解析的積分と、岩盤力学における３次元境界要素法

山口大学工学部　水田　義明
山口大学教養部　栗山　憲
日新製鋼（株）　渡部　智一

１．はじめに

岩盤に空洞を掘削し、地下空間を安全に開発するためには、精密な応力・歪み解析を必要とする。応力と歪みを数値的に求める解析法としては、有限要素法と境界要素法がよく用いられている。境界要素法では、問題とする偏微分方程式（岩盤力学では Navier の方程式）を、対象とする領域の境界上での積分方程式に変換し、さらにそれを離散化することにより解を求めている。境界上での方程式に変換するため、問題が対象領域より１次元低くなるため、有限要素法に比べ計算時間が少なくなり、近年岩盤力学の分野でもよく使われるようになってきている。

本講演では、境界要素法の一種である変位不連続法と仮想応力法の３次元への拡張について報告する。特に、そのなかで問題になる特異性をもった関数の積分について述べる。

２．静弾性理論について

岩盤を均質で等方的な弾性体とみなしたとき、変位を $u_i(i=1,2,3)$ とすると基本となる方程式は Navier方程式とよばれる次の方程式である。

$$Gu_{i,jj}+\frac{G}{1-2\nu}u_{j,ji}+b_i=0 \quad (i,j=1,2,3) \qquad (1)$$

ただし、G は剛性率、ν はポアッソン比、b_i は体積力である。

また、変位と歪み、応力との関係は次の式で与えられる。

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{\alpha\alpha}\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (i,j=1,2,3) \qquad (2)$$

したがって、解析の対象となる岩盤の応力・歪み・変位を求めるには、岩盤内では Navier 方程式を満たし、岩盤境界では問題ごとにさだまる応力または変位にたいする境界条件をみたす未知関数 $u_i(i=1,2,3)$を求め、それと変位と歪み、応力との関係を用いて求めればよい。

３．変位不連続法について

１）アルゴリズム

S.L.Crouch は変位不連続法を、平面歪み問題など２次元の場合において研究した[1]。

またそれは水田、李により以下のように３次元問題に拡張された[2]。

$$u_x=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[2(1-\nu)f_{,z}-zf_{,xx}]D_x-zf_{,xy}D_y -[(1-2\nu)f_{,x}+zf_{,xz}]D_z\}$$

$$u_y=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{-zf_{,xy}D_x+[2(1-\nu)f_{,z}-zf_{yy}]D_y -[(1-2\nu)f_{,y}f_{,yz}]D_z\} \qquad (3)$$

$$u_z=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[(1-2\nu)f_{,x}-zf_{xz}]D_x+[(1-2\nu)f_{,y} -zf_{,yz}]D_y+[(1-2\nu)f_{,z}f_{,zz}]D_z\}$$

ただし、関数 f(x,y,z) は

$$f(x,y,z)=\iint_D \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}\,d\xi\, d\eta \qquad (4)$$

とおいた。

すると、変位ベクトル (u_x,u_y,u_z) は、領域$R^3\setminus D$において Navier方程式をみたす。さらに Dx, Dy, Dzは

$$Dx=\lim_{z\to 0^-}u_x(x,y,z)-\lim_{z\to 0^+}u_x(x,y,z)$$

$$Dy=\lim_{z\to 0^-}u_y(x,y,z)-\lim_{z\to 0^+}u_y(x,y,z)$$

$$Dz=\lim_{z\to 0^-}u_z(x,y,z)-\lim_{z\to 0^+}u_z(x,y,z)$$

$$(x,y,0) \quad D$$

となる。

したがって 、Navier 方程式の解（３）は、物理的にはｘｙ－平面上の領域Ｄにおいて変位不連続 Dx,Dy,Dz が存在するとき、それによってひきおこされる変位を意味する。

