論　文

ある制限を加えた同期型交代マルチヘッド有限オートマトン

正員　松野　浩嗣[†]　　正員　井上　克司[††]　　正員　高浪　五男[††*]

Synchronized Alternating Multihead Finite Automata with Some Restrictions

Hiroshi MATSUNO[†], Katsushi INOUE[††] *and* Itsuo TAKANAMI[††*], *Members*

あらまし　Hromkovic (1992) らは1方向同期型交代マルチヘッド有限オートマトン（1方向 SAMHFA）と2方向 SAMHFA は受理能力が等しいことを証明した．本論文ではまず，SAMHFA の並列に走るプロセッサの個数を定数個に限定した場合，これとは異なった状況が生じ，2方向のものは1方向のものよりも受理能力が高くなることを示す．このほか，SAMHFA のヘッドの個数とプロセッサの個数に基づく階層性についても述べる．次に，1方向同期型交代シンプルマルチヘッド有限オートマトン（1方向 SASPMHFA）の受理能力は2方向 SAMHFA の受理能力と等価であることを示す．これは先の Hromkovic (1992) らの結果を強めたものになっている．更に全称状態のみをもつ SAMHFA と SASPMHFA (SUMHFA, SUSPMHFA と略記）について1方向 SUMHFA は1方向 SUSPMHFA よりも真に受理能力が高いことも示す．また，ともにプロセス数を限定した SAMHFA と SASPMHFA について，これらは通常の交代性のものよりも真に受理能力が強いことも示す．
キーワード　マルチヘッドオートマトン，交代オートマトン，並列計算，階層性

1. まえがき

並列計算のモデルとして文献(1)で交代チューリング機械 (alternating Turing machine : ATM) が提案されている．ATM は非決定性チューリング機械を一般化したものと考えられる．ATM は計算を行いながら並列にかつ独立に動作するいくつかのプロセスに分かれていき，これらすべてのプロセスが受理状態に入ったときのみ，かつそのときに限り入力を受理する．しかしながら，ATM はこれらのプロセス間の通信が許されていないため，現実の計算機モデルとは隔たりがある．

これに対して文献(2)では，ATM のプロセス間に以下のように自然な形で通信を許した同期型交代チューリング機械 (synchronized alternating Turing machine : SATM) が導入されている．SATM は，その状態集合が部分集合として同期状態 (synchronized state) と呼ばれる状態の集合をもつような ATM である．各々の同期状態に同期記号 (synchronizing symbol) が対応づけられている．計算の途中で，あるプロセスが同期状態に入ると，そのプロセスは他のすべてのプロセスがそのプロセスと同一の同期記号をもつ同期状態に入るか，受理状態に入るまで待ち続け，この状況になった直後から同期状態に入っているすべてのプロセスが再び動作を開始する．

1方向有限オートマトンは，ヘッドの動きを2方向にしても動作を交代性 (alternation) にしてもその受理能力が強くならないことがよく知られている(1)．ところが文献(3)には，2方向有限オートマトンに同期型交代性 (synchronized alternation) を導入するとチョムスキーの階層を2段階飛んで，このオートマトンの受理する集合は文脈依存言語になるという興味ある結果が示されている．また文献(4)では，同期型交代マルチヘッド有限オートマトン (synchronized alternating multihead finite automaton : SAMHFA) の性質が調べられており，1方向性のものは2方向性のものと受理能力が等価であることなどが示されている．

本論文の目的は，SAMHFA の能力にある制限を加えた場合，このオートマトンがどのような性質をもつかを調べることである．

† 大島商船高等専門学校電子機械工学科，山口県
Oshima National College of Maritime Technology, Yamaguchi-ken, 742-21 Japan
†† 山口大学工学部知能情報システム工学科，宇部市
Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube-shi, 755 Japan
* 現在，岩手大学工学部

前に述べたように同期型交代性の導入はプロセス間通信を許すことで交代オートマトンを現実の計算機モデルに近づけようとするアプローチであるが，本論文の**3.**では SAMHFA についてこれをもう一歩進め，並列に走るプロセスの数を定数に限定した SAMHFA を導入する．

まず 2 方向 SAMHFA は 1 方向 SAMHFA よりも受理能力が強いことを示す．これはプロセスの数を定数に限定すると，先に述べた文献(4)の結果と異なる状況が生じることを示している．このほか，プロセス数 s の 1 方向 SAMHFA について $k+1$ ヘッドは k ヘッドよりも受理能力が強いこと，ヘッドの個数が k の SAMHFA について $s+1$ プロセスは s プロセスよりも受理能力が強いことなども示す．

更に，プロセス数を定数個に限定した場合，1 方向 SAMHFA は通常の交代マルチヘッド有限オートマトン(AMHFA)[5] よりも真に受理能力が強いことも示される．

Ibarra らにより導入されたシンプルマルチヘッドオートマトン[7] に交代性を導入した交代シンプルマルチヘッド有限オートマトン(alternating simple multihead finite automaton : ASPMHFA)の性質が文献(8)で調べられている．ASPMHFA は，用いられるヘッドのうちの 1 本のみが入力テープ上の記号を識別でき，他のヘッドは入力テープの左，右の境界記号以外は入力記号を識別できないような AMHFA である．

4.では，同期型交代シンプルマルチヘッド有限オートマトン(synchronized alternating simple multihead finite automaton : SASPMHFA)の性質について考察し，1 方向 SASPMHFA は 2 方向 SAMHFA よりも受理能力が強いことなどを示す．これは先の文献(4)の結果を強めたものになっている．

更に，全称状態のみをもつ SAMHFA と SASPMHFA (SUMHFA, SUSPMHFA) について，1 方向 SUMHFA は 1 方向 SUSPMHFA よりも受理能力が強いことや，入力の長さのある関数でプロセス数を限定した場合，1 方向 SASPMHFA は通常の交代性のものよりも真に受理能力が強いことなども示す．

