The 28th Symposium on Information Theory
and Its Applications (SITA2005)
Onna, Okinawa, Japan, Nov. 20–23, 2005

古典-量子通信路における量子信頼性関数の補助関数の凹性

Concavity of the auxiliary function appearing in quantum reliability function in classical-quantum channel

柳　研二郎* 古市　茂† 栗山　憲‡
Kenjiro Yanagi　Shigeru Furuichi　Ken Kuriyama

Abstract— Concavity of the auxiliary function which appears in the random coding exponent as a lower bound of the quantum reliability function for general quantum states is proved for $0 \le s \le 1$ in the genaral dimensional case. We have finally solved the open problem given in [11], [12]

Keywords— Quantum reliability function, random coding exponent, quantum information theory

1　はじめに

量子情報理論において量子信頼性関数に現れる補助関数 $\mu_q(s,\pi)$ の性質を調べることは古典の場合と同様に重要である．古典系における補助関数 $\mu_c(s,p)$ の性質は現在までに次の性質が証明されている．ただし $\mu_c(s,p)$ は信頼性関数の下界を与える random coding exponent $E_r^c(R)$ を次のように定義するものである．

$$E_r^c(R) = \max_{s,\pi}\{\mu_c(s,\pi) - sR\}.$$

Lemma 1 次の (a),(b),(c),(d),(e) が成立する．

(a) $\mu_c(0,\pi) = 0$.

(b) $\frac{\partial \mu_c(s,\pi)}{\partial s}|_{s=0} = I(X,Y)$, ただし $I(X,Y)$ は相互情報量である．

(c) $\mu_c(s,\pi) > 0 \ (0 < s \le 1)$.
$\mu_c(s,\pi) < 0 \ (-1 < s < 0)$.

(d) $\frac{\partial \mu_c(s,\pi)}{\partial s} > 0, \ (-1 < s \le 1)$.

(e) $\frac{\partial^2 \mu_c(s,\pi)}{\partial s^2} \le 0, \ (-1 < s \le 1)$.

量子系においては対応する性質 (a),(b),(c),(d) が成り立つことは [11], [12] で証明されている．また補助関数 $\mu_q(s,\pi)$ の凹性については純粋状態の場合には [3] によって、また expurgation method を採用した場合には [11] によって証明されている．しかし一般の混合状態の場合には未だに未解決のままである．

2　量子信頼性関数

古典-量子通信路における信頼性関数は $0 < R < C$ に対して次のように定義される．

$$E(R) = -\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_e(2^{nR}, n), \qquad (1)$$

ただし C は classical-quantum capacity であり, R は伝送レート $R = \frac{\log_2 M}{n}$ (n と M はそれぞれ符号語の個数とメッセージの個数を表す) である．C は Holevo によって次のように与えられている．

Theorem 1 ([10])

$$C = \max_{\pi}\{H(\bar{S}) - \sum_{i=1}^{a}\pi_i H(S_i)\},$$

ただし $\bar{S} = \sum_{i=1}^{a}\pi_i S_i$ であり, $H(S)$ は *von Neumann entropy* である．

誤り確率 $P_e(2^{nR}, n)$ は任意に平均誤り確率の最小値

$$\min_{\mathcal{W},X}\bar{P}(\mathcal{W},X)$$

か最大誤り確率の最小値

$$\min_{\mathcal{W},X}P_{\max}(\mathcal{W},X)$$

を取ることができる．これらの誤り確率は

$$\bar{P}(\mathcal{W},X) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}P_j(\mathcal{W},X),$$

$$P_{\max}(\mathcal{W},X) = \max_{1\le j\le M}P_j(\mathcal{W},X),$$

で定義される．ただし

$$P_j(\mathcal{W},X) = 1 - Tr[S_{w^j}X_j]$$

は $\sum_{j=1}^{M}X_j \le I$ を満たす正作用素測度 $X = \{X_j\}$ に関連する通常の誤り率である．ここで S_{w^j} は符号ブロック $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \ldots, w^M\}$ から選ばれた符号語 w^j に対応する密度作用素である．ランダム

* 〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学工学部共通講座. Dept. of Applied Science, Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Tokiwadai 2-16-1, Ube, 755-8611 Japan. E-mail: yanagi@yamaguchi-u.ac.jp