このとき応力は（２）により

$$\sigma xx=\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\{[2f_{,xz}-zf_{,xxx}]D_x+[2\nu f_{,yz} -zf_{,xxx}]D_y+[f_{,zz}+(1-2\nu)f_{,yy}-zf_{,xxz}]D_z\}$$

$$\sigma yy=\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\{[2\nu f_{,xz}-zf_{xyy}]D_x+[2f_{,yz} -zf_{,yyy}]D_y+[f_{,zz}+(1-2\nu)f_{,xx}-zf_{,yyz}]D_z\}$$

$$\sigma zz=\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\{-zf_{,xzz}D_x-zf_{,yzz}D_y +[f_{,zz}-zf_{,zzz}]D_z\} \qquad (5)$$

$$\sigma xy=\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\{[(1-\nu)f_{,yz}-zf_{,xxy}]D_x +[(1-\nu)f_{,xz}-zf_{,xyy}]D_y-[(1-2\nu)f_{,xy}+zf_{,xyz}]D_z$$

$$\sigma_{yz}=\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\{-[\nu f_{,xy}+zf_{,xyz}]D_x$$
$$+[f_{,zz}+\nu f_{,xx}-zf_{,yyz}]D_y-zf_{,yzz}D_z\}$$
$$\sigma_{zx}=\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\{[f_{,zz}+\nu f_{,yy}-zf_{,xxz}]D_x$$
$$-[\nu f_{,xy}+zf_{,xyz}]D_y-zf_{,xzz}D_z\}$$

となる。

この“基本的な”解（３）を用いて、３次元の一般の領域Ｖにおける Navier 方程式の近似解を求める。
領域Ｖの境界ＢをＮ個の要素Ｂｉ（i=1,2,.,N）に分割し、各要素Ｂｉにおいて変位不連続 Dxi, Dyi, Dzi が存在したとする。ただし、Dxi, Dyi, Dzi は要素Ｂｉ における局所座標系による表示とする。

領域Ｖの各点での変位、応力は各要素における変位不連続によってひきおこされる変位、応力の重ね合わせであるから、全体座標系による表示は（３）、（５）を用いて次のようになる。

$$\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{N}(L_i)(U_i)\begin{pmatrix}D_{xi}\\D_{yi}\\D_{zi}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\sigma_{xy}\\\sigma_{yz}\\\sigma_{zx}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{N}(T_i)(S_i)\begin{pmatrix}D_{xi}\\D_{yi}\\D_{zi}\end{pmatrix}\qquad(6)$$

ただし、(U_i)、(S_i) は式（３）、（５）に現れる行列であり、(L_i)、(T_i) はそれぞれ変位ベクトルおよび応力テンソルの、第i要素 B_i の局所座標系と全体座標系との座標変換にともなう変換行列である。

境界条件についても同様にして議論できる。すなわち、第j要素 B_j の点における変位および応力を、第j要素 B_j の局所座標系により表示すると

$$\begin{pmatrix}u_{xj}\\u_{yj}\\u_{zj}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{N}(L_{ij})(U_{ij})\begin{pmatrix}D_{xi}\\D_{yi}\\D_{zi}\end{pmatrix}\qquad(j=1,2,...,N)$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xxj}\\\sigma_{yyj}\\\sigma_{zzj}\\\sigma_{xyj}\\\sigma_{yzj}\\\sigma_{zxj}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{N}(T_{ij})(S_{ij})\begin{pmatrix}D_{xi}\\D_{yi}\\D_{zi}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,...,N)\qquad(7)$$

となる。

ただし、(U_{ij})、(S_{ij}) は第i要素の第j要素上の点に与える影響を、第i要素の局所座標系で表したもので式（３）、（５）に現れる行列であり、(L_{ij})、(T_{ij}) は変位ベクトルおよび応力テンソルの、第i要素の局所座標系と第j要素の局所座標系との座標変換にともなう変換行列である。３Ｎ個の未知数 D_{xi}、D_{yi}、D_{zi}(i=1,2,.,N) にかんする連立１次方程式（７）の解を求め、式（６）によって変位、応力を得ればそれが近似解となる。

2）解析的積分について

変位不連続法によって近似解を求めるには、以下のことに注意する必要がある。

まず積分（４）をできるだけ正確に求めなければならない。それは積分（４）が連立１次方程式（７）の係数に関連しており、そのため近似解の精密度に大きな影響をもっているからである。しかも、要素Ｂｉにおける変位不連続によってＢｉ自身にひきおこされる影響も必要とするが、その場合には被積分関数は特異性をもっている。

