

地層科学研究における3次元境界要素法解析

THREE DIMENSIONAL NUMERICAL ANALYSES BY BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR GEO-SCIENCE

水田義明¹⁾、栗山憲²⁾、ブディ スリステアント³⁾、劉承論³⁾

Yoshiaki MIZUTA, Ken KURIYAMA, Budi SULISTIANTO and Chenglun LIU

- 1) 山口大学工学部社会建設工学科 (〒755 宇部市常盤台 2557、E-mail:myoshiok@jim.civil.yamaguchi-u.ac.jp)
 2) 山口大学工学部感性デザイン工学科 (〒755 宇部市常盤台 2557、E-mail:kuriyama@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp)
 3) 山口大学大学院工学研究科博士後期課程 (〒755 宇部市常盤台 2557、E-mail:yohnishi@jim.civil.yamaguchi-u.ac.jp)

This paper presents three kinds of predictive simulation systems by the boundary element method, which have been developed recently by the authors, and several examples of practical modelling for the geo-science / geo-engineering problems. In the usual boundary element procedure, numerical integrations are employed to calculate influence coefficients but the authors have developed an indirect procedure by FSM (Three Dimensional Fictitious Stress Method) and an indirect procedure by 3-D DDM (Displacement Discontinuity Method) in which analytical integrals are taken, and both the procedures have been combined, aiming to establish a more accurate and faster computing system. They also have developed a direct 3D boundary element procedure for non-steady heat conduction in solid around opening / fracture, in which numerical integration using the special method proposed by them is taken.

Key Words: Tectonic Stress, Fault Stiffness, Rock stability, Fracture

1. はじめに

高レベル放射性廃棄物の地層処分に資するための地層科学研究および資源開発や地熱開発設計に資するための岩盤工学研究が広く行われているが、最近著者らが3次元境界要素法を用いて実施しているつぎの研究について、その手法と得られた結果について報告する。なお、これらの研究に用いられている手法はすべて著者らが新たに開発したもので、3つの手法のうち最初の2つの手法において、数値積分ではなく解析的積分が主体となるところに特徴がある。

また、最後の手法においては特別に工夫された数値積分手法が用いられている。

- ① 浅所応力測定値からの地殻応力場の決定と活断層特性の把握：静弾性問題／逆問題
- ② 地層境界面（弱層）を有する大残壁および地下利用に供される大空洞の安定性評価：弾塑性問題
- ③ 球かを有する無限媒体内の非定常熱伝導：移流拡散問題

2. 静弾性問題

2.1 浅所応力測定値からの地殻応力場の算定

(FSMによる静弾性解析／地形の影響を取り除く逆解析)

(1) よく用いられるが正当でない応力場の仮定

岩盤挙動を予測するためには、それに先立ってそのの

応力場を測定しなければならないが、実際に応力測定が行われることは少なく適当に仮定されることが多い。とくに、(1)式に示す仮定がよく用いられる。また、有限要素法でよく用いられる変位拘束条件（モデル下面境界を鉛直方向拘束、左右境界を水平方向拘束）はこの仮定に近いものであるが、左右境界の地表面の標高が異なる場合には、高い方の地表に引張応力が生ずるという一般には間違った結果をもたらす。

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z \quad (1)$$

ここに ρ は岩盤の密度 (kg/m^3)、 z は適当に設けられた座標原点からの深さ (m)、 g は重力の加速度 (9.81 m/s^2)、 ν は岩盤のポアソン比である。

(2) 2面破砕法による応力測定結果

茂住鉱には茂住祐延断層があり、この断層は微小地震観測の結果から活断層であるとみなされている。断層から約300m離れた地点において2面破砕法による原位応力測定を行った。方向はそれぞれ異なるが一つの面上に配置された3本のボアホールを用いて、Serataらが提案した手順¹⁾によって実験を実施し、水田らの手順²⁾によって観測地点の3次元応力場を決定した。測定箇所の地表からの深さは約380mであるが、直上の地表はかなり傾斜している (Fig. 1 参照)。測定された応