† 〒756-0884 小野田市大学通 1-1-1　山口東京理科大学基礎工学部電子・情報工学科. Dept. of Electronics and Computer Science, Faculty of Fund. Engineering, Tokyo University of Science in Yamaguchi, Daigakudori 1-1-1, Onoda, 756-0884 Japan. E-mail: furuichi@ed.yama.tus.ac.jp

‡ 〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学工学部共通講座. Dept. of Applied Science, Faculty of Enginnering, Yamaguchi University, Tokiwadai 2-16-1, Ube, 755-8611 Japan. E-mail: kuriyama@yamaguchi-u.ac.jp

符号化法が用いられたとき, (1) で定義された量子信頼性関数に対する下界は

$$E(R) \geq E_r^q(R) \equiv \max_{\pi} \sup_{0<s\leq 1} \{\mu_q(s,\pi) - sR\},$$

であることが予想されている. ただし $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_a\}$ は $\sum_{i=1}^a \pi_i = 1$ を満たす先験確率分布である. また

$$\begin{aligned} \mu_q(s,\pi) &= -\log G(s), \\ G(s) &= Tr[A(s)^{1+s}], \\ A(s) &= \sum_{i=1}^a \pi_i S_i^{\frac{1}{1+s}} \end{aligned}$$

とおく. ただし各 S_i は入力アルファベット集合 $A = \{1, 2, \ldots, a\}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における出力の量子状態への量子通信路 $i \to S_i$ の出力状態に対応する密度作用素である. Holevo [11], Ogawa and Nagaoka [12] では $\mu_q(s,\pi)$ が $-1 < s \leq 1$ で凹関数であることの予想がされているがまだ証明はされていなかった.

Theorem 2 ([7]) 次が成り立てば $\mu_q(s,\pi)$ は $-1 < s \leq 1$ で凹関数である. $A(s)$ が *invertible* のとき

$$Tr[A(s)^s \sum_{j=1}^a \pi_j S_j^{\frac{1}{1+s}} (\log S_j^{\frac{1}{1+s}})^2$$

$$-A(s)^{-1+s} (\sum_{j=1}^a \pi_j S_j^{\frac{1}{1+s}} \log S_j^{\frac{1}{1+s}})^2] \geq 0. \tag{2}$$

証明

$$\frac{\partial \mu_q(s,\pi)}{\partial s} = -G(s)^{-1} G'(s),$$

だから次を得る.

$$\frac{\partial \mu_q(s,\pi)}{\partial s^2} = G(s)^{-2}(G'(s)^2 - G(s)G''(s)).$$

[11] の P35 の公式より

$$\begin{aligned} & G'(s) \\ = \;& Tr[A(s)^s (A(s) \log A(s) + (1+s)A'(s))] \\ = \;& -Tr[A(s)^s \Delta H(s,\pi)], \end{aligned}$$

ただし

$$\Delta H(s,\pi) = H(A(s)) - \sum_{i=1}^a \pi_i H(S_i^{\frac{1}{1+s}}).$$

簡単な計算により

$$\begin{aligned} & G''(s) \\ = \;& Tr[A(s)^{-1+s}\{A(s)^2(\log A(s))^2 \\ & +s(1+s)A'(s)^2\}] \\ = \;& Tr[A(s)^{-1+s}\{A(s)(2(1+(1+s)\log A(s)) \\ & A'(s) + (1+s)A''(s))\}], \end{aligned} \tag{3}$$

ただし

$$A'(s) = -\frac{1}{(1+s)^2} \sum_{i=1}^a \pi_i S_i^{\frac{1}{1+s}} \log S_i, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A''(s) &= \frac{1}{(1+s)^4} \sum_{i=1}^a \pi_i S_i^{\frac{1}{1+s}} \\ & \qquad (2\log S_i^{1+s} + (\log S_i)^2). \end{aligned} \tag{5}$$

(4), (5) を (3) に代入すると

$$\begin{aligned} & G''(s) \\ = \;& Tr[A(s)^{-1+s}\{H(A(s))^2 + \frac{s}{1+s} \\ & (\sum_{i=1}^a \pi_i H(S_i^{\frac{1}{1+s}}))^2 \\ & -2H(A(s)) \sum_{i=1}^a \pi_i H(S_i^{\frac{1}{1+s}}) \\ & + \frac{1}{1+s} \sum_{i=1}^a \pi_i S_i^{\frac{1}{1+s}} \sum_{j=1}^a \pi_j S_j^{\frac{1}{1+s}} (\log S_j^{\frac{1}{1+s}})^2\}] \\ = \;& Tr[A(s)^{-1+s}\{H(A(s))^2 \\ & -2H(A(s)) \sum_{i=1}^a \pi_i H(S_i^{\frac{1}{1+s}}) \\ & +(\sum_{i=1}^a \pi_i H(S_i^{\frac{1}{1+s}}))^2 \\ & + \frac{1}{1+s} \sum_{i=1}^a \pi_i S_i^{\frac{1}{1+s}} \sum_{j=1}^a \pi_j S_j^{\frac{1}{1+s}} (\log S_j^{\frac{1}{1+s}})^2 \\ & - \frac{1}{1+s} (\sum_{i=1}^a \pi_i H(S_i^{\frac{1}{1+s}}))^2\}]. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで

