



# 3次元非定常熱伝導解析のための境界要素法を用いた直接法解析コードの開発\*

劉 承 論<sup>1</sup> 栗 山 憲<sup>2</sup> 水 田 義 明<sup>3</sup>

## Development of Numerical Codes by Direct Boundary Integral Method for Three-dimensional Non-steady Heat Conduction

by Chenglun LIU<sup>1</sup>, Ken KURIYAMA<sup>1</sup> and Yoshiaki MIZUTA<sup>1</sup>

1. Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube 755

Final purpose of this study is to develop a subsystem which constructs three-dimensional numerical system in order to contribute to predictive calculation of output and life of Hot Dry Rock geothermal energy generation. The authors have developed the two kind of the systems for 3D non-steady heat conduction by the direct boundary element methods, the TIME INTEGRAL method and the STEP WISE method. They have carried out numerical calculations by using the system developed and have shown applicability of the system, especially in aiming to high precision and high speed computation. In this report, the outline of the unique procedure of the numerical system developed by the authors is described first, the calculated results on heat conduction in a sphere solid is compared with the corresponding strict solution and accuracy of numerical solution is demonstrated next. Finally, the strict solution of heat conduction in infinite medium around a spherical cavity is originally presented and the numerical solution of it is compared with the strict solution.

**KEY WORDS :** Heat Conduction, Boundary Element Method, Numerical Integration, Infinite Medium

### 1. 緒 言

本研究は最終的には高温岩体発電の出力と寿命の予測のための3次元数値解析システム<sup>1)</sup>すなわち、何枚のフラクチャからなるマルチ貯留層からの熱抽出特性予測システムを構成する1つのサブシステムの開発を目的としているもので、まず、システムの高精度化と高速化に寄与することを目指して、境界要素法の直接法 TIME INTEGRAL 法と STEP WISE 法による2つのサブシステム(3次元非定常熱伝導解析システム)を開発した。また、これを用いてモデル解析を行い、それらの方法の実用性について検討を行った。高温岩体発電に関するこのようなシステムの開発はすでに行われているが、それは2次元問題として取り扱っており、かつ貯留層としてモデル化されているのは1枚のフラクチャだけである<sup>2)</sup>。本報ではまず、著者らが開発した3次元境界要素法(選点法)による熱伝導解析システムの概要について述べ、次に球モデルの解析結果を厳密解と比較して数値解の精度を検証した。また、球かを有する無限媒体モデルに対して新たに厳密解を求め、また数値解析を行って得られた結果を厳密解と比較した。

なお、実用的に意味のあるフラクチャモデルについては次報で述べる。

\* 1997年9月25日受付 1998年2月12日受理 資源・素材学会平成9年度春季大会にて一部発表(1997年3月27日)

1. 山口大学大学院理工学研究科博士後期課程設計工学専攻

2. 理博 山口大学教授 工学部感性デザイン工学科

3. 正会員 工博 山口大学教授 工学部社会建設工学科

[著者連絡先] FAX 0836-35-9428 (山口大・社会建設)

キーワード: 熱伝導, 境界要素法, 数値積分, 無限媒体

### 2. コンピュータシステムの開発

2・1 3次元非定常熱伝導問題の境界要素法の離散化方程式  
熱拡散率(温度伝導率)を  $K$ , 熱源を  $h$  とする等方かつ均質な特性を持つ物体  $\Omega$  内の非定常熱伝導方程式は(1)式で、またこれに対応する3次元問題の基本解は(2)式で与えられる<sup>3)4)</sup>。

$$K \Delta u(p, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) + h(p, \tau) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$G(p, t; p', \tau) = \left\{ \frac{1}{4K\pi(t-\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{-|p-p'|^2}{4K(t-\tau)} \right\} \quad \dots\dots (2)$$

