The 33rd Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2010)
Matsushiro, Nagano, Japan, Nov. 30–Dec. 3, 2010

一般化された skew information に関する不等式について, II
Some inequalities on generalized skew informations, II

柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi) *

Abstract— We give trace inequalities related to the uncertainty relation of Wigner-Yanase-Dyson skew information. These inequalities are two types of further generalizations of the uncertainty relation derived by author [12] which is an original generalization for the quantum uncertainty quantity excluding the classical mixture given by Luo [8].

Keywords— skew information, uncertainty relation, inequality

1　はじめに

Wigner-Yanase skew information は [10] で次のように定義された.

$$
\begin{aligned}
I_\rho(H) &= \frac{1}{2} Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2}, H\right]\right)^2\right] \\
&= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H]
\end{aligned}
$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 H の間の非可換性をあらわすある種の degree として考えられている. ここで $[X, Y] = XY - YX$ は commutator をあらわす.
またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$
\begin{aligned}
& I_{\rho,\alpha}(H) \\
=\ & \frac{1}{2} Tr[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] \\
=\ & Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H], \alpha \in [0, 1].
\end{aligned}
$$

ρ に関して $I_{\rho,\alpha}(H)$ は convex であることは E.H.Lieb in [7] によって証明されたことはよく知られている. 量子力学的には観測量 H は一般的には非有界作用素であるがこの論文では断らない限り $\mathbb{C}^n$ 上の有界線形作用素すなわち行列であると仮定する. この理由は数学的興味のためである. $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート行列全体を $M_{n,sa}$, 密度行列 (density matrices) 全体を $D_{n,1}$ とそれぞれあらわすものとする. Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の関係は [9] で研究されている. さらに Wigner-Yanase-Dyson skew information と uncertainty relation との関係は [5, 11] で研究されている. 我々は [11] で一般化された skew information を新たに定義し, ある種の uncertainty relation を導いた. また [12] では Luo [8] の結果の一般化を与えた. 第 2 章では Wigner-Yanase-Dyson skew information の様々な性質を議論する. 第 3 章と第 4 章で主定理を述べ第 5 章でその証明を与える.

* 〒 755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学 大学院 理工学研究科 応用数理科学分野 Division of Applied Mathematical Science, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, Ube, 755-8611 Japan. E-mail: yanagi@yamaguchi-u.ac.jp, This research was partially supported by the ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (C), 20540175

2　Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の間の関係を見ることにする. 量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 H を観測したときの期待値は $Tr[\rho H]$ であらわされる. また分散は次で定義される.

$$V_\rho(H) = Tr[\rho(H - Tr[\rho H]I)^2] = Tr[\rho H^2] - Tr[\rho H]^2.$$

ここで量子状態 ρ と 2 つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている.

$$V_\rho(A) V_\rho(B) \geq \frac{1}{4} |Tr[\rho[A, B]]|^2 \tag{2.1}$$

さらにより強い結果として Schrödinger によって次のように与えられた.

$$V_\rho(A) V_\rho(B) - |Cov_\rho(A, B)|^2 \geq \frac{1}{4} |Tr[\rho[A, B]]|^2,$$

ただし covariance は次で定義される;

$$Cov_\rho(A, B) = Tr[\rho(A - Tr[\rho A]I)(B - Tr[\rho B]I)].$$

しかし Wigner-Yanase skew information に対する次のような uncertainty relation については成り立たないことが知られている. ([9, 5, 11] を見よ)

$$I_\rho(A) I_\rho(B) \geq \frac{1}{4} |Tr[\rho[A, B]]|^2.$$

最近 S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性をあらわす次のような量 $U_\rho(H)$ を導入した.

$$U_\rho(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2}, \tag{2.2}$$

このとき　S.Luo は [8] において $U_\rho(H)$ に関する次のような uncertainty relation を得た.

$$U_\rho(A) U_\rho(B) \geq \frac{1}{4} |Tr[\rho[A, B]]|^2. \tag{2.3}$$

ここで次の関係に注意する.

$$0 \le I_\rho(H) \le U_\rho(H) \le V_\rho(H). \tag{2.4}$$

不等式 (2.3) は (2.4) の意味で不等式 (2.1) の精密化である. この章では不等式 (2.3) に対する one-parameter 拡張を考える.

Definition 2.1 $0 \le \alpha \le 1$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する.

$$\begin{aligned} & I_{\rho,\alpha}(H) \\ = \ & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] \\ = \ & Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] \end{aligned} \tag{2.5}$$

また関連して次の量も定義する.

$$\begin{aligned} & J_{\rho,\alpha}(H) \\ = \ & \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \\ = \ & Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0], \end{aligned} \tag{2.6}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は *anti-commutator* をあらわす.

