熱放射伝熱における非線型境界条件について

村川　勝弥*・日高　正夫**・栗間　諄二***

On the Non-linear Boundary Conditions of the Thermal Radiation Heat Transfer

Katsuhisa MURAKAWA, Masao HITAKA and Junji KURIMA

Abstract

The boundary condition of thermal radiation with conduction and convection becomes the non-linear boundary condition, as the Stefan-Boltzmann's law.

The authors tried to linearize the non-linear boundary condition of thermal radiation with conduction and convection, using Legendre's polynomials $P_n(x)$, and reduced to the method of solution of quartic algebraic equation.

1. 緒　言

最近になつて高温高圧ボイラの火炉とか原子炉や宇宙工学においては熱放射伝熱の研究が必要となつて来たが従来の物理学における興味の中心が熱の問題を離れていたので熱放射の研究はまだ進んでいない現状である．しかし産業界における熱工業技術の進展はすばらしく，しかも，急速に進行しているので，熱放射に関する研究の必要性は一段と重要の度を増して来ている状況である．

熱放射に関しては従来は角関係を使つて数学上の不定積分の困難性を切り抜けていたが最近になつて Eckert や Sparrow によつて，radiosity（発散能）の考え方を使つて Fredholm 型第２種積分方程式に帰着すれば同様な結果がえられる事が示され[1]，熱放射の研究には積分方程式が威力を発揮している．更に近頃，Viskanta[2] や Nichols[3] によつて理論天文物理学[4]の方法を工学に導入して研究する方法が発表され，熱伝導と熱伝達と熱放射とが同時に共存するときの工学的研究が行われ始めた．この場合は非線型積，微分方程式（non-linear Integro-differential equation）を解く必要が生じるが，この解法はまだ研究されていない現状である．熱伝導や熱伝達においては微分方程式が現われるが，熱放射では積分方程式が現われて来る．これは熱放射は光や電磁波と同じ性質をもち，熱伝導が応用数学の問題で，熱伝達が流体力学の問題とすれば，熱放射は物理学上の問題とも云うべきものであろう．

このような現況において著者等も熱放射の研究の必要に迫られて以下に述べている研究を行つた．先づ高温燃焼ガスが存在する時は，その中に工業上重要な性質をもつ CO_2 や水蒸汽（H_2O）が含まれている事が多く，その場合はシャックによれば，それぞれ絶対温度T（°K）の3.5乗と４乗に比例するので，伝熱壁面の境界条件は非線型となつて取り扱いが極めて困難になつて来る．著者等は，この非線型境界条件を，Legendre の多項式 $P_n(x)$ を用いて，線型化する事を試み，４次代数方程式の解法に帰着した。

2. 非線型境界条件の線型化

高温燃焼ガス，特に CO_2 ガスから伝熱壁へ熱放射があつて，しかも燃焼ガスが高速で流れて壁へ熱伝達が行われて，壁内へ熱伝導もある場合の境界条件は

$$\varepsilon\cdot\sigma(\beta\cdot T_g^{3.5}-T^4)+\alpha(T_g-T)=-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\ :\ r=r_o\cdots(1)$$

となる。

T_g＝高温ガスの絶対温度〔°K〕

T ＝壁の絶対温度〔°K〕

r ＝円柱座標〔m〕　r_o＝円管内径〔m〕

α ＝熱伝達率〔$kcal/m^2h°C$〕

β ＝熱放射の係数

* 機械工学教室

** 宇部工業高等専門学校

*** 機械工学教室

σ ＝Stefan—Boltzmann 定数

ε ＝放射率

λ ＝熱伝導率〔$kcal/mh°C$〕

(1)式は T_g については3.5乗 T については４乗となり，したがつて(1)の境界条件は非線型となる。(1)の左辺において $T_g=x$ とおけば

$$〔(1)の左辺〕=a\cdot x^{3.5}+b\cdot x+c=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

の簡単な型に書き直す事ができる。

次に壁における熱伝導の方程式は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial T}{\partial z}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

となるから，温度 T を無次元化するために，外気の一定温度を $T_0(°K)$ とすれば

$$\theta=T/T_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

を用いて

$$\boxed{\log_e \Phi=\int\frac{d\theta}{a\theta^{3.5}+b\theta+c}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

$$\theta=\frac{1}{a_n}\Phi-\frac{b_n}{a_n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

とおき，(5)式において，$\Phi=x$，$\theta=y$ とおきかえて

$$\therefore\quad x=g(y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

を，求めて，この逆函数を考え

$$y=g(x)\fallingdotseq a_n x+b_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

と近似されるように，Legendre's polynomials $P_n(x)$ で全体的近似を行つて線型化する。温度 θ したがつて Φ の上限，下限を α_n，β_n とすれば

$$a_n=3\int_0^1\lambda g\{(\beta_n-\alpha_n)\lambda+\alpha_n\}d\lambda/(\beta_n-\alpha_n)$$

$$b_n=\int_0^1 g\{(\beta_n-\alpha_n)\lambda+\alpha_n\}d\lambda-3\alpha_n\int_0^1\lambda g\{(\beta_n-\alpha_n)\lambda+\alpha_n\}d\lambda/(\beta_n-\alpha_n)$$