2. 準　　備

交代オートマトン(alternating automaton)についての詳細な定義は文献(1)を参照されたい．一般にオートマトンの状態集合は受理状態の集合と非受理状態の集合に分割されるが，交代オートマトンの状態集合は存在状態(existential state)の集合と全称状態(universal state)の集合からなるこれとは別の分割をもつ．

同期型交代オートマトン(synchronized alternating automaton) M の状態集合の各要素は，M の有限制御部の状態か(M の有限制御部の状態，同期記号)というペアのどちらかである．後者のペアを同期状態(synchronizing state)と言う．

ある時点でのオートマトンの状態やヘッドの位置などの状況を様相(configuration)と呼ぶ．ある様相の状態が存在状態であるとき，これを存在様相(existential configuration)と呼ぶ．全称様相(universal configuration)，初期様相(initial configuration)，受理様相(accepting configuration)も同様に定義される．また，オートマトン M の計算ステップを表すための様相の集合の上の関係の記号として $\vdash_M$ を用い，$\vdash_M$ の反射的推移的閉包を $\vdash_M^*$ と記す．以下に同期型交代オートマトンの受理計算木の厳密な定義を与える．

[定義 2.1]　同期型交代オートマトン SAA M の入力 w 上の全様相木(full configuration tree)は次のようなラベル付き木 $T_M(w)$ である．

(1)　$T_M(w)$ の各節点 v は，M のある様相 $c(v)$ でラベル付けされている．

(2)　$T_M(w)$ の根 v_0 のラベル $c(v_0)$ ($I_M(w)$ とも記す)は M の w 上の初期様相である．

(3)　節点 v_2 が節点 v_1 の子であるときかつそのときに限り，$c(v_1) \vdash_M c(v_2)$ である．

[定義 2.2]　節点 v_0 を根にもつ全様相木 T のある節点 v の同期系列(synchronized sequence)は，根 v_0 から節点 v に至る道上の節点のラベルに現れるすべての同期記号の系列である．

[定義 2.3]　入力 w 上での SAA M の計算木は，以下の条件を満たす全様相木 $T_M(w)$ の部分木 T' である．

(1)　T' の全称様相でラベル付けされた節点は，$T_M(w)$ 中のこれに対応する節点のすべての子を子としてもつ．

(2)　T' の存在様相でラベル付けされた節点は，$T_M(w)$ 中のこれに対応する節点の子のうちたかだか一つを子としてもつ．

(3)　任意の節点 v_1, v_2 について，v_1 の同期系列は v_2 の同期系列の先頭からの部分系列になっているか，これと逆の関係になっているかである．

上の条件(1)，(2)を満たすが，(3)を満たさないような $T_M(w)$ の部分木が存在する場合，M は入力 w 上

でデッドロックすると言う．

[定義 2.4]　入力 w 上の SAA M の受理計算木とは，すべての葉が受理様相でラベル付けされているような入力 w 上の M の計算木である．入力 w 上の M の受理計算木が存在するとき，SAA M は入力 w を受理すると言う．M によって受理される入力の集合を $T(M)$ と書く．

同期型交代オートマトン SAA の動作を直感的に書くと次のようになる．SAA の並列に動作しているプロセスの一つが同期状態に入ると，そのプロセスは他のすべてのプロセスがそれと同じ同期記号をもつ同期状態に入るか受理状態に入るまで動作を停止して待ち続け，こののち同期状態にあるすべてのプロセスは一斉に動作を再開する．あるプロセスが他とは異なる同期状態に入った場合はデッドロックとなり，また永遠に同期状態や受理状態に入らなければ同期状態で待機しているプロセスは動作を再開することができず，入力は受理されない．もちろん，拒否状態に入ったり無限ループとなった場合も入力は受理されない．

次に，入力を走査しているときに並列に走るプロセスの数を表すリーフサイズの定義を行う[8]．

[定義 2.5]　$L:N\to R$ をある関数とする．ここで，N は正の整数の集合であり，R は非負な実数の集合である．各々の木 t について，t の葉の個数をリーフサイズと呼び $LEAF(t)$ で表す．M に与えられた長さ n のどんな入力 x に対しても，$LEAF(t)>\lceil L(n)\rceil$ なる M の x 上の計算木 t が存在しないとき，同期型交代オートマトン M は $L(n)$ リーフサイズ限定であると言う†．

本論文では最初に，リーフサイズが定数個に限定された同期型交代マルチヘッド有限オートマトン (SAMHFA) の性質について考察する．SAMHFA は，マルチヘッド有限オートマトンに同期型交代性を導入したものである．マルチヘッド有限オートマトンの定義については，文献(9)を参照されたい．

次に，SAMHFA に上とは別の制限を加えた同期型交代シンプルマルチヘッド有限オートマトン (SASPMHFA) の性質について調べる．SASPMHFA は，用いられるヘッドのうちの読取りヘッドと呼ばれる1本のみが入力テープ上の記号を識別でき，計数ヘッドと呼ばれる他のヘッドは入力テープの左境界記号 ¢ と右境界記号 \$ 以外は入力記号を識別できないような SAMHFA である．シンプルマルチヘッド有限オートマトンの詳しい定義については，文献(7)を参照されたい．

本論文では，各種の AMHFA を表すのに XYk-HFA なる記法を用いる．ここで，X, Y, k-H, FA は以下の意味を表す．

- $X\in\{1,2\}$
  1：1方向
  2：2方向
- $Y\in\{A, U, ASP, USP, SA, SU, SASP, SUSP\}$
  A：交代オートマトン
  U：全称状態のみをもつ交代オートマトン
  ASP：交代シンプルマルチヘッドオートマトン
  USP：全称状態のみをもつ交代シンプルマルチヘッドオートマトン
  SA：同期型交代オートマトン
  SU：全称状態のみをもつ同期型交代オートマトン
  $SASP$：同期型交代シンプルマルチヘッドオートマトン
  $SUSP$：全称状態のみをもつ同期型交代シンプルマルチヘッドオートマトン
- k-H：k-ヘッド (ヘッドの本数が k)
- FA：有限オートマトン