これらの式および Green 定理により積分方程式を導くことができる。積分方程式を離散化するために、本研究では、 $\Omega$  の境界  $\Gamma$  を  $n_b$  個の三角形要素  $\Gamma_j$ , 時間  $[t_0, t]$  を  $n$  個の時間要素  $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ ,  $\Omega$  を  $n_v$  個の四面体要素  $\Omega_i$  に分割し、すべて一定要素 ( $u, q, h$  が要素内で一様分布) とした。得られる離散化方程式は(3)式と(4)式である。

$$\begin{aligned} c(s_i)u(s_i, \tau_k) = & K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} q(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\ & - K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} u(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} q^*(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\ & + \sum_{l=1}^{n_v} u(p_l, \tau_0) \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_k; p', \tau_0) dp' \\ & + \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{n_v} h(p_l, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_k; p', \tau) dp' d\tau \\ & (i=1 \sim n_b; k=1 \sim n) \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$u(p, \tau_k) = K \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} q(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(p, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau$$

$$\begin{aligned}
 & -K \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{n_b} u(s_j, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{I_j} q^*(p, \tau_k; s'; \tau) ds' d\tau \\
 & + \sum_{l=1}^{n_v} u(p_l, \tau_0) \int_{\Omega_l} G(p, \tau_k; p'; \tau_0) dp' \\
 & + \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{n_v} h(p_l, \tau_m) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Omega_l} G(p, \tau_k; p'; \tau) dp' d\tau \\
 & \hspace{10em} (k=1 \sim n) \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

ここで、 $p$  は領域  $\Omega$  内の点、 $\tau_0 = t_0$  は初期時刻であり、 $s_i$  は三角形要素  $I_i$  上の点で  $I_i$  の重心としており、 $p_l$  は四面体要素  $\Omega_l$  内の点で  $\Omega_l$  の重心としている。また、 $q = \partial u / \partial \mathbf{n}$ 、 $q^* = \partial G / \partial \mathbf{n}$  で、 $\mathbf{n}$  は  $\Omega$  の境界上での外向き法線である。 $c(s_i)$  は境界上の点  $s_i$  における幾何形状に依存する定数で、境界が点  $s_i$  でなめらかなとき  $1/2$  である。

2・2 三角形上での面積分についての処理

(3)式と(4)式中の境界要素  $I_j$  上での積分を考察する。三角形上での積分は被積分関数に特異性がない場合は、Gauss の数値積分法で通常は精度よく計算できる<sup>5)</sup>。ところで、関数  $G$  には特異性がないものの、時間  $\tau$  が大きくなると  $|p - p'|$  (すなわち  $p$  と  $p'$  の間の距離  $r$ ) の増加に伴い、急激に値が小さくなる特徴があり、機械的に Gauss の数値積分法を適用すると問題が生じ、数値積分は工夫を要する。

たとえば、被積分関数を  $f = e^{-r^2/T^2}$  ( $T = 20$ ) とし、図1のような三角形上での積分を考える。標本点を3点とする Gauss の数値積分法により計算すると

$$\int_{I_j} f ds \approx A \sum_{i=1}^3 \omega_i f(x_i, y_i) = 1.86 \times 10^{-44}$$

となり、積分値はほぼゼロになる。ところが2・2・1で述べるようにこの積分は  $7.8540 \times 10^{-3}$  程度であり、この例でいえば3点の Gauss の数値積分法は精度が悪い。すなわち、通常の Gauss の数値積分法では積分値がときにはでたらめな値になることがわかる。そこで、精度よく積分するため次の方法(方法1)を考えた。

2・2・1 自分自身上での積分 自分自身すなわちソース(観測要素の内の代表点に影響を与える)要素と観測要素とが同一になっている場合、すなわち、観測要素の重心がソース要素の中にある場合、関数  $f = e^{-r^2/T^2}$  の三角形  $\Delta$  上での積分は以下の議論により円上での積分で近似できる<sup>6)</sup>。ただし  $r$  は計算点である三角形の重心からの距離とし、 $T = (4k(t - \tau))^{-1/2}$  とする。重心から三角形の各辺への距離のうち、最小値を  $R_1$  とし、重心から三角形の各頂点への距離のうち最大値を  $R_2$  とする。重心を中心とする半径  $R_1$  の円を  $D_1$ 、半径  $R_2$  の円を  $D_2$  とする。

