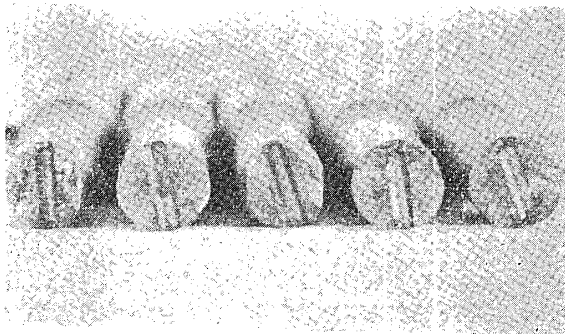
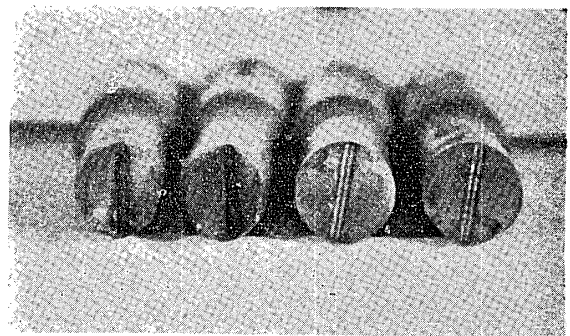


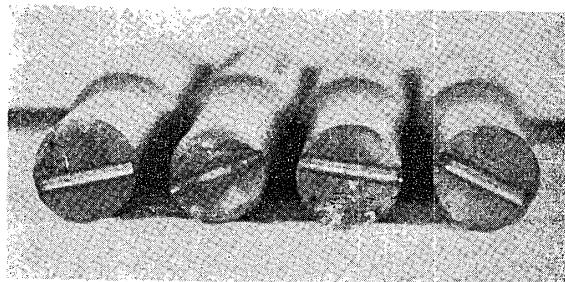
Fig. 11 Calculated β and experimental results of circular shafts with a diametral hole under repeated tension compression stress



3ϕ



1.5ϕ



2ϕ

Fig. 12 L-series

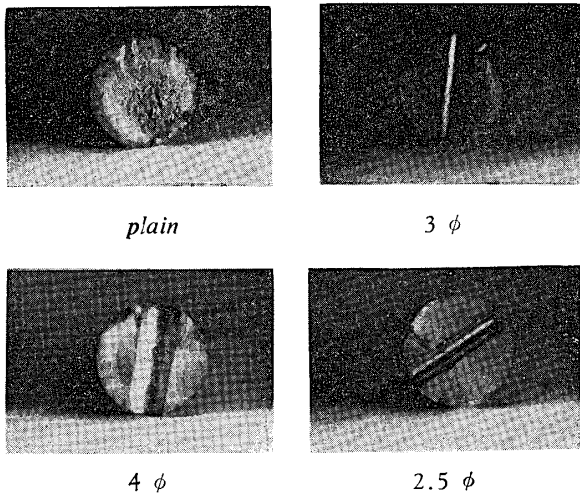


Fig. 13 R-series

4. 結 論

円孔付丸軸（又は円筒）の回転曲げ疲労強度に関して円孔直径 d と軸直径 D との比が $0 \sim 0.5$ の範囲について形状係数 α と切欠係数 β との関係を応力分布に基づいて説明し切欠係数 β は α の他に材料の弾塑性範囲の性質、寸法効果、寸法比、応力勾配、材料の結晶粒度に関する微小範囲などの関数として表わされるべきものとして、疲労破壊を生ずる条件（疲労限度の条件）は切欠底から横断面上の最大応力勾配の方向に測つた微小範囲 e_0 における平均応力がその材料の平滑材の疲労限度 σ_{w0} に達したときがその切欠材の疲労限度に相当すると仮定して切欠係数 β を求める式を立案した。この式は尖鋭切欠と非尖鋭切欠とを特に区別せず全範囲を弾性的に取扱い $d/D = 0 \sim 0.5$ の範囲に適用されるものとした。尖鋭切欠では勿論切欠底

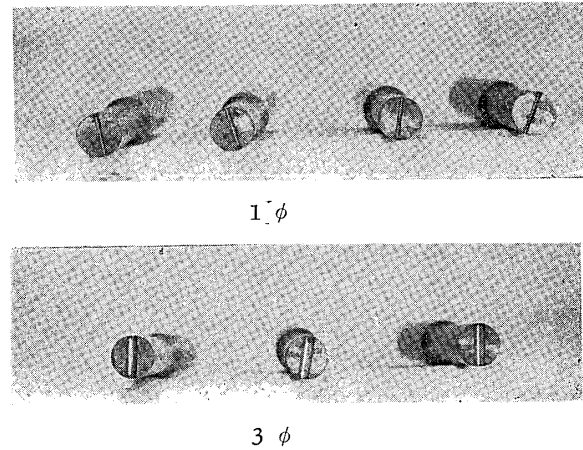


Fig. 14 K-series

から小範囲内に局部的降伏をおこし応力分布が異つてくるがこれは本条件式中に含まれる勾配定数および常数 K によつて相当値に修正されていると考えればよい。実験式は簡単であるが一応上に掲げた諸因子によつて構成されている点が特徴である。回転曲げの実験結果と対照してみると計算曲線とよく一致している。

また同式は引張圧縮の繰返応力に対する β の計算にも適用され実験結果ともよく合致するようである。

参 考 文 献

- 石橋：九大工学部紀要 10, 165 (1947)
- 大野：山口工学部研究報告 18, No. 3 (昭42.12)
- 西田：応力集中率，森北出版 (1967) P 321
- 日本材料学会，金属の疲労 P 179

(昭和43年7月2日受理)