例えば，

- $2SAk$-HFA：2方向同期型交代 k ヘッド有限オートマトン
- $1SUSPk$-HFA：全称状態のみをもつ1方向同期型交代シンプル k ヘッド有限オートマトン

となる．また，$L(n)$リーフサイズ限定 XYk-HFA を XYk-$HFA(L(n))$ と記す．例えば，$L(n)$ リーフサイズ限定 $1SAk$-HFA を $1SAk$-$HFA(L(n))$ と書く．更に，XYk-HFA や XYk-$HFA(L(n))$ で受理される集合を $\mathscr{L}[XYk\text{-}HFA]$や $\mathscr{L}[XYk\text{-}HFA(L(n))]$と書く．例えば，$1SUk$-$HFA$ によって受理される集合は $\mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA]$と表される．

3. リーフサイズを定数に限定した場合

本章では，リーフサイズを定数に限定した場合の SAMHFA の受理能力について考察する．リーフサイズを定数に限定することは，直感的には入力を走査しているときに並列に動作するプロセスの個数を定数個に限定することであり，これは交代オートマトンをより現実的な計算モデルに近づける一つのアプローチであると言える．

文献(10)でリーフサイズが定数に限定された AMHFA

† $\lceil r\rceil$ は，r 以上の整数の中で最も小さい整数である．

の性質が調べられ，リーフサイズが s の場合 $k+1$ ヘッドは k ヘッドよりも受理能力が強いこと，k ヘッドの場合 $s+1$ リーフサイズは s リーフサイズよりも受理能力が強いこと，および2方向は1方向よりも受理能力が強いことが示されている．以下にリーフサイズを定数に限定したSAMHFAについても同様な結果が成り立つことを示す．まず，次の補題を証明する．各 $X\in\{1,2\}, k\geqq 1$ に対し，$XNk\text{-}HFA$ で X 方向非決定性 k ヘッド有限オートマトンを表す．

［補題3.1］ 各 $X\in\{1,2\}, k\geqq 1$ および $s\geqq 1$ に対し，$\mathscr{L}[XSAk\text{-}HFA(s)]=\mathscr{L}[XN(ks)\text{-}HFA]$.

（証明） 1方向の場合について証明する．2方向の場合についても，同様に証明できる．

$1N(ks)\text{-}HFA$ は，相互に情報交換が行える s 個の非決定性 k ヘッド有限オートマトンと考えることができるので，$\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]\subseteqq\mathscr{L}[1N(ks)\text{-}HFA]$は容易に示せる．

次に，逆の包含関係，すなわち $\mathscr{L}[1N(ks)\text{-}HFA]\subseteqq\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]$が成り立つことを示そう．以下は，文献(11)の定理3.1で用いられた技法に基づいており，この証明との相違点に留意して簡潔に述べたものである．

Aをある $1N(ks)\text{-}HFA$ とする．一般性を失うことなく，Aの最初の1ステップはどのヘッドも動かさないで決定的な動作を行うのみであると仮定できる．Aの ks 本のヘッドを，1ブロックが k 本のヘッドからなる s 個のブロックに分け，それらのブロックに1から s まで順番に番号を付ける．

Aの動作を模倣する $1SAk\text{-}HFA(s)$ Bを以下のように構成する．まずBは全称状態に入って s 個のプロセス $B_1, B_2, \cdots, B_s$ に分かれる．ここで，各 $B_i\,(1\leqq i\leqq s)$ をAのヘッドの i 番目のブロックに対応させる．この動作は上のAの動作の仮定により可能である．

次の二つの動作をすることができれば，BはAの動作を正確に模倣できる．

・各プロセス B_i は他のすべてのプロセス $B_l\,(l\neq i)$ の k 本のヘッドの読む記号を知る

・Aが非決定的動作をしたときは，プロセス $B_1, B_2, \cdots, B_s$ の各々がAと同じ非決定的動作をする

これには，次のようにBの同期記号を構成すればよい．

$$t=((a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1k}), \cdots, (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{ik}), \cdots, (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sk}), r)$$

ここで，記号 $b_{ij}\,(1\leqq j\leqq k)$ はプロセス B_i の j 番目のヘッドによって読まれている記号であり，記号 $a_{lj}\,(1\leqq l\leqq s, l\neq i, 1\leqq j\leqq k)$ は，プロセス B_l の j 番目のヘッドによって読まれる記号を，プロセス B_i が非決定的に（存在状態に入って）推測したものである．BがAの模倣を続行できるのは，各 $i\,(1\leqq i\leqq s)$ についてプロセス B_i が他のプロセス $B_l\,(l\neq i)$ の読む記号を正確に推測したとき，すなわち同期記号 t の中に $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k}), \cdots, (b_{s1}, b_{s2}, \cdots, b_{sk})$ が現れているときかつそのときに限る．これ以外のときはBはデッドロックとなる．更に，プロセス B_i がどの非決定的動作を行ったかを同期記号 t の中の記号 r に蓄える．Bの計算木には，以下のような異なる二つの同期記号 $((b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k}), \cdots, (b_{s1}, b_{s2}, \cdots, b_{sk}), u), ((b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k}), \cdots, (b_{s1}, b_{s2}, \cdots, b_{sk}), v)$ $(u\neq v)$ が現れることはないので（このような二つの同期記号が現れたときにはBはデッドロックとなる），すべてのプロセス $B_1, B_2, \cdots, B_s$ は同一の非決定的選択を行うことは明らかである．