ここで、

$$\iint_{D_i} e^{-r^2/T^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_i} r e^{-r^2/T^2} dr d\theta = \frac{\pi}{T^2} [1 - e^{-R_i^2/T^2}] \quad (i=1,2)$$

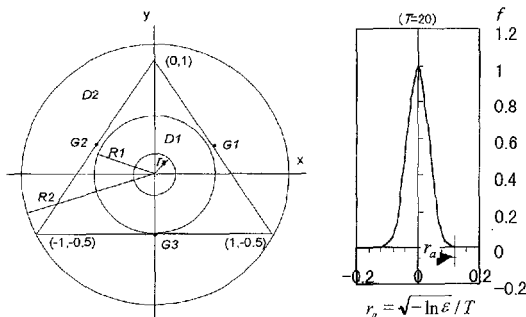


図1  $R_1, R_2, r_a$ , Gauss 点および被積分関数  $f$

であることに注意する。

不等式

$$\iint_{D_1} e^{-r^2/T^2} dx dy \leq \iint_{\Delta} e^{-r^2/T^2} dx dy \leq \iint_{D_2} e^{-r^2/T^2} dx dy$$

より、次式

$$\begin{aligned}
 0 & \leq \iint_{\Delta} e^{-r^2/T^2} dx dy - \iint_{D_1} e^{-r^2/T^2} dx dy \leq \iint_{D_2} e^{-r^2/T^2} dx dy \\
 & - \iint_{D_1} e^{-r^2/T^2} dx dy = \frac{\pi}{T^2} (e^{-R_1^2/T^2} - e^{-R_2^2/T^2}) < \frac{\pi}{T^2} e^{-R_1^2/T^2}
 \end{aligned}$$

を得る。

したがって、不等式

$$R_1 \geq \sqrt{-\ln \epsilon / T} \dots\dots\dots (5)$$

を満たすならば、次式

$$0 \leq \iint_{\Delta} e^{-r^2/T^2} dx dy - \iint_{D_1} e^{-r^2/T^2} dx dy < \frac{\pi}{T^2} \epsilon \dots\dots\dots (6)$$

が成立する。

このことより、三角形上での積分値が円上での積分値

$$\iint_{D_1} e^{-r^2/T^2} dx dy = \frac{\pi}{T^2} [1 - e^{-R_1^2/T^2}] \dots\dots\dots (7)$$

で精度よく近似できる。

前述のものと同じ計算例を取ると三角形の頂点は  $(-1.0, -0.5), (1.0, -0.5), (0.0, 1.0)$  であり、 $T = 20.0$  である。いま  $\epsilon = 10^{-4}$  とすれば、 $R_1 = 0.5 > \sqrt{-\ln \epsilon / T} = 0.15$  となり、(5)式を満たしている。したがって、(6)式より、

$$0 \leq \iint_{\Delta} e^{-r^2/T^2} dx dy - \iint_{D_1} e^{-r^2/T^2} dx dy < \frac{\pi}{T^2} \epsilon < 10^{-6}$$

となり、(7)式より得られる結果  $7.840 \times 10^{-3}$  の誤差は  $10^{-6}$  以下である。

Gauss の数値積分の結果と比較すれば、問題点は明らかであり、精度が飛躍的に向上したことがわかる。

もしこの方法の条件である(5)式を満たさないときには、次の方法(方法2)を用いることができる。

2・2・2 細分割した三角形上での積分 自分自身となる境界要素である三角形を十分に細かく分割し、おのおのに Gauss の数値積分を適用し、それぞれの積分値の和を境界要素上の積分値とする方法である。図2に示すように各辺の中点を結んでできる三角形に分割し、さらに分割は積分値が収束するまで行う。