次の関係が成り立つことは明らかである.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] \\ = \ & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] \end{aligned}$$

ところが次の関係に注意する.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \\ \ne \ & \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H\}\{\rho^{1-\alpha}, H\}]. \end{aligned}$$

このとき次の関係が成り立つ.

$$I_{\rho,\alpha}(H) \le I_\rho(H) \le J_\rho(H) \le J_{\rho,\alpha}(H). \tag{2.7}$$

なぜなら

$$Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H] \le Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H]$$

が成り立つからである. (例えば [1, 2] を見よ)
(2.2) の直接の一般化として次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2}, \tag{2.8}$$

このとき (2.7) の最初の不等式より次が成り立つ.

$$0 \le I_{\rho,\alpha}(H) \le U_{\rho,\alpha}(H) \le U_\rho(H). \tag{2.9}$$

また次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha}(H) J_{\rho,\alpha}(H)}.$$

このとき不等式 (2.4),(2.8),(2.9) より次の関係が成り立つことがわかる.

$$0 \le I_{\rho,\alpha}(H) \le I_\rho(H) \le U_\rho(H)$$

かつ

$$0 \le I_{\rho,\alpha}(H) \le U_{\rho,\alpha}(H) \le U_\rho(H).$$

我々の関心は不等式 (2.3) の直接の一般化である. そこで次の結果を得た.

Theorem 2.1 ([12]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \le \alpha \le 1$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha}(A) U_{\rho,\alpha}(B) \ge \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A, B]]|^2. \tag{2.10}$$

Theorem 2.1 を証明するためには次の 3 つの Lemma を用いればよい. スペクトル分解より ρ の eigenvectors からなる orthonormal basis を $\{\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n\}$ とする. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を対応する eigenvalues とする. ただし $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ で $\lambda_i \ge 0$ である. したがって ρ は次の表現をもつ.

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \tag{2.11}$$

Lemma 2.1

$$I_{\rho,\alpha}(H) = \sum_{i<j} (\lambda_i + \lambda_j - \lambda_i^\alpha \lambda_j^{1-\alpha} - \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^\alpha) |\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Lemma 2.2

$$J_{\rho,\alpha}(H) \ge \sum_{i<j} (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_i^\alpha \lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^\alpha) |\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Lemma 2.3 任意の $t > 0$ と任意の $0 \le \alpha \le 1$ に対して次の不等式が成り立つ*;*

$$(1-2\alpha)^2 (t-1)^2 - (t^\alpha - t^{1-\alpha})^2 \ge 0. \tag{2.12}$$

Remark 2.1 *(2.10)* において $\alpha = 1/2$ とおくことにより *(2.3)* が得られる. したがって *Theorem 2.1* は *Luo [8]* の結果の一般化であることがわかる.

3　一般化 (その 1)

この section では Theorem 2.1 の一般化の 1 つとして次の不等式を与える．つまり (2.3) の two-parameter extension (1) である．

Definition 3.1 $\alpha,\beta \geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
& I_{\rho,\alpha,\beta}(H) \\
= & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{\alpha},H_0])(i[\rho^{\beta},H_0])\rho^{1-\alpha-\beta}] \\
= & \frac{1}{2}\{Tr[\rho H_0^2]+Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0\rho^{1-\alpha-\beta}H_0]\} \\
& -\frac{1}{2}\{Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{1-\alpha}H_0]+Tr[\rho^{\beta}H_0\rho^{1-\beta}H_0]\}
\end{aligned}$$

また関連して次の量も定義する．

$$\begin{aligned}
& J_{\rho,\alpha,\beta}(H) \\
= & \frac{1}{2}Tr[\{\rho^{\alpha},H_0\}\{\rho^{\beta},H_0\}\rho^{1-\alpha-\beta}] \\
= & \frac{1}{2}\{Tr[\rho H_0^2]+Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0\rho^{1-\alpha-\beta}H_0]\} \\
& +\frac{1}{2}\{Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{1-\alpha}H_0]+Tr[\rho^{\beta}H_0\rho^{1-\beta}H_0]\},
\end{aligned}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X,Y\} = XY+YX$ は *anti-commutator* をあらわす．$\alpha+\beta=1$ のときは $I_{\rho,\alpha}(H) = I_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$, $J_{\rho,\alpha}(H) = J_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$ であることに注意する．また

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha,\beta}(H)J_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

と定義する．

Theorem 3.1 ρ が *invertible* のとき, $\alpha,\beta \geq 0$ が $\alpha+\beta \geq 1$ または $\alpha+\beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ．

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(A)U_{\rho,\alpha,\beta}(B) \geq \alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{3.1}$$

