初等･中等教育における数学教材としての多角形のデュードニー分割

佐藤好久（山口大学教育学部）
石田めぐみ、北村貴史、菅　竜次
（山口大学教育学部数学教育選修平成21年卒業）

Dudeney dissections of polygons as mathematical teaching materials in the elementary or secondary education

Yoshihisa SATO, Megumi ISHIDA, Takafumi KITAMURA, Ryuji SUGA
(Department of Mathematics, Faculty of Education, Yamaguchi University)

(Received September 25, 2009)

§１．初等・中等教育における多角形のデュードニー分割の位置づけ

小・中学校、および、高等学校の算数・数学で学習する幾何学はユークリッド幾何学である。この幾何学は紀元前４世紀後半のギリシャの数学者ユークリッド（Euclid）が著した『原論』に源泉があるとされ、『原論』は当時の測量などで知られていた技術・知識を論証的方法、および、演繹的方法により体系化したものである。『原論』で展開される幾何学は、現代の立場で言えば、公理的構成による幾何学であり、公理、定義、命題による演繹的論証方法により理論展開されている。これに対し、19世紀を代表する数学者の一人であるクライン（F.Klein）は幾何学研究の新しい指針を提唱した。それは、今日ではエルランゲン・プログラムと呼ばれているもので、ある種の変換により図形を分類し、また、図形にある変換を施したときに不変な性質を調べる学問が幾何学であると考えた。この考え方により、19世紀の非ユークリッド幾何（ここでは、双曲幾何）の発見以降の様々な幾何学を統一的に見ることができるようになった。この考え方によれば、ユークリッド幾何は平行移動、回転、鏡映などの合同変換（剛体移動）で不変な図形の性質を扱う幾何学であると言うことができる。

数学教育における幾何教育の内容は数学の現代化運動（new math）を挟んで色々と変化していったが、初等・中等教育における算数・数学の幾何の目的は、図形に関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、幾何学的思考力と幾何学的感性を養うことにあると考えられる。算数・数学の現行学習指導要領（平成10年、平成11年。平成15年一部改正）によれば、算数・数学の幾何分野の目標は、「算数的、数学的活動を通じて図形の基礎的な知識と技能を身に付け、基礎的な概念や原理・法則の理解を深めることとし、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。」ことである。平面図形や空間図形についての観察、操作や実験を通して数学的体験をすることにより、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、数理的かつ論理的に考察する基礎を培うことである。特に、算数の学習指導要領の図形に関する内容では、基本的な図形の作図だけでなく、平面上の図形の敷き詰め（平面のタイル張り）を取り扱うことにしている。算数・数学的活動により図形の面白さを体現し、図形の基礎的な概念や原理・法則を理解するためには、図形の「対称性」を考察することが望ましいと考えられる。これは、

クラインのエルランゲン・プログラムで提唱された変換群による幾何の教育活動に通じるものである。我々は身の回りにて、タイル張りを利用・応用したデザインを多く見出すことができるので、平面のタイル張りは図形の対称性についての理解を深めるだけでなく、日常生活と幾何との関連について考察させるための学習活動に適したものであると考えられる。

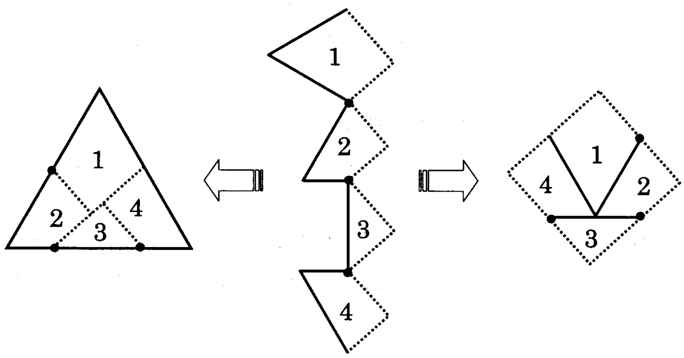


図１．１　カンタベリー・パズル（正三角形から正方形へのデュードニー分割）

表題にある多角形のデュードニー（Dudeney）分割とは、多角形を線分で区切って、いくつかの断片に切り分け、それらを鎖状に繋げたままで、別の多角形へと変形するときの分割の仕方のことである。論文[1,2,4,5]の中で、デュードニー分割が学術的に研究されている。デュードニー分割で最も有名なものはカンタベリー・パズルと呼ばれる、正三角形を正方形へ変形するデュードニー分割である。

デュードニー分割を考える際、幾何学的には多角形に制限を加えなければ面白くない。例えば、凸多角形から凸多角形へのデュードニー分割を考えたとき、全ての凸多角形がデュードニー分割可能というわけではない。秋山−中村は論文[1,2]の中で、デュードニー分割可能な凸多角形について研究し、それらの分割の構造について調べている。彼らの優れた洞察力により、デュードニー分割と平面のタイル張りとの関連が明らかになった。デュードニー分割では平行移動、点対称変換といった最も基本的な合同変換を扱うだけでなく、平面のタイル張りとも関連があり、実際にデュードニー分割を作図や工作をすることにより幾何学的感性を養うことができる。このような点から考察しても、図形の対称性を学ぶための教材として優れたものの1つであると考えることができる。