2・2・1の例に対して、Gauss の数値積分と上述の2つの

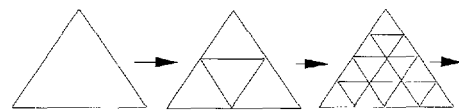


図2 三角形境界要素内の分割方法

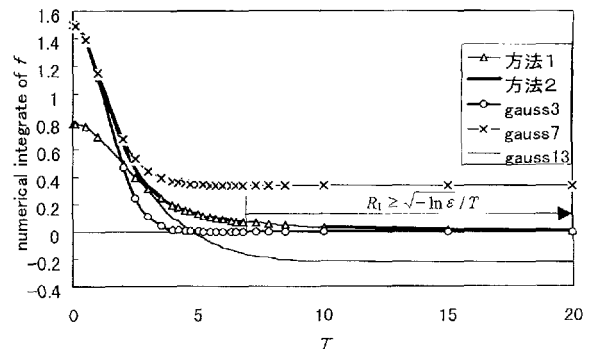


図3 Gauss の数値積分と積分方法1, 2の比較

積分方法 (方法1, 方法2) の比較を図3に示す。この図から Gauss の3点公式 (Gauss 3), 7点公式 (Gauss 7), 13点公式 (Gauss 13) の数値積分式の積分結果は  $T$  が大きくなるとともに誤差が大きくなる。これに対して, 方法1と方法2は  $R_1 \geq \sqrt{-\ln \varepsilon / T}$  の区間でよく一致している。特に方法2は全区間で精度がよい。

2・3 TIME INTEGRAL 法と STEP WISE 法

2・3・1 TIME INTEGRAL 法 時間に関する積分を常に  $\tau = \tau_0$  の初期時刻からはじめて, 所定の時刻  $\tau_n$  における解を求める通常の方法である。

境界条件を  $u(s_i, \tau_m) = \bar{u}(s_i, \tau_m)$

初期条件を  $u(p_l, \tau_0) = \bar{u}(p_l, \tau_0)$

とし,  $n$  を設定すると(3)式から時間要素  $m$  に対して, 未知である  $q(s_i, \tau_m)$  が  $n_b$  個であることから, 線形方程式が  $n_b$  本構築される。その方程式(3)式を満たす  $q(s_i, \tau_m)$  を求めると, (4)式により時間  $\tau_m$  における任意点  $p$  の温度を求めることができる。

離散化方程式(3)式と(4)式において熱源がない場合を以下に示す。

$$\frac{1}{2} u_k^i = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} A_{km}^{ij} q_m^j - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} B_{km}^{ij} u_m^j + \sum_{l=1}^{n_p} C_{k0}^{il} u_0^l \quad \dots (8)$$

$$u_k^p = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} A_{km}^{pj} q_m^j - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_b} B_{km}^{pj} u_m^j + \sum_{l=1}^{n_p} C_{k0}^{pl} u_0^l \quad \dots (9)$$

上式中の影響係数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{km}^{ij} &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\ B_{km}^{ij} &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} q^*(s_i, \tau_k; s', \tau) ds' d\tau \\ C_{k0}^{il} &= \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_k; p', \tau_0) dp' \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ここに,

$$\begin{aligned} q_m^j &= q(s_j, \tau_m) \\ u_m^j &= u(s_j, \tau_m) \\ u_0^l &= u(p_l, \tau_0) \end{aligned}$$

熱源がなく, 初期温度を  $u(p_l, \tau_0) = T_0$ , 境界条件を  $u(s, \tau) = T_s$  とすると, (8), (9)式は体積積分を必要としない方法に変換できる。