つぎに、境界を適切に分割するには、少なくとも３角形への分割を必要としている。したがって、積分範囲Dが３角形の場合の、積分（４）を求めなければならない。

積分範囲Dがｘ軸、ｙ軸に平行な長方形の場合については、すでに水田、李により解析的に得られている[2]。Dが３角形の場合の積分を、Stokes の定理を使って解析的に求めることにする[3]。

補題１　Dを反時計まわりに回る辺をCとする。このとき

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}\,d\xi\,d\eta=-\int_C \log(\eta+\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2})\,d\xi$$

補題２　ｘｙ－平面上の点 P_1（x_1、y_1）から点 P_2（x_2、y_2）へ向かう線分をCとする。このとき

$$\int_C \log(\eta+\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2})\,d\xi$$
$$=\frac{x_2-x_1}{|P_1P_2|}\int_A^B \log(\alpha t+\beta+\sqrt{t^2+\gamma})\,dt$$

$$\text{ただし、}\alpha=\frac{y_2-y_1}{|P_1P_2|},\quad \beta=\frac{(x_2-x_1)(x_2y_1-x_1y_2)}{|P_1P_2|^2}$$

$$\gamma=\frac{(x^1y^2-x^2y^1)^2}{|P_1P_2|^2}+z^2,\quad A=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}{|P_1P_2|}$$

$$B=\frac{\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}{|P_1P_2|}$$

Ｏはｘｙ－平面上の原点

補題３　補題２と同じ記号とするとき、

$$\int_C \log(\eta+\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2})\,d\xi$$
$$=-(x_2-x_1)+\{x_2\log(y_2+|PP_2|)-x_1\log(y_1+|PP_1|)\}$$
$$+\tau(x_2y_1-x_1y_2)\frac{x_2y_1-x_1y_2}{|P_1P_2|}\{\log(B+|PP_2|)$$
$$-\log(A+|PP_1|)\}+2\tau(z)\tau(x_2-x_1)z$$
$$\cdot\left[\tan^{-1}\{\frac{1}{z}\frac{|P_1P_2|}{x_2-x_1}(y_2+B+(\alpha+1)|PP_2|)\}\right.$$
$$\left.-\tan^{-1}\{\frac{1}{z}\frac{|P_1P_2|}{x_2-x_1}(y_1+A+(\alpha+1)|PP_1|)\}\right]$$

ただし、Ｐは点（ｘ、ｙ、ｚ）

補題１から補題３までを使って、積分（４）はつぎのようになる。

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{3}\frac{M_i}{L_i}\{\log(B_i+r_{i+1})-\log(A_i+r_i)\}$$

$$-2\tau(z)\sum_{i=1}^{3}\tau(x_{i+1}-x_i)z\{\tan^{-1}(\frac{D_i}{z})-\tan^{-1}(\frac{C_i}{z})\} \tag{8}$$

ここで、添字の4は1をあらわし、

$$\tau(t)=\begin{cases}1 & (t\neq 0)\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

$r_i=|PP_i|$, $r_{i+1}=|PP_{i+1}|$, $L_i=|P_iP_{i+1}|$.

$|PP_i|=[(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+z^2)]^{1/2}$,

$|P_iP_{i+1}|=[(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2+z^2]^{1/2}$,

$M_i=(y_i-y_{i+1})x+(x_{i+1}-x_i)y+(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)$,

$$A_i=\frac{1}{L_i}[(x_i-x_{i+1})+(y_i-y_{i+1})y+x_i(x_{i+1}-x_i)+y_i(y_{i+1}-y_i)]$$

$$B_i=\frac{1}{L_i}[(x_i-x_{i+1})+(y_i-y_{i+1})y+x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)+y_{i+1}(y_{i+1}-y_i)]$$

$$D_i=\frac{L_i}{|x_{i+1}-x_i|}\{y_{i+1}-y+B_i+(\frac{y_{i+1}-y_i}{L_i}+1)r_{i+1}\}$$

$$C_i=\frac{L_i}{|x_{i+1}-x_i|}\{y_i-y+A_i+(\frac{y_{i+1}-y_i}{L_i}+1)r_i\}$$

である。

4．仮想応力法について

1）基礎

仮想応力法は Kelvin 解を基礎にした境界要素法であり、岩盤力学以外でもよく用いられている。変位を

$$u_{ij}=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\{(3-4\nu)\frac{1}{r}\delta_{ij}-(\frac{1}{r})x_j\}$$

$$=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\{(3-4\nu)\frac{1}{r}\delta_{ij}+\frac{x_ix_j}{r^3}\} \quad (i,j=1,2,3) \tag{9}$$