力場を6つの応力成分で示すと Table 1 のようである。

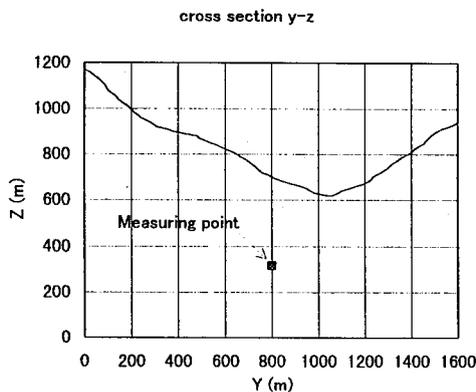
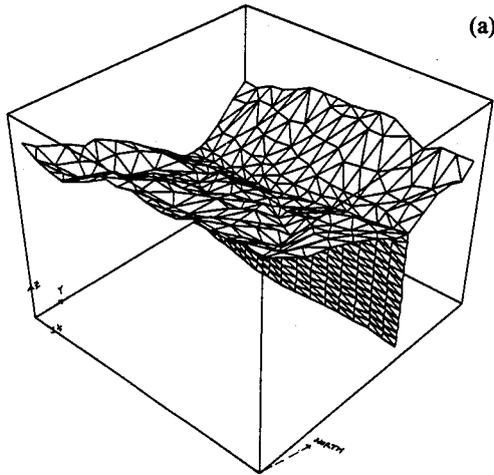


Fig.1 (a) Numerical model in which the surface boundary is divided into FSM elements and fault is divided into DDM joint elements, (b) Location of measuring point.

(3) 応力測定値からの広域応力場の算定手順

栗山らは間接法による境界要素法解析手法の一つとして、独特の仮想応力法解析システムを開発した³⁾。この手法には、数値積分は一切行われずにすべての積分が解析的に行われるという特徴があり、したがって、解析の精度は高い。これを用いて地形の影響を受けた浅所の応力分布を求める。地表境界の(応力測定点への影響に関して)十分に広いある領域を N 個の角形面要素に分割し、各要素に対して3成分すなわち全境界に対して3個の仮想応力成分を求める。

いったん N 個の仮想応力成分が決まると、任意の点における応力状態を求めることができる³⁾。

いま広域応力場が次式で与えられることにする。

$$\begin{aligned} \sigma_{x0} &= k_x \rho g z, & \sigma_{y0} &= k_y \rho g z, & \sigma_{z0} &= k_z \rho g z \\ \tau_{xy0} &= k_{xy} \rho g z, & \tau_{yz0} &= k_{yz} \rho g z, & \tau_{zx0} &= k_{zx} \rho g z \end{aligned} \quad (2)$$

もし関係する領域の岩盤が均質等方の弾性体であると仮定すれば広域応力場は以下の手順により求めることができる。まず、次の6通りに設定された初期応力場のそれぞれに対して、数値解析により、測定点の応力場を求め

ることができる。

$$\begin{aligned} &\{\rho g z, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, \rho g z, 0, 0, 0, 0\} \\ &\{0, 0, \rho g z, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, \rho g z, 0, 0\} \\ &\{0, 0, 0, 0, \rho g z, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, \rho g z\} \end{aligned} \quad (3)$$

つぎに、広域応力場の6つの成分を表わす係数 k_x, \dots, k_{zx} は、次の方程式を解いて求められる。

$$\sigma = Ak \quad (4)$$

$$\sigma = \left\{ (\sigma_{xa})_m, (\sigma_{ya})_m, (\sigma_{za})_m, (\tau_{xya})_m, (\tau_{yza})_m, (\tau_{zxa})_m \right\}^T$$