2・3・2 STEP WISE 法 各時間ステップの終わりに, 領域内の各体積要素での温度を見かけの初期条件とする方法である<sup>7)</sup>。この方法は連成解析に組み込まれるときに解析手順の上で有利となる。まず(8)式により, 境界条件および初期条件から,  $k=1$  のときの  $q(s_i, \tau_1)$  を求めて, (9)式により各体積要素の重心点の温度  $u(p_l, \tau_1)$  を求める。つぎに,  $u(p_l, \tau_1)$  を  $k=2$  の初期条件とし,  $q(s_i, \tau_2)$  を求める。このような操作を続けて  $k=n$  の  $q(s_i, \tau_n)$  および時間  $\tau_n$  における任意点  $p$  の温度  $u(p_l, \tau_n)$  が求められる。

ただし, 影響係数の計算方法が TIME INTEGRAL 法と少し異なることに注意を払わなければならない。すべての時間要素を同一に設定すると, 影響係数は(11)式で1回だけ計算すればよい。

$$\left. \begin{aligned} A_{km}^{ij} &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} G(s_i, \tau_m; s', \tau) ds' d\tau \\ B_{km}^{ij} &= K \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \int_{\Gamma_j} q^*(s_i, \tau_m; s', \tau) ds' d\tau \\ C_{k0}^{il} &= \int_{\Omega_l} G(s_i, \tau_m; p', \tau_{m-1}) dp' \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

ここに,

$$\begin{aligned} q_m^j &= q(s_j, \tau_m) \\ u_m^j &= u(s_j, \tau_m) \\ u_0^l &= u(p_l, \tau_{m-1}) \end{aligned}$$

表1 球モデルに対する解析の方法と要素分割条件

数値解析方法	時間要素 (Kt/R <sup>2</sup> )	時間要素数	境界要素数	体積要素数	参照	
TIME INTEGRAL	I	0.02	10	264	1056	図4□
	II	0.02	10	264	0	図4△
STEP WISE	0.02	10	264	3432	図5	

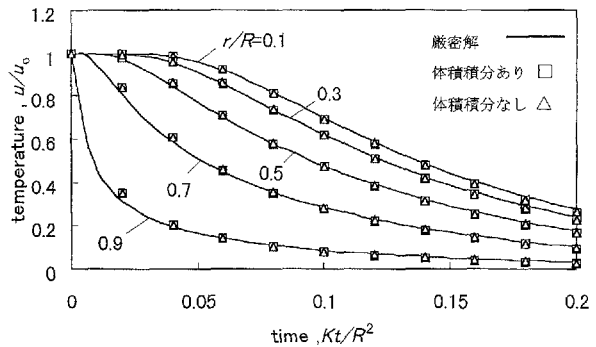


図4 TIME INTEGRAL 法による計算結果

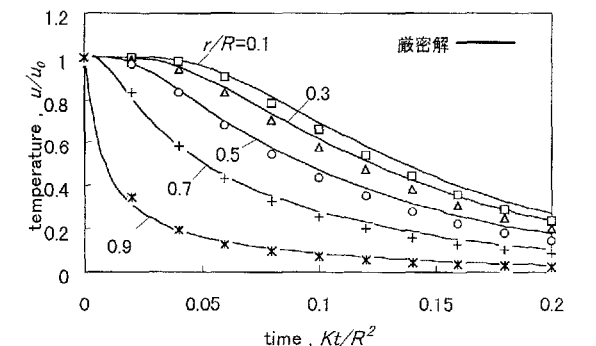


図5 STEP WISE 法による計算結果

2・4 コンピュータシステムの信頼性

開発したコンピュータシステムの信頼性を検証する例題モデルは, 半径  $R$  の球の物体, 初期温度を  $u_0 \equiv T_0$ , 表面上での境界条件を0とする。時刻  $\tau = 0$  からの任意時刻  $\tau_m$  における球の内部の温度分布を求め厳密解と比較した。球モデルに対する非定常熱伝導問題の厳密解は(12)式で与えられる<sup>8)</sup>。

$$u(r, \tau) = \frac{2Ru_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi r}{R} e^{-kn^2\pi^2\tau/R^2} \quad \dots (12)$$