デュードニー分割が教材として適切なものであることに加えて、テレビ番組等での秋山仁氏の優れたパフォーマンスもあって、デュードニー分割を取り上げているホームページがたくさんある。しかしながら、そのほとんどはカンタベリー・パズルを紹介する程度で、デュードニー分割の数理性に触れているものはない。また、秋山−中村の論文[1,2]には、説明不足なところや誤解を受けやすい記述の命題がある。本論文では、説明不足なところを補いながら多角形のデュードニー分割を解説し、誤解を受けやすい命題を訂正することを目的とする。特に、三角形から四角形へのデュードニー分割について、論文[1,2]では取り上げられなかった結果についても紹介する。これによりデュードニー分割の基礎理論がどこにあるかを明確にし、初等・中等教育の教材としての利用について考察する。

§2. 多角形のデュードニー分割とデュードニー分割可能であるための必要条件

一般に、面積の等しい2つの多角形α, βが与えられると、その一方の多角形αを上手くいくつかの多角形（断片）に分解し、それらを他方の多角形 β へ移して多角形 β を組み立てることができること（**多角形の分割合同性**，ボヤイ–ケルビンの定理）が知られている。図 1.1 に図示されている分解の仕方は、この分解合同の分割の仕方に制限を加えたもので、イギリスの有名なパズル作家のデュードニー（H.E.Dudeney）が発表した有名なパズル**カンタベリー・パズル** [3] の解答を与えている。

図 1.1 が示すように正三角形αを切り分けて鎖状に繋ぎ、辺（の一部）と辺（の一部）を貼り合わせれば、正方形βを得ることができる。このような分解の仕方を「正三角形と正方形の間のデュードニー分割」という。一般の多角形のデュードニー分割は次のように定義される。

定義 2.1：α, βを面積の等しい多角形とする。分割線が頂点を通らないように、多角形α上に分割線を描いていくつかの断片に分割するものとする。そして、αの各断片に蝶番のための点をとる。ただし、

(i) 蝶番点（蝶番で繋ぐために選ばれる点）は多角形αの辺と分割線との交点である。

(ii) 1つの蝶番点から2本以上の分割線が出ることはない。

αの各断片を蝶番で繋いだとき、断片は1つの鎖状に繋がれるものとする。αの断片の1つを固定し、隣接性を保ちながら残りの断片をそのまわりに回転させて、多角形βを形成することができたとする。このとき、

(iii) αの分割線はβの辺（の一部）となる。

(iv) αの辺はβの内部にある。

(v) αの断片を回転させてβを作るとき、断片を裏返すことはしてはいけない。

を満たすならば、この分割をαの多角形βへの **デュードニー分割**（*Dudeney dissection of* α *to* β）という。デュードニー分割はいくつかの断片に分けるだけでなく、蝶番点の置き方を指定することを含んでいることに注意する。また、βをαの **デュードニー・パートナー**（*Dudeney partner of the dissected* α）と呼ぶことにする。定義から明らかなように、αはβのデュードニー・パートナーでもあり、そのときのβの分解はαの分解に対応して定まる分割により与えられる。

研究対象として、また、図形の対称性を捉える意味でも面白いものとするために、デュードニー分割を考える対象α, βは、特に断らない限りどちらも凸多角形であるとする。

デュードニー・パートナーが互いに合同であるとき、そのデュードニー分割を **合同デュードニー分割**（*congruent Dudeney dissection*）と言う。次の図 2.1 は合同デュードニー分割の例である。

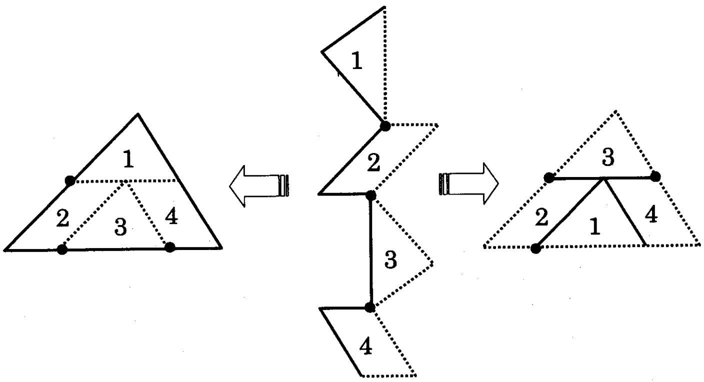


図2.1　三角形の合同デュードニー分割

ボヤイ－ケルビンの定理が示すように、面積が等しい2つの多角形 α , β は分解合同である。すなわち、一方の多角形 α を適当にいくつかの断片に分解し、それらを多角形 β へ移して多角形 β を組み立てることができる。ハドヴィゲール－グリュールの定理は、この移すときに使われる合同変換が平行移動と回転だけで十分である、鏡映や並進鏡映のように裏返して移すことはしないでよいことを主張している。次のデュードニー分割に関する基本問題は、分解された断片を他方の多角形へ移すときに、それら断片を鎖状に繋いだままで180°回転と平行移動のみで移して他方の多角形を組み立てることができないかを問う問題でもある：

問題：(1)　面積の等しい多角形は互いにデュードニー・パートナーになり得るか？
　　　(2)　デュードニー分割可能な凸多角形はどんなものか？

次の命題2.1は凸多角形がデュードニー分割可能であるための必要条件を与え、必ずしも凸多角形がある凸多角形へのデュードニー分割をもつとは限らないことを示している。したがって、上記の問題 (1) は一般には成立しない。