4　一般化 (その 2)

この section では Theorem 2.1 の一般化の 2 つ目として次の不等式を与える．つまり (2.3) の two-parameter extension (2) である．

Definition 4.1 $\alpha,\beta \geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された *Wigner-Yanase-Dyson skew information (2)* を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H) \\
= & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{\alpha},H_0])(i[\rho^{\beta},H_0])] \\
= & Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0^2]-Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{\beta}H_0]
\end{aligned}$$

また関連して次の量も定義する．

$$\begin{aligned}
& \tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H) \\
= & \frac{1}{2}Tr[\{\rho^{\alpha},H_0\}\{\rho^{\beta},H_0\}] \\
= & Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0^2]+Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{\beta}H_0]
\end{aligned}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X,Y\} = XY+YX$ は *anti-commutator* をあらわす．$\alpha+\beta=1$ のときは $I_{\rho,\alpha}(H) = \tilde{I}_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$, $J_{\rho,\alpha}(H) = \tilde{J}_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$ であることに注意する．また

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

と定義する．

Theorem 4.1 ρ が *invertible* のとき, $\alpha,\beta \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
& \tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(A)\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(B) \\
\geq & \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

5　Appendix

まず Theorem 3.1 の証明に必要な Lemma を述べよう．$f_{\alpha}(i,j) = \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}+\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha}$ とおく．また $h_{ij} = \langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle, a_{ij} = \langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle, b_{ij} = \langle\phi_i|B_0|\phi_j\rangle$ とおく．

Lemma 5.1

$$\begin{aligned}
& I_{\rho,\alpha,\beta}(H) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{i<j}\{\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j)-f_{\alpha}(i,j)-f_{\beta}(i,j)\}|h_{ij}|^2.
\end{aligned}$$

Lemma 5.2

$$\begin{aligned}
& J_{\rho,\alpha,\beta} \\
\geq & \frac{1}{2}\sum_{i<j}\{\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j)+f_{\alpha}(i,j)+f_{\beta}(i,j)\}|h_{ij}|^2.
\end{aligned}$$

Lemma 5.3 $t>0$ とする．$\alpha,\beta \geq 0$ が $\alpha+\beta \geq 1$ または $\alpha+\beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
& (t^{1-\alpha-\beta}+1)(t^{2\alpha}-1)(t^{2\beta}-1) \\
\geq & 16\alpha\beta(t-1)^2.
\end{aligned}$$

Proof of Theorem 3.1.

$$\begin{aligned}
& (t^{1-\alpha-\beta}+1)^2(t^{2\alpha}-1)(t^{2\beta}-1) \\
= & (t+1+t^{\alpha+\beta}+t^{1-\alpha-\beta})^2 \\
& -(t^{\alpha}+t^{1-\alpha}+t^{\beta}+t^{1-\beta})^2,
\end{aligned}$$

だから $t=\lambda_i/\lambda_j$ を代入すると次を得る．

$$\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}+1+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha+\beta}+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\alpha-\beta}\right\}^2$$
$$-\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\beta}+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\beta}\right\}^2$$
$$\geq 16\alpha\beta\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}-1\right)^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}&\{\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j)-f_\alpha(i,j)-f_\beta(i,j)\}\\ &\times\{\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j)+f_\alpha(i,j)+f_\beta(i,j)\}\\ =\ &(\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j))^2-(f_\alpha(i,j)+f_\beta(i,j))^2\\ \geq\ &16\alpha\beta(\lambda_i-\lambda_j)^2. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}Tr[\rho[A,B]] &= Tr[\rho[A_0,B_0]]\\ &= 2i\mathrm{Im}Tr[\rho A_0B_0]\\ &= 2i\mathrm{Im}\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}b_{ji}\\ &= 2i\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}|Tr[\rho[A,B]]| &= 2|\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\\ &\leq 2\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\end{aligned}$$

を得る．したがって

$$|Tr[\rho[A,B]]|^2\leq 4\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2.$$

(5.1) と Schwarz の不等式を用いると次を得る．

$$\begin{aligned}&\alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2\\ \leq\ &4\alpha\beta\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}\right\}^2\\ =\ &\frac{1}{4}\left\{\sum_{i<j}4\sqrt{\alpha\beta}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2\\ \leq\ &\frac{1}{4}\left\{\sum_{i<j}4\sqrt{\alpha\beta}|\lambda_i-\lambda_j||a_{ij}b_{ji}|\right\}^2\\ \leq\ &\frac{1}{4}\left\{\sum_{i<j}\{K^2-L^2\}^{1/2}|a_{ij}||b_{ji}|\right\}^2\\ \leq\ &\frac{1}{2}\sum_{i<j}(K-L)|a_{ij}|^2\times\frac{1}{2}\sum_{i<j}(K+L)|b_{ji}|^2,\end{aligned}$$