数値解析方法, 要素分割条件などを表1にまとめて示す。解析結果を図4, 図5に示す。図4から TIME INTEGRAL 法による計算結果は非常に精度が高いことがわかる。またこの問題の場合には, 体積要素を導入した計算を行っても, その要素数を多くすれば, 体積要素を必要としない方法に変換した場合とその差はほとんどないことがわかる。図5から STEP WISE 法でも体積要素数を多く取ればかなり精度の高い計算結果が得られることがわかる。

STEP WISE 法は直前の時間ステップの終わりの解を初期条件として次ぎの解を得るわけだから, 初期時刻から積分を行う TIME INTEGRAL 法に比べて, 原理的に計算時間は短い。しかし, 体積要素数を多く取れば取るほど計算時間は長くなるので, その利点は失われることになる。しかしながら, 高温岩体発電の出力と寿命を予測する連成解析システムにおいては, 時間ステップごとに計算が進められるので, そのサブシステムとなる熱伝導解析システムが STEP WISE 法で行われることは最終的に有利であることにもなる。

3. 球かを有する無限体内での熱伝導問題に対する解析

次報において、無限媒体内に1枚の円板状フラクチャが存在する場合のモデルに対する本サブシステムの適用性が検討された結果が述べられるが、ここでは、まず無限媒体内に球状空かが存在するモデルに対して導かれた厳密解および本サブシステムによる数値解析結果について述べる。

無限媒体内に半径  $R$  の球かが存在するモデルに対して、初期温度を  $u_0 = T_0$  とし、球か表面上での温度境界条件を0とする。時刻  $t = 0$  からの任意時刻  $t_m$  における無限固体内部の温度分布を求める。

3.1 問題の厳密解

上述の球かにおける3次元非定常熱伝導方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \Delta u & (R < r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \infty, t > 0) \\ u(r, 0) = T_0 & (R \leq r < \infty) \\ u(R, t) = 0 & (t \geq 0) \end{cases} \dots\dots (13)$$

(13)式を極座標で表し、 $v(r, t) = ru(r, t)$  とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} & (R < r < \infty, t > 0) \\ v(r, 0) = rT_0 & (R \leq r < \infty) \\ v(R, t) = 0 & (t \geq 0) \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

となる。

$w(r, t) = v(R + r, t)$  とおき、フーリエ変換を用いることにより、

$$v(r, t) = T_0(r - R + R \operatorname{erf}(\frac{r - R}{2\sqrt{Kt}})) \quad (r > R, t > 0)$$

を得る。

ただし、 $\operatorname{erf}$  は誤差関数

$$\operatorname{erf}(\frac{r - R}{2\sqrt{Kt}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r - R}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

である。元の3次元非定常熱伝導方程式の解  $u(r, t)$  は

$$u(r, t) = \frac{1}{r} v(r, t) = \frac{1}{r} T_0 \left\{ r - R + R \operatorname{erf}(\frac{r - R}{2\sqrt{Kt}}) \right\} \quad (R \leq r < \infty, t > 0) \dots\dots\dots (15)$$

となる。

3.2 TIME INTEGRAL 法による数値解析

この問題では熱源がなく、初期温度  $u_0 = T_0$ 、境界条件  $u(s, \tau) = 0$  であるので、(8)、(9)式は体積積分を必要としない方法に変換でき、非常に効率よく計算できる。

分割数などを表2にまとめている。図6に(15)式を利用して上述した球かを有する無限媒体内の熱伝導問題に対する厳密解析の結果と TIME INTEGRAL 法による数値解析の結果とを球か中心からの距離をパラメータとして示したものである。図7は TIME INTEGRAL 法による数値解析の結果を時間経過をパラメータとして示したものである。

図6の厳密解との比較から、当然のことながら、球モデルと同程度に精度が高いことがわかる。また、STEP WISE 法による結果も原理的に球モデルと同程度の精度の解が得られるものと思われる。