命題2.1

凸多角形へのデュードニー分割をもつ凸多角形は、三角形、四角形、五角形、六角形のいずれかである。

(証明)　α を凸多角形へのデュードニー分割をもつ任意の凸多角形とし、多角形 β を α のデュードニー・パートナーとする。α は凸 n 角形とする。このときの α , β の分解は互いに対応するものとする。α の辺は β の分割線として、その内部にあるので、α の各頂点における内角は β の内部に現れる。β の内部にある点 v を α の頂点が集まる点とする。点 v のまわりに集まる α の頂点の個数が2の場合と3以上の場合に分けて考察する。

(i)　2個の場合：点 v が α の2つの頂点 v_1, v_2 が集まる場合である。

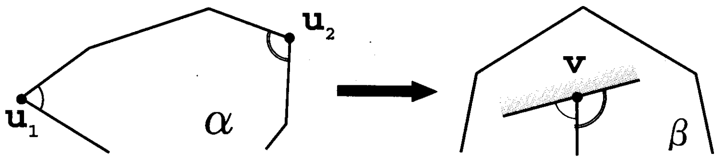


図2.2

頂点は蝶番点ではないので、点 v は分割線の内部にある点となる。よって、このような点 v のまわりに集まる α の内角の和は π である。

(ii)　3個以上の場合：次のような2つの場合がある。一方は点 v がある分割線の内部にある場合で、もう一方は分割線上にない場合である。

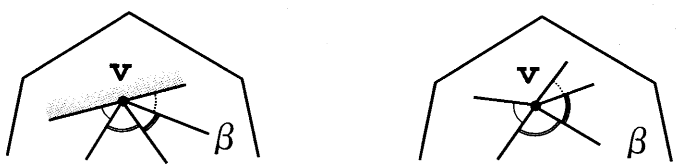


図2.3

このような点vのまわりに集まるαの内角の和は2π以下である。

(i)のような、αの内角が丁度2つ集まるようなβ内の点vが全部でℓ個あるとし、それらを$w_1, w_2, \ldots, w_\ell$とする。各w_iに対して、$\angle w_i$を点w_iに集まるαの内角の和を表すとすると、$\angle w_i = \pi$である。(ii)のような、αの内角が3つ以上集まるようなβ内の点vが全部でm個あるとし、それらを$v_1, v_2, \ldots, v_m$とする。各v_jに対して、$\angle v_j$を点v_jに集まるαの内角の和を表すとすると、$\angle v_j \leq 2\pi$である。αはn角形なので、αの内角の総和は$(n-2)\pi$に等しい。これはβ内の点w_iやv_jの$\angle w_i$, $\angle v_j$の総和に等しい。

$$(n-2)\pi = (\angle w_1 + \angle w_2 + \cdots + \angle w_\ell) + (\angle v_1 + \angle v_2 + \cdots + \angle v_m)$$
$$\leq \ell\pi + 2m\pi = (\ell + 2m)\pi$$

よって、$\ell + 2m + 2 \geq n$を満たす。

一方、(ii)のような点v_jに集まるαの内角の個数、すなわち、対応するαの頂点の個数をk_jとおく。αの頂点の総数はnなので、$n = 2\ell + (k_1 + k_2 + \cdots + k_m)$ある。各$k_j$は$k_j \geq 3$であるので、$n \geq 2\ell + 3m$である。よって、$\ell + 2m + 2 \geq n \geq 2\ell + 3m$なので、$2 \geq \ell + m$である。これを満たす自然数の組$(\ell, m)$は$(\ell, m) = (2,0), (1,1), (1,0), (0,1), (0,2)$である。こうして、$n \leq \ell + 2m + 2 \leq 6$でなければならない。したがって、凸多角形$\alpha$は三角形、四角形、五角形、六角形のいずれかである。□

命題2.1の証明から、αのデュードニー・パートナーβへのαの頂点の集まり方がある程度わかる。§4で述べるように、この証明からデュードニー分割の分割構造の情報を得ることができる。

多角形αの1つの辺上の点のまわりにαを180°回転したものをαの **半転** (*half-turn*) と呼ぶ。多角形αとその半転$\bar{\alpha}$との和集合$\alpha \cup \bar{\alpha}$をαの**連結**という。

多角形αの連結$\alpha \cup \bar{\alpha}$をタイルとして、2つの1次独立な方向への平行移動を繰り返し適用して平面のタイル張りができるとき、多角形αは***p*2-条件**を満たすという。また、このときのタイル張りをαの***p*2-タイル張り**（αをモチーフとする*p*2-型の平面繰り返し紋様）と言う。