以上のようにして，Aの各々の計算道（computation path）について一つのBの計算木を正確に対応させることができる．故に，与えられた入力 w 上のAの受理計算道が存在するときかつそのときに限り，入力 w 上のBの受理計算木が存在する．よって $T(B)=T(A)$ が言え，$\mathscr{L}[1N(ks)\text{-}HFA]\subseteqq\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]$が成り立つ．以上で本補題の証明を終る． □

任意の二つのヘッドが入力の同一のコマ上にあるか否かを検知することのできるようなマルチヘッド有限オートマトンは検知型（sensing）であると呼ばれる．例えば各 $X\in\{1,2\}, k\geqq 2, s\geqq 1$ に対して，$XSASNk\text{-}HFA(s)$, $XNSNk\text{-}HFA$ で検知型 $XSAk\text{-}HFA(s)$, $XNk\text{-}HFA$ を表す．

検知型の場合に補題3.1と同様な結果が成り立つか否かは知られていないが，次の補題が成り立つことは容易に示される．

［補題3.2］ 各 $X\in\{1,2\}, k\geqq 1$ および $s\geqq 1$ に対し，$\mathscr{L}[XSASNk\text{-}HFA(s)]\subseteqq\mathscr{L}[XNSN(ks)\text{-}HFA]$.

文献(4)に，1方向SAMHFAは2方向SAMHFAと受理能力が等価であることが示されている．これは並列に走るプロセスの個数に制限を加えない場合である．以下に，このプロセスの個数を定数に制限した場合，すなわちリーフサイズを定数に限定した場合はこれとは異なった状況が生じることを示す．

［定理3.1］ 各 $X\in\{1,2\}, k\geqq 2$ および $s\geqq 1$ に対し，

（1） $\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]\subsetneqq\mathscr{L}[2SAk\text{-}HFA(s)]$.

（2） $\mathscr{L}[1SASNk\text{-}HFA(s)]\subsetneqq\mathscr{L}[2SASNk\text{-}HFA(s)]$.

(証明)　各 $b \geqq 1$ に対し，$L(b)=\{w_1 2 w_2 2 \cdots 2 w_b 2 w_b 2 \cdots 2 w_2 2 w_1 \mid \forall i(1 \leqq i \leqq b)[w_i \in \{0,1\}^*]\}$ とする．$L\left(\binom{ks+1}{2}\right)$ が 2 方向決定性 2 ヘッド有限オートマトンで受理できることは容易に示せる．一方，文献(12)に $L\left(\binom{ks+1}{2}\right) \notin \mathscr{L}[1NSN(ks)\text{-}HFA]$ が示されている．このことと補題 3.2 より本定理が成り立つことが知れる．

□

次に，1 方向性のものについてはヘッドが 1 本増すと真に受理能力が強くなることを示す．

[定理 3.2]　各 $X \in \{1,2\}, k \geqq 1$ および $s \geqq 2$ に対し，$\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)] \subsetneqq \mathscr{L}[1SA(k+1)\text{-}HFA(s)]$.

(証明)　文献(12)に $\mathscr{L}[1Nk\text{-}HFA] \subsetneqq \mathscr{L}[1N(k+1)\text{-}HFA]$ であることが示されている．このことより，各 $k \geqq 1, s \geqq 2$ に対し，$\mathscr{L}[1N(ks)\text{-}HFA] \subsetneqq \mathscr{L}[1N(ks+1)\text{-}HFA] \subsetneqq \mathscr{L}[1N(k+1)s\text{-}HFA]$ が言える．一方補題 3.1 より，$\mathscr{L}[1N(ks)\text{-}HFA] = \mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]$, $\mathscr{L}[1N(k+1)s\text{-}HFA] = \mathscr{L}[1SA(k+1)\text{-}HFA(s)]$ である．以上より，本定理が成り立つ．

文献(3)に，1 方向および 2 方向性の同期型交代有限オートマトンについて，リーフサイズを一つ増やすと真に受理能力が増すことが示されている．次の定理は，1 方向性のものについてこれを SAMHFA に拡張しても同様な結果が成り立つことを示している．証明は上の定理 3.2 と同様にしてできるので省略する．

[定理 3.3]　各 $X \in \{1,2\}, k \geqq 1$ および $s \geqq 1$ に対し，$\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)] \subsetneqq \mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s+1)]$.

定理 3.2，定理 3.3 とも 2 方向性のものについて同様な結果が成り立つか否かは未解決である．更に，検知型の場合にこれらの定理と同様な結果が成り立つか否かも知られていない．

同期型交代性と交代性の受理能力の関係を調べることは自然な問題の一つであり，文献(13)で Ibarra らは

- $\bigcup_{1 \leqq k < \infty} \mathscr{L}[XSUk\text{-}HFA] = \bigcup_{1 \leqq k < \infty} \mathscr{L}[XUk\text{-}HFA]$ $(X \in \{1,2\})$

であることを示している．以下に，定数のリーフサイズをもつ 1 方向交代マルチヘッド有限オートマトンに同期型交代性を導入すると真に受理能力が強くなることを示そう．

[定理 3.4]　各 $k \geqq 1$ および $s \geqq 2$ に対し，

(1)　$\mathscr{L}[1Ak\text{-}HFA(s)] \subsetneqq \mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]$,

(2)　$\mathscr{L}[1Uk\text{-}HFA(s)] \subsetneqq \mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA(s)]$,

(3)　$\mathscr{L}[1ASNk\text{-}HFA(s)]$
$\subsetneqq \mathscr{L}[1SASNk\text{-}HFA(s)]$,

(4)　$\mathscr{L}[1USNk\text{-}HFA(s)]$
$\subsetneqq \mathscr{L}[1SUSNk\text{-}HFA(s)]$.