$$k = \{k_x, k_y, k_z, k_{xy}, k_{yz}, k_{zx}\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} (\sigma_{xa})_x & (\sigma_{xa})_y & (\sigma_{xa})_z & (\sigma_{xa})_{xy} & (\sigma_{xa})_{yz} & (\sigma_{xa})_{zx} \\ (\sigma_{ya})_x & (\sigma_{ya})_y & (\sigma_{ya})_z & (\sigma_{ya})_{xy} & (\sigma_{ya})_{yz} & (\sigma_{ya})_{zx} \\ (\sigma_{za})_x & (\sigma_{za})_y & (\sigma_{za})_z & (\sigma_{za})_{xy} & (\sigma_{za})_{yz} & (\sigma_{za})_{zx} \\ (\tau_{xya})_x & (\tau_{xya})_y & (\tau_{xya})_z & (\tau_{xya})_{xy} & (\tau_{xya})_{yz} & (\tau_{xya})_{zx} \\ (\tau_{yza})_x & (\tau_{yza})_y & (\tau_{yza})_z & (\tau_{yza})_{xy} & (\tau_{yza})_{yz} & (\tau_{yza})_{zx} \\ (\tau_{zxa})_x & (\tau_{zxa})_y & (\tau_{zxa})_z & (\tau_{zxa})_{xy} & (\tau_{zxa})_{yz} & (\tau_{zxa})_{zx} \end{bmatrix}$$

ただし、 $(\sigma_{xa})_m, (\sigma_{ya})_m, \dots, (\tau_{zxa})_m$ は測定点 a で測定された応力場の6成分を表わす。また A の6列の成分 $(\sigma_{xa})_x, \dots, (\sigma_{xa})_y, \dots, (\sigma_{xa})_z, \dots, (\sigma_{xa})_{xy}, \dots, (\sigma_{xa})_{yz}, \dots, (\sigma_{xa})_{zx}, \dots$ はさきに設定された6つの初期応力場 $\{\rho g z, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, \rho g z, 0, 0, 0, 0\}, \dots, \{0, 0, 0, 0, 0, \rho g z\}$ に対して計算された測定点の各応力成分である。

Table 1 The measured stress state

Stress components measured (MPa)	Over burden pressure calculated (MPa)
$\sigma_N = 17.50 \pm 0.98$	$\rho g h = 10.37$
$\sigma_W = 15.91 \pm 0.61$	
$\sigma_Z = 14.88 \pm 3.76$	
$\tau_{NW} = -0.19 \pm 0.65$	
$\tau_{WZ} = -0.40 \pm 1.31$	
$\tau_{ZN} = -0.24 \pm 0.85$	

(4) 茂住鉱周辺の広域応力場

Fig. 1 は3角形面要素に分割された測定点上部の地表境界面を表わす。広域応力場の決定に際しては2.(3)の手順に従うものとし、茂住祐延断層の存在をひとまず無視した。また、岩盤の均質等方弾性を仮定し、 $\rho g = 27.0 \text{ kN/m}^3$ が一様に分布するものとした。

まず、(4)式の左辺に表1の測定値を座標変換(NWZ $\rightarrow x y z$)したものを代入し2.(3)で設定されたものと同じ6つの初期応力場に対して求められた A マトリックスを(4)式の右辺に代入して方程式を構築した。つぎにこの方程式を解いて広域応力場係数ベクトル k を求めた。求められた k の値を示すと Table2 のようである。Table2 に

は、広域応力場を(1)式で与えられるものとして測点応力場を計算した結果と、測定値から計算された広域応力場をもとにして計算された測点応力場が示されている。これらの測点応力場を比較すると、初期応力場を(1)式に仮定した場合には水平応力成分が実際の応力成分の1/3程度になることがわかる。

Table2 Tectonic stress factors calculated

Stress Factors (ρ g z)	Measuring point stress (MPa)	
	from k values	from expression(1)
$k_x = 0.632$	$\sigma_x = 16.31$	5.63
$k_y = 0.587$	$\sigma_y = 17.09$	6.92
$k_z = 0.955$	$\sigma_z = 14.89$	15.21
$k_{xy} = 0.011$	$\tau_{xy} = 0.72$	0.18
$k_{yz} = 0.056$	$\tau_{yz} = -0.38$	-1.95
$k_{zx} = -0.036$	$\tau_{zx} = 0.27$	0.84