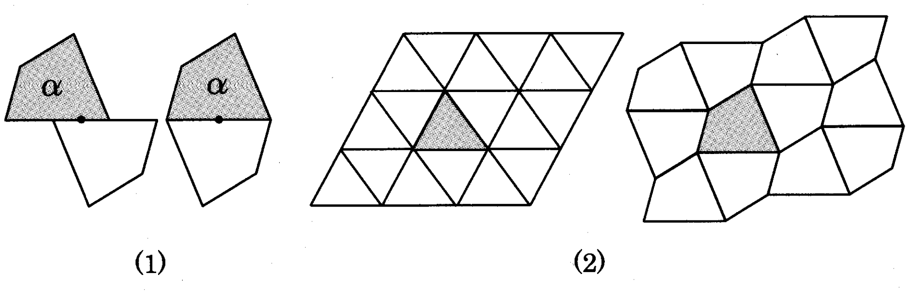


図2.4
(1)多角形の半転とその連結　(2)三角形と四角形の*p*2- タイル張り

命題2.2
凸多角形αが凸多角形へのデュードニー分割をもつとする。このとき、αは*p*2- 条件を満たす。

（証明）Hを多角形αの任意の蝶番点とする。このとき、蝶番点Hから1本の分割線が出ている。Hから出る分割線を共有する２つの断片をそれぞれα_1, α_2とおく。多角形αの辺上の点S, T、および、分割線上の点Pを図２.５のようにとる。

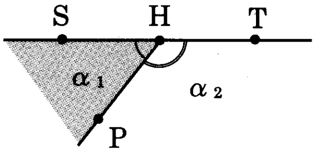


図２.５

断片α_1を固定して、そのまわりに残りの断片を回転させて、デュードニー・パートナーβを形成すると、断片α_2は蝶番点Hのまわりで半転される。このとき、半転による点Pに対応する点をQとおくと、３点P, H, Qは同一直線上にある。同様に、断片α_2を固定して残りの断片を回転してβを形成するときも、断片α_1は蝶番点Hのまわりで半転される。

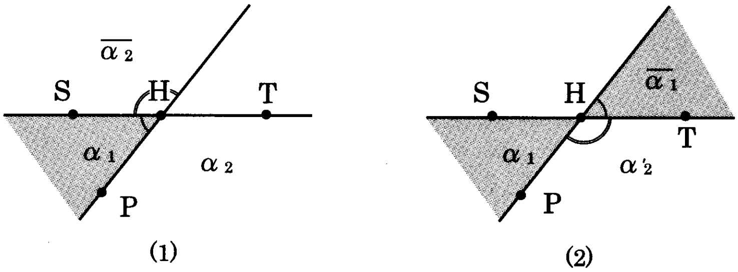


図２.６

(1)α_1を固定　(2)α_2を固定

よって、多角形αの辺上のこのような蝶番点のまわりでこの操作を行うと、多角形αは有限個のその半転によって、重なることなく隙間なく取り囲まれる。αを囲む各半転$\bar{\alpha}$のそれぞれで同様の操作をすると、各$\bar{\alpha}$が有限個のαで重なることなく隙間なく囲まれる。このような操作を繰り返すことで、図２.７のように、αと$\bar{\alpha}$のタイルで平面がタイル張りされる。(図２.７では、蝶番点が各辺の中点である特別な状況のものである。)

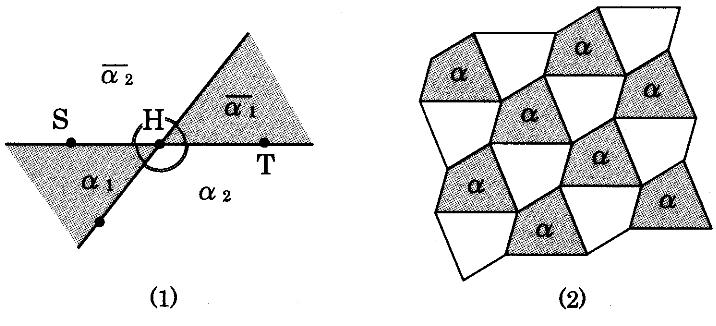


図２.７

(1)αとその半転　(2)αとその半転によるタイル張り

αとその半転$\bar{\alpha}$は隣接しているので、このようにして得られた平面のタイル張りはαの連結$\alpha \cup \bar{\alpha}$を1つのタイルとするタイル張りであり、これをモチーフとする平面の繰り返し紋様であると考えることができる。この繰り返し紋様を不変にする合同変換は向きを保つものに限られ、180°回転を主体として得られることになる。2つの異なる180°回転の合成は平行移動であること、および、180°回転と平行移動の合成は180°回転であることに注意すると、この平面の繰り返し紋様を不変にする合同変換は平行移動と180°回転のみであることがわかる。よって、連結$\alpha \cup \bar{\alpha}$によるタイル張りはαの$p2$型の平面繰り返し紋様であることがわかる。したがって、多角形αは$p2$–条件を満たす。□

多角形αにいくつかの断片への切り分け方を指定する線分による模様（分割構造）が与えられているとき、これで分割したものが実際にデュードニー分割となるかどうかの判断の方法を命題２.２は示唆する。すなわち、分割構造が指定されたαの$p2$–タイル張りをいろいろと考え、分割線を周にもつ多角形がその$p2$–タイル張りの中に現れるかどうかを考えればよい。現れるような$p2$–タイル張りを見つけ出すことができれば、αはその分割構造をもつデュードニー分割可能であると言う事ができる。どんなにがんばっても見つけ出すことができないときは、その分割線の与え方ではデュードニー分割することはできないと言う事ができる。