ただし $K=\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j), L=f_\alpha(i,j)+f_\beta(i,j)$ である．したがって

$$I_{\rho,\alpha,\beta}(A)J_{\rho,\alpha,\beta}(B)\geq\alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2$$

を得る．同様にして

$$I_{\rho,\alpha,\beta}(B)J_{\rho,\alpha,\beta}(A)\geq\alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2$$

も得られるので目標の (3.1) が得られる． □

次に Theorem 4.1 を証明するのに必要な Lemma を述べよう．

Lemma 5.4

$$\begin{aligned}&\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H)\\ =\ &\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}+\lambda_j^{\alpha+\beta}-\lambda_i^\alpha\lambda_j^\beta-\lambda_i^\beta\lambda_j^\alpha)|h_{ij}|^2\\ =\ &\sum_{i<j}(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)(\lambda_i^\beta-\lambda_j^\beta)|h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Lemma 5.5

$$\begin{aligned}&\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H)\\ \geq\ &\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}+\lambda_j^{\alpha+\beta}+\lambda_i^\alpha\lambda_j^\beta+\lambda_i^\beta\lambda_j^\alpha)|h_{ij}|^2\\ =\ &\sum_{i<j}(\lambda_i^\alpha+\lambda_j^\alpha)(\lambda_i^\beta+\lambda_j^\beta)|h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Lemma 5.6 $t>0,\alpha,\beta\geq 0$ のとき次の不等式が成り立つ．

$$(t^{2\alpha}-1)(t^{2\beta}-1)\geq\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(t^{\alpha+\beta}-1)^2. \qquad (5.2)$$

Proof of Theorem 4.1. (5.2) において $t=\lambda_i/\lambda_j$ とおくと

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{2\alpha}-1\right\}\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{2\beta}-1\right\}\\ \geq\ &\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha+\beta}-1\right\}^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&(\lambda_i^{2\alpha}-\lambda_j^{2\alpha})(\lambda_i^{2\beta}-\lambda_j^{2\beta})\\ \geq\ &\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})^2. \qquad (5.3)\end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]] &= Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A_0,B_0]] \\
&= 2i\mathrm{Im}Tr[\rho^{\alpha+\beta}A_0B_0] \\
&= 2i\mathrm{Im}\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})a_{ij}b_{ji} \\
&= 2i\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]| &= 2|\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}| \\
&\leq 2\sum_{i<j}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|
\end{aligned}
$$

を得る．したがって

$$
|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2 \leq 4\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2.
$$

(5.3) と Schwarz の不等式を用いると次を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2 \\
\leq\ & \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}\right\}^2 \\
=\ & \left\{\sum_{i<j}\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2 \\
\leq\ & \left\{\sum_{i<j}|\lambda_i^{2\alpha}-\lambda_j^{2\alpha}|^{1/2}|\lambda_i^{2\beta}-\lambda_j^{2\beta}|^{1/2}|a_{ij}b_{ji}|\right\}^2 \\
\leq\ & \sum_{i<j}|(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})(\lambda_i^{\beta}-\lambda_j^{\beta})||a_{ij}|^2 \\
& \times\sum_{i<j}|(\lambda_i^{\alpha}+\lambda_j^{\alpha})(\lambda_i^{\beta}+\lambda_j^{\beta})||b_{ji}|^2.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(A)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(B) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2
$$

を得る．同様にして

$$
\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(B)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(A) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2
$$

も得られるので目標の (4.1) が得られる． □

参考文献

[1] J.C.Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra and its Applications, vol.292(1999), pp.139-154.

[2] J.I.Fujii, *A trace inequality arising from quantum information theory*, Linear Algebra and its Applications, vol.400(2005), pp.141-146.

[3] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, *Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.356(2009), pp.179-185.

[4] W.Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhat der quantummechanischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik, vol.43(1927), pp.172-198.

[5] H.Kosaki, *Matrix trace inequality related to uncertainty principle*, Internatonal Journal of Mathematics, vol.16(2005), pp.629-646.

[6] D.Li, X.Li, F.Wang, H.Huang, X.Li and L.C.Kwek, *Uncertainty relation of mixed states by means of Wigner-Yanase-Dyson information*, Physical Review A, vol.79(2009), pp.052106-1-4.

[7] E.H.Lieb, *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*, Adv. Math., vol.11(1973), pp.267-288.

[8] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.

[9] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans. Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), p.4432.

[10] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[11] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.

[12] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.365(2010), pp.12-18.