とおく。ただし、δ_{ij} はクロネッカーのδ記号である。

Dirac のデルタ関数をδとおくとき、$\triangle(1/r)=-4\pi\delta$ と、$x_k\delta_{,i}=-\delta_{ki}\delta$ であることに注意すると

$$Gu_{ik,jj}+\frac{G}{(1-2\nu)}u_{jk,ji}+\delta_{ik}\delta=0 \quad (i,k=1,2,3) \tag{10}$$

となる。すなわち、Navier方程式の基本解であることがわかり、これを Kelvin 解という。

式（10）より u_{ij} は物理的には、原点において x_j 軸の正の向きに単位集中荷重がかかっているときの変位ベクトルの x_i 成分を意味する。

また、変位ベクトルが（u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}）のときの応力 $\sigma^{(k)}_{ij}$ は（10）式と（2）式より

$$\sigma^{(k)}_{ij}=\frac{1}{8\pi(1-2\nu)}\times\{(1-2\nu)[(\frac{1}{r})_{,i}\delta_{jk}+(\frac{1}{r})_{,j}\delta_{ki}-(\frac{1}{r})_{,k}\delta_{ij}]+[(\frac{1}{r})_{,k}\delta_{ij}-(\frac{1}{r})_{,ij}x_k]\}$$

$$=-\frac{1}{8\pi(1-2\nu)}\{(1-2\nu)[x_i\delta_{jk}+x_j\delta_{ki}-x_k\delta_{ij}]\frac{1}{r^3}+3\frac{x_ix_jx_k}{r^5}\} \quad (i,j,k=1,2,3) \tag{11}$$

となる。

$$\text{また}\quad u_i=\sum_{j=1}^{3}u_{ij}p_j \quad (i=1,2,3) \tag{12}$$

とおくと、

$$G\triangle u_i+\frac{G}{1-2\nu}u_{j,ji}+P_i\delta=0 \quad (i=1,2,3)$$

となる。

この場合は、物理的には原点において荷重（P_1, P_2, P_3）がかかったときの変位を意味する。このときの応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij}=\sum_{K=1}^{3}\sigma^{(k)}_{ij}P_k$$ と式（11）より

求めることができる。

具体的に書き下すと，変位と応力は以下の式になる。

$$u_x=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\{[(3-4\nu)\frac{1}{r}+\frac{x^2}{r^3}]p_x+\frac{xy}{r^3}P_y+\frac{xz}{r^3}p_z\}$$

$$u_y=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\{[(3-4\nu)\frac{1}{r}+\frac{y^2}{r^3}]p_y+\frac{xy}{r^3}P_x+\frac{xy}{r^3}p_z\}$$

$$u_z=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\{(3-4\nu)\frac{1}{r}+\frac{z^2}{r^3}]p_z+\frac{xz}{r^3}P_x+\frac{yz}{r^3}p_y\}$$

$$\sigma_{xx}=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[(1-2\nu)\frac{x}{r^3}+3\frac{x^3}{r^5}]p_x+[-(1-2\nu)\frac{y}{r^3}+3\frac{x^2y}{r^5}]p_y+[-(1-2\nu)\frac{z}{r^3}+3\frac{x^2z}{r^5}]p_z\}$$

$$\sigma_{yy}=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[-(1-2\nu)\frac{x}{r^3}+3\frac{y^2x}{r^5}]p_x+[(1-2\nu)\frac{y}{r^3}+3\frac{y^3}{r^5}]p_y$$

$$+[-(1-2\nu)\frac{z}{r^3}+3\frac{y^2z}{r^5}]p_z\}$$

$$\sigma_{zz}=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[-(1-2\nu)\frac{x}{r^3}+3\frac{z^2x}{r^5}]p_x$$