$$\tilde{G}''(s) = Tr[A(s)^{-1+s} \Delta H(s,\pi)^2]. \tag{7}$$

とおくと Cauchy-Schwarz の不等式より

$$G'(s)^2 - G(s)\tilde{G}''(s) \leq 0.$$

したがってもし

$$\tilde{G}''(s) \leq G''(s), \tag{8}$$

が成り立てば $H(A(s))$ は $A(s)^{-1+s}$ と可換だから (6), (7) から (8) は定理の結論を導く. q.e.d.

3 問題解決までの経緯

Theorem 3 ([13]) $a=2, \pi_1=\pi_2=\frac{1}{2}, dim[\mathcal{H}]=2$ のとき $0\le s\le 1$ に対して (2) が成り立つ.

Theorem 4 ([5]) $a=2$, $\pi_1=\pi_2=\frac{1}{2}$, $dim[\mathcal{H}]=n$ のとき $0\le s\le 1$ に対して (2) が成り立つ.

今回次のように最終的な解決ができた.

Theorem 5 a 任意, π 任意, $dim[\mathcal{H}]=n$ のとき $0\le s\le 1$ に対して (2) が成り立つ.

証明するには次の数学的な結果を必要とする.

Definition 1 ([1], [2]) f, g を実数値連続函数とする. 任意の $a, b\in D$ に対して

$$(f(a)-f(b))(g(a)-g(b))\ge 0\ (resp. \le)$$

が成り立つとき (f,g) は *domain* $D\subset\mathbb{R}$ 上の *monotone(resp. antimonotone) pair* という.

Proposition 1 ([1], [2], [4]) (f,g) が *monotone (resp. antimonotone) pair* のとき D に含まれる *spectra* をもつ *self adjoint matrices* A, X に対して

$$Tr[f(A)Xg(A)X]\le Tr[f(A)g(A)X^2]\ (resp. \ge)$$

が成り立つ.

Proof of Proposition 1. A は diagonal matrix と仮定してよい.

$A=diag(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, $X=(x_{ij})$ とおく.
(f,g) が monotone pair のとき任意の $a, b\in D$ に対して

$$f(a)g(b)+f(b)g(a)\le f(a)g(a)+f(b)g(b)$$

が成り立つので次の式を得る.

$$\begin{aligned}
& Tr[f(A)Xg(A)X] \\
=\ & \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g(t_k)x_{kk}^2 \\
& +\sum_{k<j}\{f(t_k)g(t_j)+f(t_j)g(t_k)\}x_{kj}^2 \\
\le\ & \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g(t_k)x_{kk}^2 \\
& +\sum_{k<j}\{f(t_k)g(t_k)+f(t_j)g(t_j)\}x_{kj}^2 \\
=\ & Tr[f(A)g(A)X^2].
\end{aligned}$$

(f,g) が antimonotone のときも同様に証明される.
q.e.d.

Proof of Theorem 5. 次のような Jensen's inequality (e.g. [4], [9]) に注目する.
$\sum_{i=1}^{a} C_i^* C_i=I$ のとき任意の self adjoint operators X_i に対して次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{a} C_i^* X_i^2 C_i\ge(\sum_{i=1}^{a} C_i^* X_i C_i)^2.$$

ここで

$$A_i=S_i^{\frac{1}{1+s}},\quad X_i=\log A_i,$$
$$C_i=(\pi_i A_i)^{1/2}(\sum_{k=1}^{a}\pi_k A_k)^{-1/2}\ (i=1,2,\ldots,a)$$