4. 結 言

2次元問題に対して、岩盤工学の分野ですでに実用化されている。選点法による境界要素法の TIME INTEGRAL 法と STEP WISE 法をそれぞれ3次元化した。また、3次元化したときに

表2 球かモデルに対する TIME INTEGRAL 法での解析における要素分割条件

時間要素 ( $Kt/R^2$ )	時間要素数	境界要素数	体積要素数
0.02	40	264	0

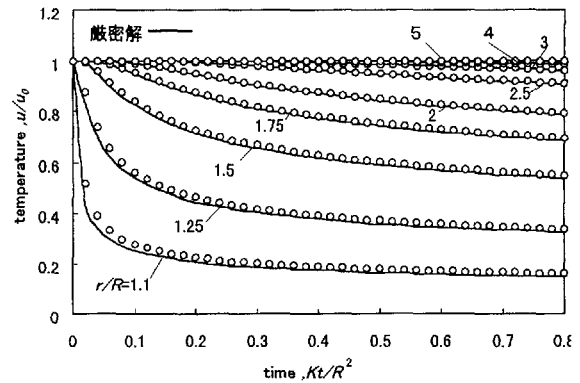


図6 球か中心からの位置をパラメータとした無限媒体内温度分布の経時変化

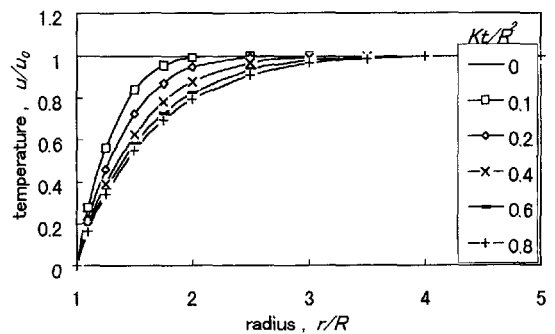


図7 時間経過をパラメータとした無限媒体内温度分布の経時変化

Gauss の数値積分では観測要素に影響を与える要素が観測要素と同一である場合に問題があることを指摘し、これを回避するための独特の数値積分手法を開発した。また、これを用いて3次元境界要素法による非定常熱伝導解析のためのシステムを開発した。この解析システムでは一定要素を用いているが、上述の積分方法を用いることにより、厳密解と比較して精度の高い解が得られることがわかった。また、球かを有する無限媒体内の非定常熱伝導問題の厳密解を新たに求めた。そこで、この問題についても開発された数値解析システムを用いて計算を行い、得られた結果を厳密解と比較・検証して、解析システムの有用性を示した。現在、高温岩体発電設計に資するための連成解析システムのサブシステムに実際に供される。「水圧破砕によって造成されたフラクチャ」をイメージした亀裂まわりの無限媒体(岩盤)内の非定常熱伝導システムの開発に取り組んでおり、これについては次報で述べる。

引 用 文 献

- 1) 水田義明：演習 岩盤開発設計、アイビーシー、(1996)
- 2) 阿部博之・関根英樹・渋谷 嗣：日本鉱業会誌、Vol. 1144、p. 433-436、(1983)
- 3) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. : Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press. Oxford, (1986)
- 4) 神谷紀生ら(共訳)：境界要素の基礎と応用、培風館、(1982)
- 5) Cowper, G. R. : Gaussian Quadrature Formulas for Triangles, Int. J. Num. Mech. Eng. V7(3)、p. 405-408、(1973)
- 6) 劉承論・栗山 憲・水田義明：資源・素材学会平成9年度春季大会講演要旨集、p. 206、(1997)
- 7) Sharp, S. : Boundary Element Methods in Quasistatic Thermoelasticity with Applications in Rock Mechanics, Phd Thesis (University of Minnesota), (1982)
- 8) 竹内洋一郎著：熱応力、日新出版、(1971)