(証明)　$T=\{w2w \mid w \in \{0,1\}^+\}$ とする．$T \in \mathscr{L}[SU1\text{-}HFA(2)]$ であることは文献(2)で示されている．一方 T は正規言語でないことから文献(1)より $T \notin \mathscr{L}[A1\text{-}HFA]$ であるので，各 $s \geqq 1$ に対し $T \notin \mathscr{L}[A1\text{-}HFA(s)]$ である．以上より，$k=1$ のとき本定理が成り立つ．

各 $b \geqq 1$ に対し，$L(b)=\{w_1 2 w_2 2 \cdots 2 w_b 2 w_b 2 \cdots 2 w_2 2 w_1 \mid \forall i(1 \leqq i \leqq b)[w_i \in \{0,1\}^*]\}$ とする．$k \geqq 2$ について，$\mathscr{L}[1Ak\text{-}HFA(s)] \subseteq \mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]$, $\mathscr{L}[1Uk\text{-}HFA(s)] \subseteq \mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA(s)]$, $\mathscr{L}[1ASNk\text{-}HFA(s)] \subseteq \mathscr{L}[1SASNk\text{-}HFA(s)]$ および $\mathscr{L}[1USNk\text{-}HFA(s)] \subseteq \mathscr{L}[1SUSNk\text{-}HFA(s)]$ であることは明らかであるので，$k \geqq 2$ の場合に本定理が成り立つためには $L\left(k^2(s-1)+\binom{k}{2}\right) \in \mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA(s)] - \mathscr{L}[1ASNk\text{-}HFA(s)]$ $(s \geqq 2)$ であることを示せばよい．まず s に関する帰納法により $L\left(k^2(s-1)+\binom{k}{2}\right) \in \mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA(s)]$ を示す．

[基底段階]　$s=2$ のとき，$L\left(k^2+\binom{k}{2}\right)$ は次のように動作する $1SUk\text{-}HFA(2)$ M によって受理される．M に次のような語 W を与えたとする．

- $W = w_1 2 w_2 2 \cdots 2 w_{k^2+\binom{k}{2}} 2 w'_{k^2+\binom{k}{2}} 2 \cdots 2 w'_2 2 w'_1$

M は動作を開始して直ちに全称状態に入り，二つのプロセス M_1 と M_2 に分かれる．プロセス M_1 の k 本のヘッドを $h_{11}, h_{12}, \cdots, h_{1k}$ とし，同様にプロセス M_2 のそれらを $h_{21}, h_{22}, \cdots, h_{2k}$ とする．

〈ステップ 1〉　各 i $(1 \leqq i \leqq k^2)$ に対し $w_i = w'_i$ であることを以下のアルゴリズムによって確かめる．

begin
　for $i := 1$ to k **do**
　　M_1 のヘッド h_{1i} を $w'_{i \times k}$ のすぐ左の記号 ‘2’ に配置する．…(＊)
　end-for;
　for $j := 1$ to k **do**
　　for $i := 1$ to k **do**
　　　M_2 のヘッド h_{2i} を $w_{(j-1) \times k+i}$ のすぐ左の記号 ‘2’ に配置する（w_1 の場合は左境界記号 ¢ に置いておく）…(＊)
　　end-for;

for $i := k$ to 1 **do**
　M_1 のヘッド h_{1j} と M_2 のヘッド h_{2i} を使って
　$w_{(j-1)\times k+i} = w'_{(j-1)\times k+i}$ をチェックする…(#)
end-for;
end-for;
M_1 は受理状態に入る
end.

上のアルゴリズム中の(∗)の動作は，ヘッドが記号'2'を通過した回数を有限制御部でカウントすることでなされる(語W中の記号'2'の個数は有限個であることに注意)．また(#)の動作は，M_1 はヘッド h_{1j} の下の記号を，M_2 はヘッド h_{2i} の下の記号を読んでそれぞれの有限制御部に同期記号として蓄え，同期型交代性によってこれらの記号の比較をすることで行える．

〈ステップ2〉 M_2 の k 本のヘッドを使って，各 $i\left(1\leqq i\leqq\binom{k}{2}\right)$ に対し $w_{k^2+i} = w'_{k^2+i}$ であることを文献(12)の定理1の証明中で用いられている技法と同様にして確かめる．これが成功すると，M_2 は受理状態に入る．

[帰納段階] $s=t$ のとき $L\left(k^2(t-1)+\binom{k}{2}\right)$ を受理する $1SUk\text{-}HFA(t)$ が存在すると仮定する．$s=t+1$ のときに $L\left(k^2t+\binom{k}{2}\right)$ を受理する $1SUk\text{-}HFA(t+1)$ N を以下のように構成する．

N は動作を開始して直ちに全称状態に入り，二つのプロセス N_1 と N_2 に分かれ，各 $i\,(1\leqq i\leqq k^2)$ に対し，プロセス N_2 は w_i をプロセス N_1 は w'_i を走査することで，各 $i\,(1\leqq i\leqq k^2)$ に対し $w_i = w'_i$ であることを上のステップ1と同様にして確かめる．これが成功すると，N_1 は受理状態に入る．N_2 はすべてのヘッドを部分語 w_{k^2+1} のすぐ左の記号'2'上に配置する．帰納法の仮定により，プロセス N_1 は残りの部分語

$w_{k^2+1}2w_{k^2+2}2\cdots2w_{k^2t+\binom{k}{2}}2w_{k^2t+\binom{k}{2}}{}'2\cdots2w'_{k^2+2}2w'_{k^2+1}$

のチェックを行うことができる．

以上により，各 $k\geqq2, s\geqq2$ に対し，$L\left(k^2(s-1)+\binom{k}{2}\right)\in\mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA(s)]$ であることが証明された．

次に，$L\left(k^2(s-1)+\binom{k}{2}\right)\notin\mathscr{L}[1ASNk\text{-}HFA(s)]$ であることを示そう．