とおくと $\sum_{i=1}^{a} C_i^* C_i=I$ となるので次を得る. 以下 $\Delta=\sum_{k=1}^{a}\pi_k A_k$ とおく.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{a}\Delta^{-1/2}(\pi_i A_i)^{1/2}(\log A_i)^2(\pi_i A_i)^{1/2}\Delta^{-1/2} \\
\ge\ & \left(\sum_{i=1}^{a}\Delta^{-1/2}(\pi_i A_i)^{1/2}\log A_i(\pi_i A_i)^{1/2}\Delta^{-1/2}\right)^2.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
& \Delta^{-1/2}\sum_{i=1}^{a}(\pi_i A_i)^{1/2}(\log A_i)^2(\pi_i A_i)^{1/2}\Delta^{-1/2} \\
\ge\ & \left(\Delta^{-1/2}(\sum_{i=1}^{a}\pi_i A_i\log A_i)\Delta^{-1/2}\right)^2.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{a}(\pi_i A_i)^{1/2}(\log A_i)^2(\pi_i A_i)^{1/2} \\
\ge\ & (\sum_{i=1}^{a}\pi_i A_i\log A_i)\Delta^{-1}(\sum_{i=1}^{a}\pi_i A_i\log A_i).
\end{aligned}$$

ここで

$$(\pi_i A_i)^{1/2}(\log A_i)^2(\pi_i A_i)^{1/2}=\pi_i A_i(\log A_i)^2$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
& \Delta^{s/2}\sum_{i=1}^{a}\pi_i A_i(\log A_i)^2\Delta^{s/2} \\
\ge\ & \Delta^{s/2}(\sum_{i=1}^{a}\pi_i A_i\log A_i)\Delta^{-1}(\sum_{i=1}^{a}\pi_i A_i\log A_i)\Delta^{s/2}.
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
& Tr\left[\Delta^s \sum_{i=1}^{a} \pi_i A_i (\log A_i)^2\right] \\
\geq \quad & Tr\left[\Delta^s (\sum_{i=1}^{a} \pi_i A_i \log A_i) \Delta^{-1} (\sum_{i=1}^{a} \pi_i A_i \log A_i)\right].
\end{aligned}
$$

$f(x) = x^s$ $(s \geq 0)$, $g(x) = x^{-1}$ だから (f, g) は antimonotone pair である. Proposition 1 より

$$
\begin{aligned}
& Tr\left[\Delta^s \sum_{i=1}^{a} \pi_i A_i (\log A_i)^2\right] \\
- \quad & Tr\left[\Delta^{s-1} (\sum_{i=1}^{a} \pi_i A_i \log A_i)^2\right] \geq 0.
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Remark 1 $-1 < s < 0$ の場合 *(2)* が成り立つかという問題が新たに提唱される.

参考文献

[1] J.C.Bourin, Some inequalities for norms on matrices and operators, Linear Algebra and its Applications, vol.292, pp.139-154, 1999.

[2] J.C.Bourin, Compressions, Dilations and matrix inequalities, RGMIA Monographs, Victoria University, 2004.

[3] M.V.Burnashev and A.S.Holevo, On reliability function of quantum communication channel, Problems of Information Transmission, vol.34, no.2, pp.97-107, 1998.

[4] J.I.Fujii and M.Fujii, Jensen's inequalities on any interval for operators, Proc. 3rd Int. Conf. Nonlinear Analsis and Convex Analysis, pp.29-39, 2004.

[5] J.I.Fujii, A trace inequality arising from quantum information theory, Linear Algebra and its Applications, vol.400, pp.141-146, 2005.

[6] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, A remark on concavity of the function appearing in quantum reliability function, ERATO-2002.

[7] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, A sufficient condition on concavity of the auxiliary function appearing in quantum reliablity function, INFORMATION, vol.6, no.1, pp.71-76, 2003.

[8] R.G.Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley and Sons, 1968.

[9] F.Hansen and G.K.Pedersen, Jensen's operator inequality, Bull. London Math. Soc., vol.35, pp.553-564, 2003.

[10] A.S.Holevo, The capacity of quantum channel with general signal states, IEEE Trans. IT., vol.44, no.1, pp.269-273, 1998.

[11] A.S.Holevo, Reliability function of general classical-quantum channel, IEEE Trans. IT., vol.46, no.6, pp.2256-2261, 2000.

[12] T.Ogawa and H.Nagaoka, Strong converse to the quantum channel coding theorem, IEEE Trans. IT., vol.45, no.7, pp.2486-2489, 1999.

[13] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, On trace inequalities and their applications to noncommutative communication theory, Linear Algebra and its Applications, vol.395, pp.351-359, 2005.