図２.４からもわかるように、任意の三角形や四角形は$p2$–条件を満たす。$p2$–条件を満たす五角形や六角形はどのようなものであろうか。現在のところタイル張り可能な凸五角形については完全には知られていないが、$p2$–条件を満たす凸五角形は少なくとも１組の２つの辺が互いに平行でなければならないことが簡単な初等幾何の議論でわかる。このような凸五角形を**擬平行五角形**という。タイル張り可能な凸六角形は全部で３種類だけあることが知られていて、その中で$p2$–条件を満たす六角形は**擬平行六角形**と呼ばれる、６つの辺のうち少なくとも１組の２つの辺が平行かつ長さが等しいような六角形である。こうして、凸多角形がデュードニー分割可能であるための必要条件を得ることができた。

定理２.３

凸多角形αが凸多角形へのデュードニー分割をもつならば、αは三角形、四角形、擬平行五角形、擬平行六角形のいずれかである。

次節以降では、三角形や四角形の間のデュードニー分割について考察する。

§３. 三角形のデュードニー分割

この節では、三角形のデュードニー分割について考察する。「三角形→擬平行五角形」、「三角形→擬平行六角形」といったデュードニー分割も考えられるが、ここでは「三角形→三角形」、「三角形→四角形」のタイプのデュードニー分割を考察する。

三角形から三角形へのデュードニー分割

定理３．１

任意の三角形は三角形への合同ではないデュードニー分割をもつ。また、任意の三角形は合同デュードニー分割をもつ。

（証明）三角形αを△ABCとし、辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とおく。点Dを線分 MN 上に任意にとる。また、辺BC 上に２点E, F を EF = BE + FC となるように選び、線分 DE, DF を引く。このとき、線分 MN, DE, DF により三角形αを分割したとき、これがαの（別の）三角形βへのデュードニー分割を与えることがわかる。

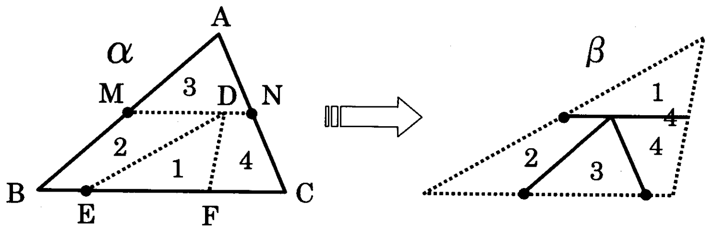


図３．１
三角形αから三角形βへのデュードニー分割

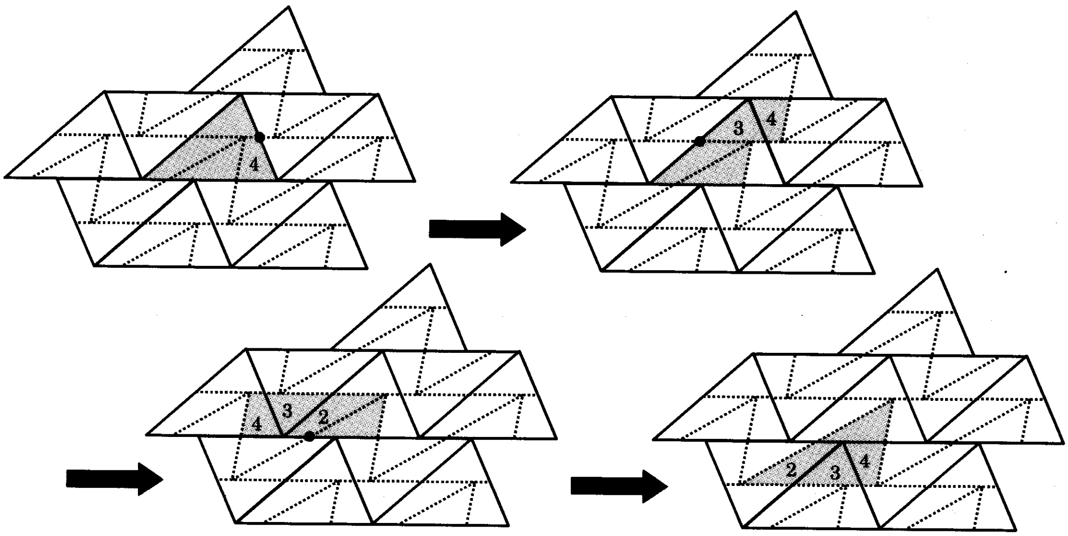


図３．２

上記の分割線のとり方で、線分 MN 上の点Dをその中点とし、点Dを通り辺AB に平行な直線と辺BC との交点をE, 点Dを通り辺AC に平行な直線と辺BC との交点をFとすると、三角形αの合同デュードニー分割を得る。（図２.１）□

三角形から四角形へのデュードニー分割

２つの平行四辺形α，βに対して、αとβが**安定重ね合わせの位置**にあるとは、これら２つの平行四辺形α，βが次の条件 (i), (ii)を満たすように配置されていることを言う：

(i)：αとβが頂点の1つを共有する。
(ii)：αの他の頂点の1つがβの辺上、または、辺の延長線上にある。逆に、βの他の頂点の1つがαの辺上、または、辺の延長線上にある。

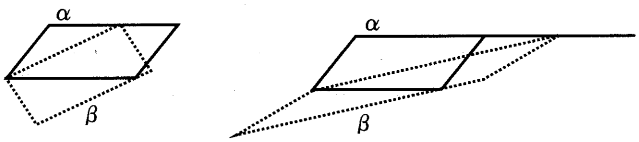


図3.3

安定重ね合わせの位置にある平行四辺形は互いに面積が等しいことが簡単にわかる。
タイル張り重ね合わせ法を用いて、三角形と平行四辺形の間のデュードニー分割を構成することができる。それが次の定理3.2である。