文献(10)の補題4.2より $L\left(\binom{k}{2}s+1\right)\notin\mathscr{L}[1ASNk\text{-}HFA(s)]$ である．一方，

$$k^2(s-1)+\binom{k}{2}-\left[\binom{k}{2}s+1\right]=\frac{k}{2}(k+1)(s-1)-1$$

であるので，$k\geqq1, s\geqq2$ のとき $(k/2)(k+1)(s-1)-1\geqq0$ となる．従って，$L\left(k^2(s-1)+\binom{k}{2}\right)$ の含む部分語 w_i の個数は $L\left(\binom{k}{2}s+1\right)$ の含む部分語 w_i の個数よりも少なくなることはないので，$L\left(k^2(s-1)+\binom{k}{2}\right)\notin\mathscr{L}[1ASNk\text{-}HFA(s)]$ が言える．以上で本定理の証明を終わる．□

各 $k\geqq1, s\geqq2$ に対し，$\mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA(s)]\subsetneq\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA(s)]$, $\mathscr{L}[1SUSNk\text{-}HFA(s)]\subsetneq\mathscr{L}[1SASNk\text{-}HFA(s)]$ が成り立つか否かは未解決である．

4. シンプルマルチヘッド有限オートマトン

文献(8)では，交代マルチヘッド有限オートマトン(AMHFA)と交代シンプルマルチヘッド有限オートマトン(ASPMHFA)の受理能力は等価であることが示されている．まずこれらのオートマタを同期型交代性にした場合にも，同様な結果が成り立つことを示す．

任意の二つのヘッドが入力の同一のコマ上にあるか否かを検知することのできるような(同期型)交代性シンプルマルチヘッド有限オートマトン((S)ASPMHFA)は検知型(sensing)であると呼ばれる．1方向(2方向)検知型 k ヘッド ASPMHFA を $1ASNSPk\text{-}HFA$ ($2ASNSPk\text{-}HFA$) と書き，1方向(2方向)検知型 k ヘッド SASPMHFA を $1SASNSPk\text{-}HFA$ ($2SASNSPk\text{-}HFA$) と書く．

以下の補題と定理は文献(8)に示されている．証明の要点のみを示す．

[補題4.1] 各 $X\in\{1,2\}$ および $k\geqq1$ に対し，$\mathscr{L}[XASNSPk\text{-}HFA]=\mathscr{L}[XASPk\text{-}HFA]$.

(略証) $XASNSPk\text{-}HFA$ M の動作を $XASPk\text{-}HFA$ N で模倣する．N は M が検知機能を働かせたか否かを非決定的に推測し，そう判定した場合は全称状態に入って次の二つの動作を行う．(1) M の模倣を続ける，(2)検知したと判定した二つのヘッドを同時に1コマずつ右に動かし，同時に右境界記号 $\$$ に到着したら受理状態に入る．□

[定理4.1] 各 $X\in\{1,2\}$ および $k\geqq1$ に対し，$\mathscr{L}[XAk\text{-}HFA]=\mathscr{L}[XASPk\text{-}HFA]$.

(略証) 補題4.1より，$\mathscr{L}[XAk\text{-}HFA]\subseteq\mathscr{L}[XASNSPk\text{-}HFA]$ を示せば十分である．$XAk\text{-}HFA$

M の k 本のヘッドの動きを $XASNSPk$-HFA N の1本の読取りヘッドと $k-1$ 本の計数ヘッドで模倣する．N は計数ヘッドの下にある記号を非決定的に推測し，全称状態に入って以下の二つの動作を行う．(1)M の模倣を続ける，(2)読取りヘッドを計数ヘッドの位置に動かし，推測した記号と同一であれば受理状態に入る(1方向性のものについては，読取りヘッドを常にすべての計数ヘッドよりも左に位置しておく)． □

以下に，同期型交代性の場合にも上の補題と定理が成り立つことを説明する．

補題4.1の略証中の(2)の動作を検知プロセスと呼ぶ．$XSASNSPk$-HFA M の動作を $XSASPk$-HFA N で模倣している間のある時点で，すべての検知プロセスが受理状態となり，これ以外のプロセスはすべて同一の同期状態に入っているか受理状態に入っているとしよう．この場合，N の同期状態に入っているプロセスは直ちに M の動作の模倣を再開する．

ある検知プロセスが(受理状態に入らずに)動作を続けているときに，これ以外のすべてのプロセスが同一の同期状態に入っているか受理状態に入っているとしよう．この場合，N の同期状態に入っているプロセスは検知プロセスの動作が終了するのを待つ．検知プロセスが受理状態に入ればこれらのプロセスは動作を再開する．検知プロセスが拒否状態に入ったときは N は M の模倣を失敗する．なお，このとき N の同期状態に入っているプロセスは永遠に動作を再開しない．

以上のことから，$XSASNSPk$-HFA の動作を $XSASPk$-HFA で模倣できることは明らかである．定理4.1の略証中の(2)の動作を読取りプロセスと呼ぶ．同期型交代性の場合にも定理4.1と同様な結果が成り立つこと，すなわち $XSAk$-HFA の動作を $XSASNSPk$-HFA で模倣できることを言うには，上の文章中の「検知プロセス」を「読取りプロセス」と読み替えればよい．これより次の定理を得る．

[定理4.2] 各 $X\in\{1,2\}$ および $k\geq 1$ に対し，$\mathscr{L}[XSAk\text{-}HFA]=\mathscr{L}[XSASPk\text{-}HFA]$．

文献(4)に，各 $k\geq 1$ に対し，$\mathscr{L}[1SAk\text{-}HFA]=\mathscr{L}[2SAk\text{-}HFA]$，$\mathscr{L}[2SAk\text{-}HFA]\subsetneq\mathscr{L}[1SA(k+1)\text{-}HFA]$が示されている．これらの結果は定理4.2によって，次のように強められる．

[系4.1] 各 $k\geq 1$ に対し，

(1) $\mathscr{L}[1SASPk\text{-}HFA]=\mathscr{L}[2SAk\text{-}HFA]$,

(2) $\mathscr{L}[2SAk\text{-}HFA]\subsetneq\mathscr{L}[1SASP(k+1)\text{-}HFA]$.