2. 2 断層特性の把握 (FSM-DDM による静弾性解析)

(1) ジョイント要素 (変位くい違い要素)

断層のように厚みを有する不連続層を表現するものとして、Fig. 2に示すようなジョイント要素を導入する。

すなわち、仮想応力 (応力不連続) や変位くい違い (変位不連続) によって誘起される応力に対するジョイント要素の変形を考えるのに、不連続の性質を性格づけるものとして、垂直剛性 $K_n = E_0/h$ とせん断剛性 $K_s = G_0/h$ を有するスプリングを変位くい違い要素のプラス面とマイナス面に挿入する。ただし h は不連続層の厚みであり、 E_0 と G_0 はそれを構成する物質のヤング率と剛性率である。このように、不連続層を構成する物質の挙動が線型弾性であるとするれば、ジョイント要素に作用する垂直応力とせん断応力は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zj} \\ \tau_{yzj} \\ \tau_{zxj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_n & 0 & 0 \\ 0 & -K_s & 0 \\ 0 & 0 & -K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{zj} \\ X_{yj} \\ X_{xj} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

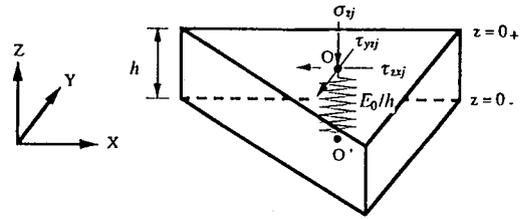
ここに $K_n = E_0/h$, $K_s = G_0/h$,

いま、全要素数 N のうち地表境界面が M 個の (一様分布の) 仮想応力要素に分割され、不連続層が $N-M$ 個の (一様分布の) 変位くい違い要素に分割されているものとするれば、各要素に誘起される応力は次式で表わされる³⁾。

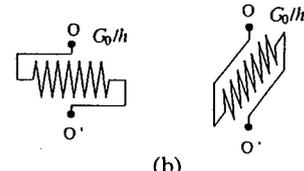
$$\begin{Bmatrix} -\sigma_{z0j} \\ -\tau_{yz0j} \\ -\tau_{zx0j} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N [T_{ji}] [S_{ji}] \begin{Bmatrix} X_{zi} \\ X_{yi} \\ X_{xi} \end{Bmatrix} \quad (1 \leq j \leq M) \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N [T_{ji}] [S_{ji}] \begin{Bmatrix} X_{zj} \\ X_{yj} \\ X_{xj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{zj} \\ X_{yj} \\ X_{xj} \end{Bmatrix} \quad (M+1 \leq j \leq N) \quad (7)$$

ここに、 $\{X_{zj}, X_{yj}, X_{xj}\}^T$ は $1 \leq j \leq M$ に対しては仮想応力成分 $\{P_{zi}, P_{yi}, P_{xi}\}^T$ であり、 $M+1 \leq j \leq N$ に対しては変位くい違い成分 $\{D_{zi}, D_{yi}, D_{xi}\}^T$ である。



(a)



(b)

Fig.2 Representation of the j th joint element with stress in 3D. The springs shown in (b) are inserted between the point o and o' shown in (a).

(2) 断層のせん断剛性とそのまわりの応力分布との関係

(7) 式までを考慮に入れて、すなわち滑りや開口が生じないものとして解析を行った。この場合、もし応力分布が得られて (何点かで応力測定が実施されて) いれば、断層の物性 (K_n , K_s) と深さの関数としての地殻応力場を同時に決定することができる。しかし、ここでは先に断層がないとして決定された応力場を与え、かつ断層がある程度のせん断剛性を有すると仮定して解析した。Fig.3に解析結果を示す。Fig.1(a)に解析モデルを示す。