定理3.2
任意の三角形は平行四辺形へのデュードニー分割をもつ。

(証明) △ABCから平行四辺形へのデュードニー分割を4段階で構成する。
<u>第1段階：安定重ね合わせの位置にある平行四辺形の構成</u>
△ABCとその1つの辺の中点で半転して得られた三角形との連結である平行四辺形と安定重ね合わせの位置にある等積な平行四辺形を以下の手順で構成する。

(1) △ABCを辺BCの中点で半転させ、連結である平行四辺形ABDCを作る。
(2) 半直線AB上にAC＝CEとなる点Eをとる。このとき、線分CE上の点Fを任意に選ぶ。
(3) 点Dを通り線分BFに平行な直線と半直線ACとの交点をGとおく。点Eを通り線分CDに平行な直線と直線DGとの交点をHとおく。このとき、線分DH上の点Iを任意に選ぶ。
(4) 四角形BJIFが平行四辺形となるように、点Jを直線DG上にとる。

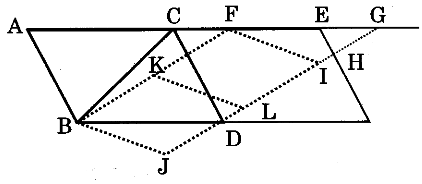


図3.4

<u>第2段階：平行四辺形ABDCと平行四辺形BJIFに対する安定重ね合わせ位置に適合したタイル張りの構成</u>
次の手順でタイル張りを行う：

(1)　それぞれの平行四辺形のコピーを図3.5のように水平方向へ貼り合わせていく。

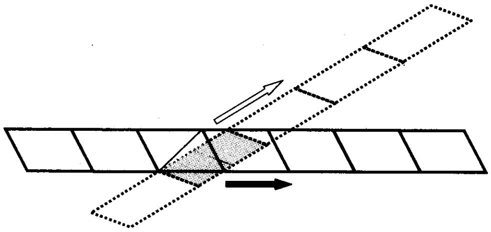


図3.5

(2)　平行四辺形ABDCの水平方向の列をもう1段上に作るために、(1)で作った平行四辺形BJIFの列の中の1つの平行四辺形と安定重ね合わせの位置にあるように平行四辺形ABDCのコピーを置く。新しく置いた平行四辺形ABDCのコピーをもとに、水平方向の平行四辺形ABDCのコピーの列を積み上げる。こうして作った水平方向の平行四辺形ABDCのコピーの2段目の列の中の1つの平行四辺形と安定重ね合わせの位置にあるように平行四辺形BJIFのコピーを置き、水平方向の平行四辺形BJIFのコピーの列を積み上げる。これらの操作を繰り返し、それぞれの上下方向に平行四辺形の列を積み上げていく。これにより、平行四辺形ABDCと平行四辺形BJIFのそれぞれをタイルとするタイル張りを得る。

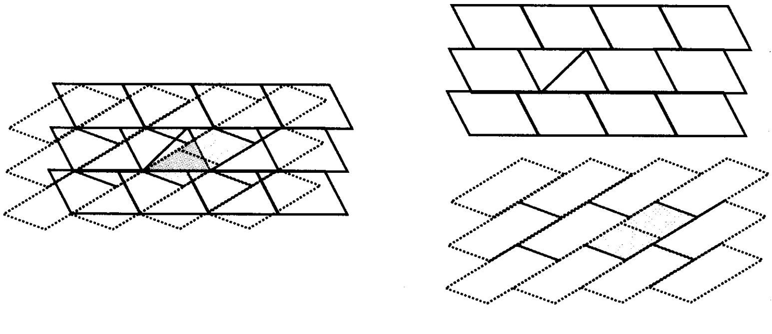


図3.6　平行四辺形ABDCとBJIFのタイル張りの重ね合わせとそれぞれのタイル張り

第3段階：タイル張りの重ね合わせ

第2段階で構成した2つのタイル張りをそれぞれのタイルの中心が一致するように平行移動により重ね合わせる。

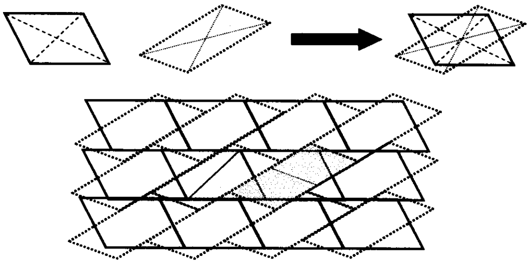


図3.7

第4段階：△ABCの*p*2型タイル張りと平行四辺形BJLKの*p*2型タイル張りの重ね合わせ

平行四辺形ABDCのタイル張りの各タイルに線分BCに対応する対角線を引く。また、平行四辺形BJIFのタイル張りの各タイルに線分KLに対応する中線を引く。このような作業を第3段階で構成した重ね合わせのタイル張りの各タイルに同時に行う。重ね合わせで与えられる模様が求めるべきデュードニー分割の分割線となる。□