次に，状態集合から存在状態を取り除いた場合，定理4.2とは異なった状況が生じることを示そう．入力上での SASPMHFA M の状態 q と $k-1$ 本の計数ヘッドの位置情報 $i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}$ の対 $(q,i_1,i_2,\cdots,i_{k-1})$ を M の準様相(semi-configuration)と言う．

[定理4.3] 各 $k\geq 2$ に対し，

(1) $\mathscr{L}[1SUSPk\text{-}HFA]\subsetneq\mathscr{L}[1SUk\text{-}HFA]$,

(2) $\bigcup_{1\leq r<\infty}\mathscr{L}[1SUSPr\text{-}HFA]\subsetneq\bigcup_{1\leq r<\infty}\mathscr{L}[1SUr\text{-}HFA]$,

(3) $\mathscr{L}[1SUSNSPk\text{-}HFA]\subsetneq\mathscr{L}[1SUSNk\text{-}HFA]$,

(4) $\bigcup_{1\leq r<\infty}\mathscr{L}[1SUSNSPr\text{-}HFA]\subsetneq\bigcup_{1\leq r<\infty}\mathscr{L}[1SUSNr\text{-}HFA]$.

(証明) $L=\{w2w'\mid w,w'\in\{0,1\}^*,w\neq w'\}$とする．$L$ が $1SU2$-HFA によって受理できることは容易に示せる(実際には L は1方向決定性2ヘッド有限オートマトンで受理できる)．以下に $L\notin\bigcup_{1\leq k<\infty}\mathscr{L}[1SUSNSPk\text{-}HFA]$を示す．

ある $k\geq 1$ について L を受理する $1SUSNSPk$-HFA M が存在すると仮定し，s を M の状態数とする．

各 $n\geq 1$ に対し，$V(n)=\{w2w\mid w\in\{0,1\}^*,|w|=n\}$とする．各 $x\in V(n)$ に対し，$S(x)$ を次のように定義される M の準様相の集合とする．

$S(x)=\{(q,i_1,i_2,\cdots,i_{k-1})\mid$ 計算道 $I_M(x)\vdash_M^*(x,n+1,(q',i'_1,i'_2,\cdots,i'_{k-1}))\vdash_M(x,n+2,(q,i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}))$ が存在する(すなわち，$(x,n+2,(q,i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}))$ は M の読取りヘッドが x 中の記号'2'を読み終えた直後の様相である)．$\}$更に

$C(x)=\{\{\sigma_1,\sigma_2\}\mid\sigma_1$ と σ_2 は，次の条件を満たす $S(x)$ 中の準様相である．

(i) $\sigma_1=\sigma_2$ の場合：様相 $(x,n+2,\sigma_1)$ で開始し，非受理様相で停止するか無限ループに入るような M の計算道が存在する

(ii) $\sigma_1\neq\sigma_2$ の場合：$(x,n+2,\sigma_1)$ と $(x,n+2,\sigma_2)$ で動作を開始した，互いに異なる同期記号をもつ様相で停止するような二つの計算道が存在する．$\}$

$x\notin L$ より x は M で受理されないことから，各 $x\in V(n)$ に対し $C(x)$ は空でないことに注意されたい．次の命題が成立する．

[命題4.1] $V(n)$ 中の相異なる二つの入力 x,y につい

て，$C(x)\cap C(y)=\phi$.

[逆に $x=w2w$, $y=w'2w'(w\neq w')$ なる入力 x,y について $C(x)\cap C(y)\neq\phi$ とし，$\{\sigma_1,\sigma_2\}\in C(x)\cap C(y)$ であるとしよう．$z=w2w'$ とする．$\{\sigma_1,\sigma_2\}\in C(x)$ であるので，二つの計算道 $I_M(z)\vdash_M^*(z,n+2,\sigma_1)$ と $I_M(z)\vdash_M^*(z,n+2,\sigma_2)$ が存在する．

また$\{\sigma_1,\sigma_2\}\in C(y)$ であるので，$\sigma_1=\sigma_2$ の場合は $(z,n+2,\sigma_1)$ で開始して，非受理様相で停止するか無限ループに入るような M の計算道が存在し，$\sigma_1\neq\sigma_2$ の場合には，$(z,n+2,\sigma_1)$ と $(z,n+2,\sigma_2)$ で開始し，相異なる二つの同期記号をもつ様相で停止するような二つの計算道が存在する．

以上より z は M によって受理されないことになり，これは $z\in L=T(M)$ に矛盾する．]

$p(n)$ を M の読取りヘッドが $V(n)$ 中の入力の記号 '2' を離れた直後の M の異なる準様相のペアの総数とすると，

$$p(n)\leqq K+\binom{K}{2},\ \text{但し}\ K=s\cdot n^{k-1}$$

一方，$|V(n)|=2^n$ であるから，十分に大きな n について $|V(n)|>p(n)$ である．従って，十分に大きな n に対して $C(x)\cap C(y)\neq\phi$ であるような $V(n)$ 中の相異なる入力 x,y が存在する．これは命題 4.1 に矛盾する．□

次に，交代性と同期型交代性の受理能力の差異について述べる．

[定理 4.4] 各 $Y\in\{ASP, USP, ASNSP, USNSP\}$, $k\geqq 1$ でありかつ，$\lim_{n\to\infty}[L(n)\log n/n]=0$, $L(n)\geqq 2$ を満たす関数 L に対し，

（1） $\mathscr{L}[1Yk\text{-}HFA(L(n))] \subsetneqq \mathscr{L}[1SYk\text{-}HFA(L(n))]$.