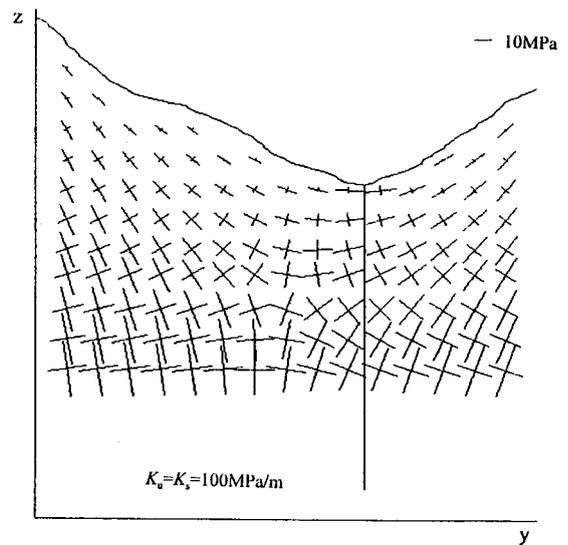


Fig.3 The calculated stress distribution in the vertical plane perpendicular to the fault ($K_n = K_s = 100\text{MPa/m}$)

3. 弾塑性問題

3.1 ジョイントの滑りと開口

(1) ジョイントの滑りのシミュレーション

滑りの条件は要素 j に対して次式で定義される

$$\tau_j = c_j - \sigma_j \tan \phi_j \quad (8)$$

ここに c_j は粘着力、 ϕ_j はせん断抵抗角、 σ_j は垂直応力成分、 τ_j は滑りだすときのせん断応力成分である。全せ

せん断応力成分 τ_{yzj} と τ_{zsj} の間に存在する最大のせん断応力 τ_{max} は次式で与えられる。

$$\tau_{maxj} = \tau_{yzj} \cos(\pi/2 - \theta_j) + \tau_{zsj} \cos \theta_j \quad (9)$$

$$\theta_j = \arctan(\tau_{yzj} / \tau_{zsj})$$

(8)式が滑りの条件であるとするれば、 τ_{maxj} は τ_j を越えることはできない。また垂直方向の変形が弾性を維持するものとするれば、要素 j が降伏したときに誘起される応力は次式で置き換えられる。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \tau_j^* |\sin \theta_j| - P_{yzj} \\ \pm \tau_j^* |\cos \theta_j| - P_{zsj} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N [T_{ji}] [S_{ji}] \begin{Bmatrix} X_{zi} \\ X_{yi} \\ X_{xi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{zj} \\ X_{yj} \\ X_{xj} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

(2) ジョイントの開口のシミュレーション

垂直応力 σ_{zj} が引張であって σ_{zj} がその引張強度 S_{yj} を越える場合にはジョイントも開口が生ずる。引張亀裂が生じた面に作用する全応力は垂直成分、せん断成分ともにゼロであるから、(7)式または(10)式は(11)式に置き換えなければならない。

$$\begin{Bmatrix} -P_{zj} \\ -P_{yzj} \\ -P_{zsj} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N [T_{ji}] [S_{ji}] \begin{Bmatrix} X_{zi} \\ X_{yi} \\ X_{xi} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

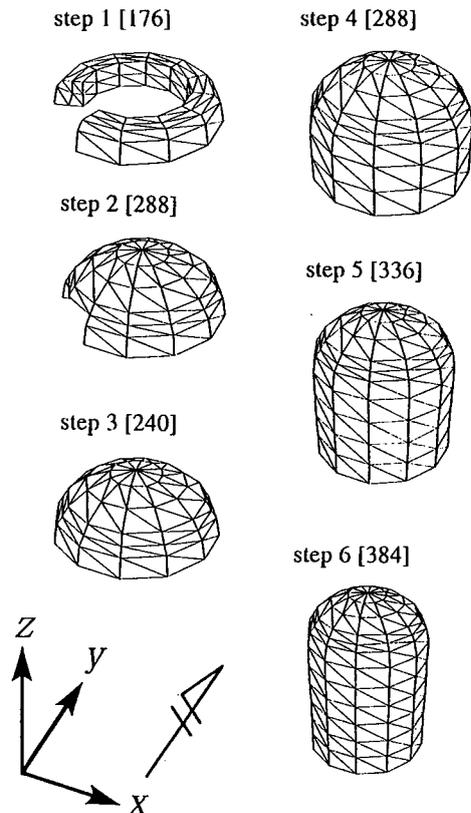


Fig.4 Numerical model of Super Kamiokande

3. 2 地下大空洞の安定性評価 (FSM-DDM による弾塑性解析)