となるので，(6)式に用いて，境界条件と(3)式とを，線型化することができる．この時，最も困難なのは(5)式の右辺の不定積分法である．

$$\boxed{ax^{3.5}+bx+c=0}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

の根 δ_n が分れば

$$f(x)=(x-\delta_1)(x-\delta_2)\cdots\cdots(x-\delta_n)$$

と書けるので，(5)式の右辺の不定積分は部分分数を用いて可能となるから，結局(2)式の方程式を解くことができれば良いわけであるが x の 3.5乗の項を含む方程式(2)は数学的には，一般に解くことは不可能であるから著者等は(2)式の左辺を $f(x)$ とおいて，与えられた任意の函数 $f(x)$ を Legendre の多項式 $P_n(x)$ によつて全体的近似をおこなつて，代数学的に，一般に解法の可能な４次式で近似させることを試みた．$f(x)$ を $P_n(x)$ で展開した式は次のように現わされる．

$$f(x)=A_0P_0(x)+A_1P_1(x)\cdots\cdots+A_nP_n(x)\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^1 f(x)P_n(x)dx,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\ (10)$$

$P_n(x)$ は x の n 乗の式であるから(9)式において，$P_4(x)$ まで取つて x の４次元とすれば(2)式の左辺は

$$ax^{3.5}+bx+c\fallingdotseq A_0P_0(x)+A_1P_1(x)+A_2P_2(x)+A_3P_3(x)+A_4P_4(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

で近似される．したがつて(2)式を解くことは(11)式の右辺の四次式を解くことで近似される．これは代数学によれば四次式までは一般的に数学的にも解けるので便利である，(11)の右辺は

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

となるので x の３乗の項を欠く次の形に誘導して

$$x^4+px^2+qx+r=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

この方程式の分解３次方程式

$$t^3+2pt^2+(p^2-4r)t-q^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

の根を t_1，t_2，t_3 とすれば，(13)の４根は Euler の解法によれば次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}x_1&=(+\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})/2\\x_2&=(+\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3})/2\\x_3&=(-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3})/2\\x_4&=(-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})/2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

したがつて，これをもとにもどせば(11)式の根が求まるので結局(5)式の右辺の不定積分が，できて(6)式から線型化することができる．

以上は一般的な方針を述べたものであるが，工業上においては式の形を簡単にするために普通は(1)式の左辺の第１項の熱放射の項は，固体における Stefan—Boltzmann の法則のように絶対温度の４乗，$T_g{}^4$ の形にして係数 β を，温度によつて修正するようにしているので，次にこのことについて述べよう．

$$\varepsilon\cdot\sigma(\beta\cdot T_g{}^4-T^4)+\alpha(T_g-T)=-\lambda\frac{\partial T}{\partial r};r=r_0\cdots(16)$$

の非線型境界条件において，(2)式のように $T_g=x$ とおけば(2)式の代りに，次の４次式がえられる．

$$ax^4+bx+c=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

したがつて(5)式の代りに

$$\boxed{\log_e \Phi=\int\frac{d\theta}{a\cdot\theta^4+b\theta+c}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

を使えばよく，しかも(11)式の手数が省略できるので，(13)式から(15)式を使つて直ちに(18)式の右辺の不定積分が行えることになるので，大へん便利になる．

以上によつて熱放射伝熱における非線型境界条件(1)式および(16)式はそれぞれ(5)式および(18)と(6)式とによつて線型化することが可能であり，そのためには(11)式

(17)式の4次代数方程式を解く必要が生ずるが，代数学によつて一般的解法が可能であるから解決することが出来る．(18)式を用いた数値計算例[5]は著者の一人によつて多大な数値計算の結果が求められているのがあるが，ここでは省略する．

3. 結　言

熱放射伝熱においては(1)式や(16)式のような非線型境界条件となるので取扱い方が困難となつて来るが，著者等によつて(5)式，(18)式と(6)式によつて線型化することが試みられた．その時，(11)式のように Legendre の多項式 $P_n(x)$ によつて近似する方法が考えられた．

結局(11)式，(17)式の4次代数方程式の解法に帰着されたことになる。(11)式，(17)式は θ にかんする式であるから，座標系が多次元（r, z, t, ……）の場合にも拡張して適用することができる．