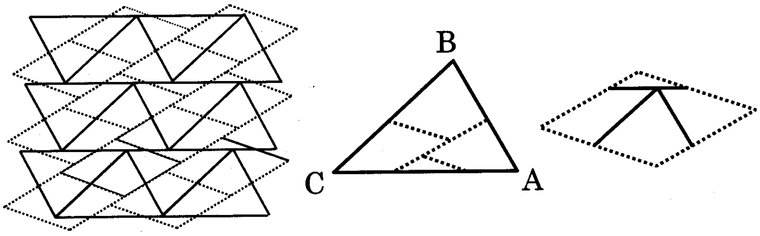


図3.8

点Fと点Iを上手く選ぶと、平行四辺形BJLKがひし形、長方形、正方形などの特殊な平行四辺形になることがある。例えば､カンタベリー･パズルのような三角形から正方形へのデュードニー分割を得ることがある。実際に、タイル張り重ね法を利用してデュードニー分割を構成するとき、次のことが成立することがわかる。証明は論文[6,7]を参照するとよい。：

命題3.3
任意の鋭角三角形は正方形へのデュードニー分割をもつ。

§4.四角形のデュードニー分割

この節では、四角形から四角形へのデュードニー分割について考察する。デュードニー分割の様子を統一的に見るために、「分割構造」という概念を導入する。

多角形αをいくつかの線分で切り分けるとき、その分割線の集まりを**分割線の森**と呼び、分割線の森を多角形αとの相対的位置関係に注意して考察したものを**分割構造**という。

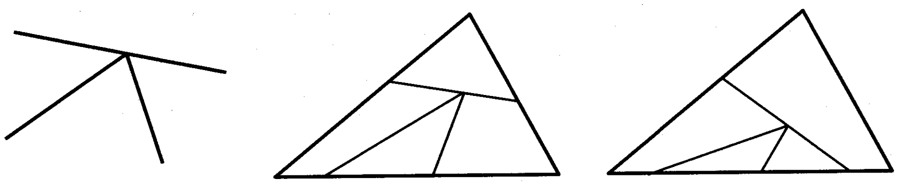
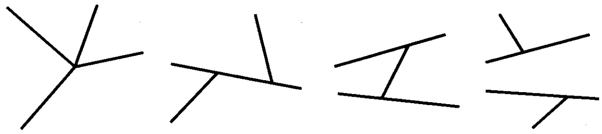


図4.1
分割線と異なる分割構造の例

命題2.1の証明から分割線の森に関する情報を引き出すことができる。三角形αから三角形βへのデュードニー分割を考えたとき､αはβのデュードニー･パートナーでもある。命題2.1の証明の$n=3$の場合より、αの分割線はβの3つの頂点がα内の1つの点に集まるようにしてできなければならないことがわかる。すなわち、αの分割線の森は図4.1のような分割

線の森だけである。

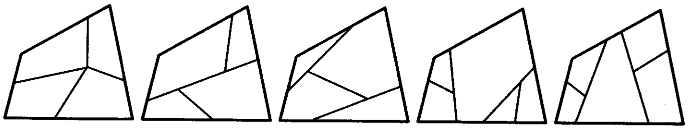
四角形αから四角形βへのデュードニー分割の場合も、αをβのデュードニー・パートナーと考え、αの分割線の様子をβの頂点の集まり方を通して捉える。命題２.１の証明から、$n=4,(\ell,m)=(2,0),(0,1)$である。このことは、(i)２つの頂点が集まる部分が２箇所ある場合、(ii)４つの頂点が１箇所に集まる場合の２つがあることを意味する。したがって、四角形から四角形へのデュードニー分割の分割線の森は図４.２に図示された分割線の森を必ず含まなければならない。



(a)　(b)　(c)　(d)

図４.２

この節では、四角形から四角形へのデュードニー分割で、その分割構造が最も基本的かつ単純なもの（図４.２の分割線の森だけのもの）について考察する。デュードニー分割の定義から、そのような分割構造は次の５つのタイプがあることがわかる。



(A)　(B)　(C)　(D)　(E)

図４.３

分割構造 (A), (B), (C), (D), (E), を分割構造にもつ四角形のデュードニー分割について、次のことが成立する。

定理４.１

(1) 任意の四角形は四角形への分割構造(A)のデュードニー分割をもつ。
(2) 任意の四角形は分割構造(A)の合同デュードニー分割をもつ。
(3) 任意の四角形は四角形への分割構造(B)のデュードニー分割可能である。
(4) 四角形αが分割構造(B)の合同デュードニー分割可能であるための必要十分条件はαが台形であることである。
(5) 任意の四角形αは平行四辺形への分割構造(C)のデュードニー分割をもつ。
(6) 四角形αが分割構造(C)の合同デュードニー分割をもつための必要十分条件はαが$BC=BD$を満たす平行四辺形ABCDであることである。
(7) どの四角形αも、分割構造(D)の四角形へのデュードニー分割をもたない。
(8) 四角形αが分割構造(E)の四角形へのデュードニー分割可能であるための必要十分条件はαが平行四辺形であることである。更に、平行四辺形以外の四角形αは分割構造(E)の多角形（四角形を含む）へのデュードニー分割をもつことができない。

論文[2]の Proposition 5.7 は誤解を受けやすい記述がしてある。石田・北村・菅の平成20年度卒業論文[6]では、この命題を正確に記述し、完全な必要十分条件を与えた。それが定理4.1(4)である。(4)と(7)についてのみ証明する。他の部分の証明は[2,6,7]を参照するとよい。