岐阜県にある神岡鉱山の茂住鉱で地下ドーム (Super Kamiokande) 開削を予測解析の対象とした。解析に供したモデルを Fig.4 に示す。

$E_0/h = G_0/h = 10 \text{ Pa/m}$ とした解析結果と測定データの比較を Fig.5 に示す。データはジョイントとを横切る位置に配置されている地中変位計 No.5 のものである。Fig.5 より、滑りや開口を考慮した解析結果が地中内変位の傾向をよりよく表わしていることがわかる。

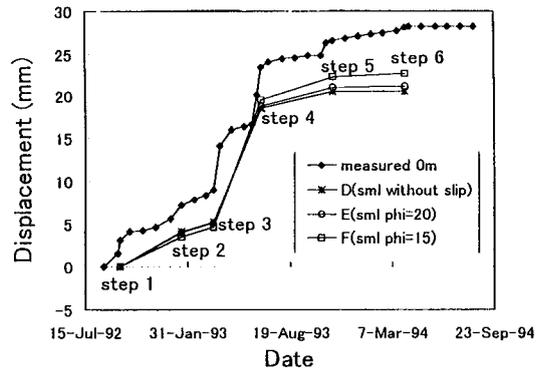


Fig.5 Comparison of the displacements at the point, GE no.5.

3. 3 大残壁の安定性評価 (FSM-DDM による弾塑性解析)

埼玉県にある武甲山を予測解析の対象とした。地表境界を FSM 要素に分割し、地層境界を DDM ジョイント要素に分割したモデルを Fig.6 に示す。解析結果を Fig.7 に示す。この図から、地殻応力場が残壁の安定性に与える影響の大きいことがわかる。

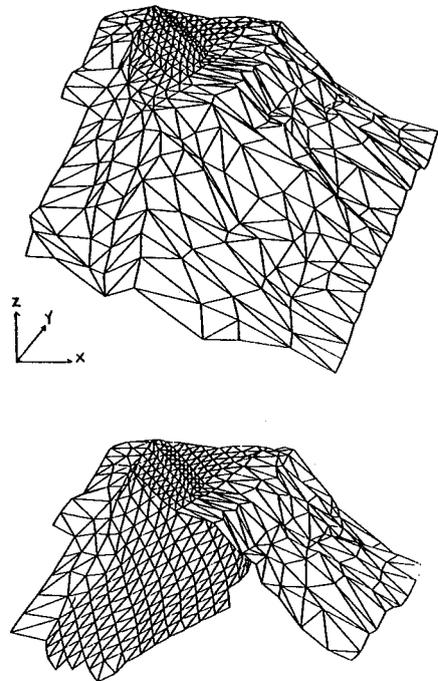


Fig.6 Numerical model of Buko Mine

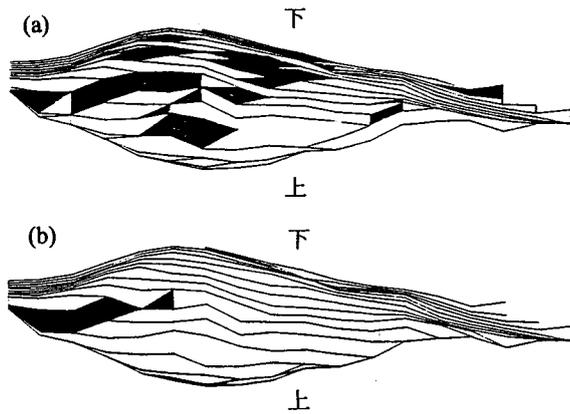


Fig.7 The area on the geological boundary, where the calculated safety factors are smaller than 1.2,
 (a) $\sigma_x = \sigma_y = 0.6\rho g z$,
 (b) $\sigma_x = \sigma_y = \nu/(1-\nu)\rho g z$, $\nu = 0.25$