（2） $\bigcup_{1\leqq r<\infty}\mathscr{L}[1Yr\text{-}HFA(L(n))] \subsetneqq \bigcup_{1\leqq r<\infty}\mathscr{L}[1SYr\text{-}HFA(L(n))]$.

（証明） $T=\{w2w \mid w\in\{0,1\}^+\}$ とする．$T\in\mathscr{L}[1SU1\text{-}HFA(2)]$であることは文献(2)で示されている．一方，文献(10)の Remark 5.8 より，$\lim_{n\to\infty}[L(n)\log n/n]=0$ なる関数 $L(n)$ に対し，$T\notin\bigcup_{1\leqq r<\infty}\mathscr{L}[1ASNSPr\text{-}HFA(L(n))]$であることが示される．以上で本定理の証明を終る．□

2方向性のものについて，定理 4.3，定理 4.4 と同様な結果が成り立つか否かは未解決である．

5. むすび

本論文では同期型交代マルチヘッド有限オートマトン (SAMHFA) に制限を加えた，定数個の葉数をもつ同期型交代マルチヘッド有限オートマトン (SAMHFACL) と同期型交代シンプルマルチヘッド有限オートマトンを導入しその性質を調べた．

特に SAMHFACL は，定数個のヘッドと定数個のプロセスという二つの並列要素をもっている観点からも興味あるモデルである．プロセス数を定数個に限定することは，SAMHFA を現実の計算機のモデルに近づける一つのアプローチと考えられる．Hromkovic(4) と Ibarra(13) はヘッドの個数による階層性とプロセス数による階層性のそれぞれについて考察しているが，これらの両方を導入したモデルについては調べていない．

また Ibarra らは，文献(13)で全称状態のみからなる SAMHFA(SUMHFA) の性質を調べている．SUMHFA は，決定的な並列動作を行うことから，これも SAMHFA を現実の計算機モデルに近づけるアプローチと言え，本論文ではシンプルマルチヘッド有限オートマトンについてこのモデルを導入した．

今後はこのアプローチを更に進め，SAMHFA の状態を全称状態のみに限定し，更にプロセス数も定数個に限定したオートマトンの性質を調べたいと考えている．

文　献

（1） Chandra A. K., Kozen D. C. and Stockmeyer L. J. : "Alternation", J. ACM, **28**, 1, pp. 114-133 (1981).

（2） Slobodova A. : "On the power of communication in alternating machines", Proc. 13th MFCS'88, LNCS 324, pp. 518-528, Springer-Verlag (1988).

（3） Dassow J., Hromkovic J., Karhumaki J., Rovan B. and Slobodova A. : "On the power of synchronization in parallel computations", Proc. 14th MFCS'89, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag (1989).

（4） Hromkovic J., Inoue K., Rovan B., Slobodova A., Takanami I. and Wagner K. W. : "On the power of one-way synchronized alternating machines with smallspace", International Journal of Foundations of Computer Science 3, 1, pp. 65-79 (1992).

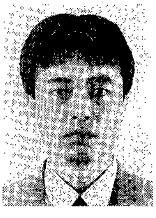
（5） King K. N. : "Alternating multihead finite automata", Theoret. Comput. Sci., 61, pp. 149-174 (1988).

（6） Inoue K., Takanami I., Nakamura A. and Ae T. : "One-way simple multihead finite automata", Theoret. Comput. Sci., 9, pp. 311-328 (1979).

（7） Ibarra O. H. and Kim C. E. : "A useful device for showing the solvability of some decision problems", J. Comput. System Sci., 13, pp. 153-160 (1976).

(8) Matsuno H., Inoue K., Taniguchi H. and Takanami I. : "Alternating simple multihead finite automata", Theoret. Comput. Sci., 36, pp. 291-308 (1985).
(9) Sudborough I. H. : "On tape-bounded complexty classes and multihead finite automata", J. Comput. System Sci., 10, pp. 62-76 (1975).
(10) Matsuno H., Inoue K., Takanami I. and Taniguchi H. : "Alternating multihead finite automata with constant leaf-sizes", Trans. IEICE, **E71**, 10 pp. 1006-1011 (Oct. 1988).
(11) Hromkovic J. and Inoue K. : "A note on realtime one-way synchronized alternating one-counter automata", Theoret. Comput. Sci. 108, pp. 393-400 (1993).
(12) Yao A. C. and Rivest R. L. : "$K+1$ heads are better than k", J. ACM, **25**, 2, pp. 337-328 (1978).
(13) Ibarra O. H. and Tran N. Q. : "New results concerning synchronized finite automata", 19th International Colloquium on Automata Languages, and Programming (1992).

(平成5年7月9日受付，11月1日再受付)



松野　浩嗣

昭57山口大・工・電子卒．昭59同大大学院修士課程了．同年山口短大・電子・講師．昭62大島商船高専・電子機械に転じ，現在同講師．オートマトン理論の研究に従事．マイクロコンピュータ応用にも興味をもつ．情報処理学会，LA各会員．

井上　克司

昭44広島大・工・電気卒．昭46同大大学院修士課程了．同年電電公社武蔵野電気通信研究所入所．昭48広島大学工学部に転じた後，昭52年9月山口大学工学部電子工学科勤務．現在知能情報システム工学科教授．理論計算機学に興味をもつ．工博．

高浪　五男

昭40九工大・2部電気卒．昭45東北大大学院博士課程了．工博．オートマトン理論に関する研究に従事．ディジタルシステムの故障診断，マイクロコンピュータ応用にも興味をもっている．山口大学工学部知能情報システム工学科教授．平6より岩手大学工学部情報工学科教授．情報処理学会，日本ロボット学会各会員．