Nomenclatures

A_m ：係数（$m=0$, 1, 2, ……）
A_n ：係数（$n=0$, 1, 2, ……）
$P_{n(x)}$ ：Legendre の多項式
T ：絶対温度（°K）
T_g ：ガスの絶対温度（°K）
T_0 ：外気温度（°K）
Z ：軸方向の座標〔m〕
a ：係数
a_n ：係数
b_n ：係数
b ：係数
c ：係数
$f_{(x)}$ ：x の関数
$g_{(x)}$ ：x の関数
p ：係数
q ：係数
r ：円柱座標，係数
r_0 ：円管の半径〔m〕
s ：係数
t ：未知関数
t_1, t_2, t_3 ：3次代数方程式の3根
x ：未知数
x_1, x_2, x_3, x_4 ：4次代数方程式の4根
y ：未知数

Greek letters

α ：熱伝達率〔$kcal/m^2h°C$〕
α_n ：Φ の上限
β ：係数
β_n ：Φ の下限
δ_n ：（$n=1$, 2, ……, n），(2)式の根
ε ：放射率
λ ：熱伝導率〔$kcal/mh°C$〕
σ ：Stefan-Boltzmann 定数
θ ：T/T_0
Φ ：(5)，(18)式

References

1) W. Ibele : Modern Developments in Heat Transfer, (1963), Academic Press, P. 185~207
2) R. Viskanta: Heat Transfer in Thermal Radiation Absorbing and Scattering Media, Argonne National Laboratory, May 1960, ANL—6170.
3) L. D. Nichols : Analytical and Experimental Determination of the Fluid Temperature Profile in the Entrance Region of an Annular Passage considering the Effect of Convection and Radiation, (Ph. D. Thesis), Case Institute of Technology, U. S. A., 1963,
4) V. A. Ambartsumyan : Theoretical Astrophysics, Pergamon Press, 1958.
S. Chandrasekhar : Radiative Transfer, Dover Publications, 1960.
V. Kourganoff : Basic Methods in Transfer Problems, Dover Publications, 1963.
5) K. Murakawa : Thermal Radiation with Conduction and Convection, Memoirs of the Faculty of Engineering, Yamaguchi University, vol. 18, No. 2, July. 1967, P. 1~6.

Appendix

1) $P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$\vdots$$

$$P_n(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}\Big\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\Big\}$$

2) $$\int\frac{dx}{(K-Bx^4-Cx)}=\int\frac{(-A_0x-B_0)dx}{\{x^2+\lambda x+(\lambda+\beta)\}}+\int\frac{(A_0x+B'_0)dx}{\{x^2-\lambda x+(\lambda-\beta)\}}$$ の積分法

$$P=\frac{K}{3B},\quad q=-\frac{1}{16}\frac{C^2}{B^2},\quad \lambda=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+P^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+P^3}},\quad \beta=\sqrt{\lambda^2+\frac{K}{B}},$$

$$A_0=\frac{\lambda}{2B(\lambda^3+\beta^2)},\qquad B_0=\frac{(\lambda^2-\beta)}{2B(\lambda^3+\beta^2)},$$

$$B'_0=-\frac{(\lambda^2+\beta)}{2B(\lambda^3+\beta^2)}$$

$$\int\frac{(-A_0x-B_0)dx}{\{x^2+\lambda x+(\lambda+\beta)\}}=-\frac{A_0}{2}log_e(x^2+\lambda x+\lambda+\beta)+\left(-B_0+\frac{\lambda}{2}A_0\right)\int\frac{dx}{\{x^2+\lambda x+(\lambda+\beta)\}}$$

$$\int\frac{dx}{\{x^2+\lambda x+(\lambda+\beta)\}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda+\beta-\frac{\lambda^2}{4}}}tan^{-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}+x\right)}{\sqrt{\lambda+\beta-\frac{\lambda^2}{4}}},$$

$$\left[(\lambda+\beta)-\frac{\lambda^2}{4}\right]>0$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda+\beta)}}log_e\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda+\beta)}-\frac{\lambda}{2}-x}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda+\beta)}+\frac{\lambda}{2}+x},$$

$$\left[\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda+\beta)\right]>0$$

$$\int\frac{(A_0x+B'_0)dx}{\{x^2-\lambda x+(\lambda-\beta)\}}=\frac{A_0}{2}log_e(x^2-\lambda x+\lambda-\beta)+\left(B'_0+\frac{\lambda}{2}A_0\right)\int\frac{dx}{\{x^2-\lambda x+(\lambda-\beta)\}}$$

$$\int\frac{dx}{\{x^2-\lambda x+(\lambda-\beta)\}}=\frac{1}{\sqrt{(\lambda-\beta)-\frac{\lambda^2}{4}}}tan^{-1}\frac{\left(-\frac{\lambda}{2}+x\right)}{\sqrt{(\lambda-\beta)-\frac{\lambda^2}{4}}},$$

$$\left[(\lambda-\beta)-\frac{\lambda^2}{4}\right]>0$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda-\beta)}}log_e\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda-\beta)}+\frac{\lambda}{2}-x}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda-\beta)}-\frac{\lambda}{2}+x},$$

$$\left[\frac{\lambda^2}{4}-(\lambda-\beta)\right]>0$$

(昭和43年5月17日受理)