4. 非定常熱伝導解析 (数値積分/特殊な近似積分)

4.1 目的

本研究は最終的に高温岩体発電の出力と寿命の予測のための3次元数値解析システムを構成する一つのサブシステムの開発を目的としているものである⁵⁾。

高精度化と高速化を目指して、境界要素法の直接解析のTIME INTEGRAL法とSTEP WISE法の二つの方法を用いた。

4.2 3次元非定常熱伝導問題の離散化方程式

熱拡散率(温度伝導率)を k 、熱源を h とする等方かつ均質な特性を持つ物体 Ω 内の非定常熱伝導方程式は(12)式で、またこれに対応する3次元問題の基本解は(13)式で与えられる^{6) 7)}。

$$k\Delta u(p, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} u(p, \tau) + h(p, \tau) = 0 \quad (12)$$

$$G(p, t, p', \tau) = \left\{ \frac{1}{4k\pi(t-\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{-|p-p'|^2}{4k(t-\tau)} \right\} \quad (13)$$

これらの式およびGreen定理により積分方程式を導くことができ、それを離散化方程式として表わすことができる。

4.3 三角形上での面積分についての処理

積分領域において特異性がない関数に対しては、Gaussの数値積分法で精度よく計算できる⁸⁾。ところで、 u^* は特異性がないものの、時間 τ が大きくなると $|p-p'|$ の増加にともない急激に値が小さくなる特徴がある。そのため、通常のGauss数値積分法を用いて計算を行うとでたらめな値になる。精度よく積分するための次の積分法を考えた。

(1) 自分自身上での積分

$$R_{\min} \geq \sqrt{-\ln \varepsilon / T} \quad (14)$$

を満足する場合、三角形上での積分を次式で表わされる円上での積分で近似する (Fig.8)。

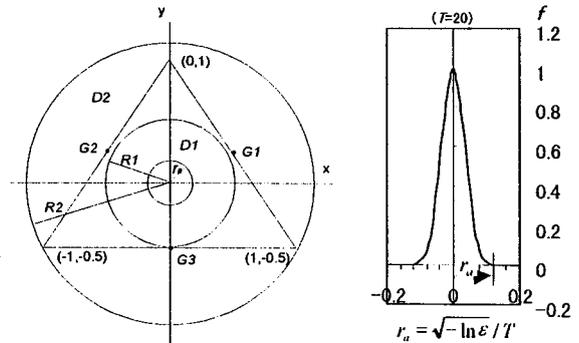


Fig.8 Approximate integration over triangular of self-element.

$$\iint_{\Delta} e^{-|p-p'|^2 T^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{\min}} r e^{-r^2 T^2} dr d\theta \quad (15)$$

ここに、 R_{\min} : 計算点P(三角形の重心)は三つの辺へ最小距離。T : $T = \{4k(t-\tau)\}^{-1/2}$ 。ε : 精度条件。

(2) 他三角形上での積分

各境界要素を十分に細かく分割し、おのおのにGaussの数値積分を適用する。

4.4 球かを有する無限体内の熱伝導問題

無限体内の半径Rの球かに対して、初期温度を $u_0 = T_0$ とし、表面上での境界条件を0とする。時刻 $t = 0$ からの任意時刻 t_m における無限固体内部の温度分布を求める。

(1) 問題の厳密解

上述の球かにおける3次元非定常熱伝導方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u & (R < r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \infty, t > 0) \\ u(r, 0) = T_0 & (R \leq r < \infty) \\ u(R, t) = 0 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (16)$$