$$+[-(1-2\nu)\frac{y}{r^3}+3\frac{yz^2}{r^5}]p_y$$

$$+[(1-2\nu)\frac{z}{r^3}+3\frac{z^3}{r^5}]p_z\}$$

$$\sigma_{xy}=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[(1-2\nu)\frac{y}{r^3}+3\frac{x^2y}{r^5}]p_x$$

$$+[(1-2\nu)\frac{x}{r^3}+3\frac{xy^2}{r^5}]p_y+3\frac{xyz}{r^5}p_z\}$$

$$\sigma_{yz}=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{3\frac{xyz}{r^5}p_x+[(1-2\nu)\frac{z}{r^3}+3\frac{y^2z}{r^5}]p_y$$

$$+[(1-2\nu)\frac{y}{r^3}+3\frac{yz^2}{r^5}]p_z\}$$

$$\sigma_{zx}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{[(1-2\nu)\frac{z}{r^3}+3\frac{x^2z}{r^5}]p_x+3\frac{xyz}{r^5}p_y$$

$$+[(1-2\nu)\frac{x}{r^3}+3\frac{xz^2}{r^5}]p_z\}$$

(13)

2）アルゴリズム

xy一平面上ん領域Dに，一定の荷重（p_x, p_y, p_z）がかかったとする。このとき，点（x,y,z）にひきおこされる変位・応力は，（１３）式のx,yをx－ξ，y－ηでおきかえD上でξ，ηに関して積分することによって得られる。

そのときの変位(u_x, u_y, u_z)は領域$R^3\setminus D$において Navierの方程式をみたす。

変位，応力の一部を具体的に書き下すと

$$u_x(x,y,z)=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\{[(3-4\nu)f(x,y,z)$$

$$+g(x,y,z)]p_x+h(x,y,z)p_y+k(x,y,z)p_z\} \quad (14)$$

である。ここで

$$f(x,y,z)=\iint_D\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}d\xi d\eta$$

$$g(x,y,z)=\iint_D\frac{(x-\xi)^2}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta$$

$$h(x,y,z)=\iint_D\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta$$

$$k(x,y,z)=\iint_D\frac{(x-\xi)z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta$$

である。

変位不連続法の場合と同様にして，Dが３角形のときの（１４）式をふくむ解を用いて，３次元の領域Vにおける Navier 方程式の近似解を求めることができる。

そのなかにあらわれる積分は（４）の積分と同様にして，たとえば

$$g(x,y,z)=\iint_D\frac{(x-\xi)^2}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta$$

$$=-2\sum_{i=1}^{3}\frac{y_{i+1}-y_i}{L_i}\{\log(V_{i+1}+B_i)-\log(V_i+A_i)\}$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\{\mathrm{sgn}(y_{i+1}-y)\log\left|\frac{r_{i+1}-|y_{i+1}-y_i|}{r_{i+1}-|y_{i+1}-y_i|}\right|$$

$$+\{\mathrm{sgn}(y_i-y)\log\left|\frac{r_{i+1}-|y_{i+1}-y_i|}{r_{i+1}-|y_{i+1}-y_i|}\right|\}$$

となる。

$$ただし，\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t>0\ のとき)\\ 0 & (t=0\ のとき)\\ -1 & (t<0\ のとき)\end{cases}$$

５．適用例

報告者たちは，変位不連続法，仮想応力法およびそれらの連成解析コードを開発している。それらをもちいた例についても報告する予定である[3)4)]。

参考文献

1．Crouch S.L. and Starfield A.M.,
Boundary Element Methods in Solid Mechanics
George Allen & Unwin, London, 1983

2．水田　義明、李　喜根,
変位不連続法による３次元弾性解析の適用例について．水曜会誌第２０巻，昭和５９年.

3．K.Kuriyama and Y.Mizuta,
Three-dimensional Elastic Analysis by the Displacement Discontinuity Method with Boundary Division into Triangular Leaf Elements.
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol.30, No.2, pp.111-123, 1993

4．渡部　智一,
不連続性岩盤に対する三次元境界要素法連成解析手法の開発.
平成４年度山口大学社会建設工学専攻修士論文