(16)式を極座標で表わし、 $v(r, t) = ru(r, t)$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} & (R < r < \infty, t > 0) \\ u(r, 0) = r T_0 & (R \leq r < \infty) \\ u(R, t) = 0 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (17)$$

となる。

$w(r, t) = v(R+r, t)$ とおき、フーリエ変換を用いることにより、

$$v(r,t) = T_0(r-R+R \times \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{Kt}}\right)) \quad (r > R, t > 0)$$

を得る。
ただし、 erf は誤差関数

$$\operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{Kt}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-R}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

である。元の3次元非定常熱伝導方程式の解 $u(r,t)$ は

$$u(r,t) = \frac{1}{r} v(r,t) = \frac{1}{r} T_0 \left\{ r-R+R \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{Kt}}\right) \right\} \quad (R \leq r < \infty, t > 0) \quad (18)$$

となる。

(2) TIME INTEGRAL 法による数値解析

この問題では熱源がなく、初期温度 $u_0 = T_0$ 、境界条件 $u(s,\tau) = 0$ であるので、(12)、(13)式は体積積分を必要としない方法に変換でき、非常に効率よく計算できる。時間要素数40、境界要素数264として解析した結果と厳密解との比較をFig.9に示す。

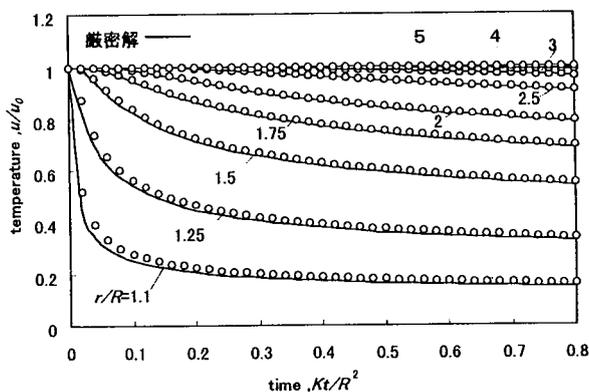


Fig.9 The calculated variation of temperature distribution around the spherical opening

5. 結論

地層科学研究における静弾性問題／逆問題、弾塑性問題に供すべく、数値積分ではなく解析的積分による高精度の3次元境界要素法解析コードを開発して、それぞれ実際の問題に適用した。また、地層科学研究における移流拡散問題に供すべく特殊な近似積分を導入した境界要素法による高精度の3次元非定常熱伝導解析コードを開発し、これを用いた解析を行って厳密解と比較した。静弾性問題／逆問題、弾塑性問題への適用結果は、計測結果との比較などから、開発された解析システムの有用性を示唆している。また、移流拡散問題への適用結果は、開発された解析システムが高精度の解を与えることを示唆している。

参考文献

1. Serata,S., Sakuma,S., Kikuchi,S. and Mizuta,Y., Double Fracture Method of In Situ Stress Measurement in Brittle Rock, Rock Mechanics and Rock Engineering . 25, 89-108, 1992.
2. Mizuta,Y., Sano,O., Ogino,S. and Katoh,H., Three Dimensional Stress Determination by Hydraulic Fracturing for Underground Excavation Design, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. abstr. Vol.24, No.1, 1987.
3. Kuriyama,K., et al, Three-dimensional Elastic Analysis by the Boundary Element Method with Analytical Integrations over Triangular Leaf Elements, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol.32, No.1, 1995.
4. 茂住洋史・栗山憲・柳之内浩・水田義明：ジョイントを考慮した3次元境界要素法解析手法の開発と地下空間開削事例への適用、資源と素材、Vol.110,p.953-958(1994)
5. 水田義明、岩盤開発設計、アイピーシー、1996
6. H. S. Carslaw and j. c. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press. Oxford, 1986
7. 神谷紀生ら（共訳）、境界要素法の基礎と応用、培風館、1982
8. G. R. Cowper, Gaussian Quadrature Formulas for Triangles, Int.J.Num.Mech.Eng.V7(3),pp405-408(1973)