(証明) (4) α が分割構造(B)のデュードニー分割をもち、そのデュードニー・パートナーを β とする。α の分割構造は β の周（辺）が集まって描かれる。その分割構造が(B)であることは、β の隣接する2つの頂点の内角の和が π であることを意味する。よって、α の分割構造が(B)であるならば、β は台形でなければならない。したがって、α が分割構造(B)の合同デュードニー分割可能であるならば、α は台形である。

台形 α を辺 AD と辺 BC が平行である台形 ABCD とする。α の分割線を図4.4(1)のように引く。ただし、E,F は辺 AB, 辺 DC の中点とし、点 G は辺 AD 上に任意に選ばれる点である。点 H は点 G を通り辺 DC に平行な直線と線分 EF の交点である。点 I を線分 EF 上に AG = IF となるように取り、点 J を辺 BC 上に EH = JC となるように取る。図4.4(2)により、台形 α へのこの分割線の入れ方は分割構造(B)の合同デュードニー分割を与えることがわかる。

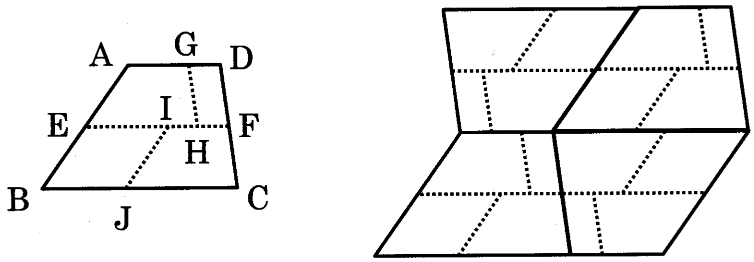


図4.4

(7) α が分割構造(D)の四角形 β へのデュードニー分割をもつものと仮定する。分割構造(D)の場合、6つの蝶番点の中の3点はそれぞれ3つの辺に1つずつ配置されている。よって、分割構造(D)が与える α の $p2$–タイル張りは各辺の中点で半転することにより得られるタイル張りである。そして、1つの辺上にある残り3つの蝶番点はその辺を4等分する内点である。

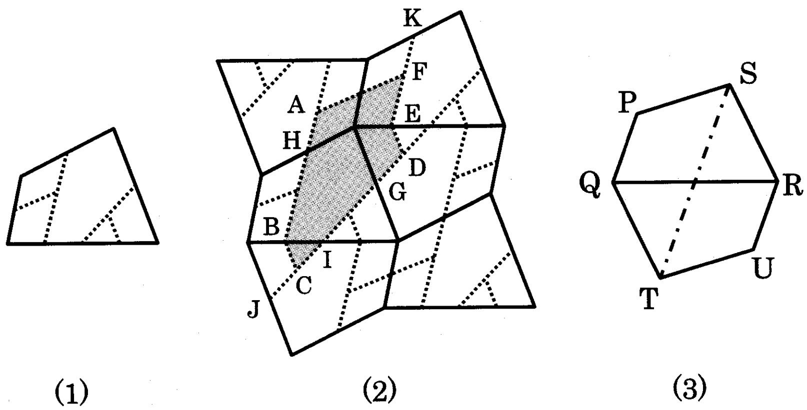


図4.5

αのデュードニー・パートナーβはαの$p2$–タイル張りの中に現れる、図４.５(2)の六角形ABCDEFである。先ほど注意をしたように蝶番点は各辺の中点か４等分点のいずれかであるから、それらの取り方は固定されている。よって、αの分割構造(D)の取り方の自由度は図４.５(2)の青い分割線の取り方の自由度から来るものである。図４.５(2)の状態ではβは四角形ではないので、青い分割線の取り方をいろいろと変えてβが四角形となるようにすることを試みる。

点A（連動して点F）を赤い分割線上を移動させてみても、βの頂点の個数に変動はない。よって、点C（連動して点D）を赤い分割線上を移動させなければならない。赤い分割線の取り方は固定されていることに注意すると、線分BH,GI,AFは必ず独立した３つの辺に含まれることがわかる。したがって、βが四角形であるためには、K,E,D（連動してH,B,C）が同一直線上になければならない。このようなことが可能な四角形は図４.５(3)のような、辺PQと線分STが平行であるような四角形PQRSである。四角形αをこのような四角形として、βが四角形となるように点Cを移動させると、H,B,Cが同一直線になるのは点Cが点Jと一致する（連動して、点Dが点Gと一致する）ときだけである。しかしながら、このような状態の分割線は分割構造(D)ではない。したがって、αは分割構造(D)の四角形へのデュードニー分割をもたない。□

§５. デュードニー分割の算数・数学教育用教材利用の留意点

§２－§４にて、デュードニー分割の基礎と三角形、四角形のデュードニー分割の性質について論じた。これらの背景にある基礎的内容は、三角形、四角形などの基本的図形・平面のタイル張り（平面繰り返し紋様）・平行移動、半転（点対称変換）などの合同変換・図形の合同（特に、三角形の合同条件）・平行線の性質・平行四辺形の性質である。円の性質や三角形の相似、ピタゴラスの定理などを必要としない。これらの内容の全てが中学２年次までで学習することがらである。これらを総合してデュードニー分割を理解することができる。この点から考えても、デュードニー分割を教材として利用することは、楽しみながら幾何学的感性を身につけることができるようになるだけでなく、中学２年次までに学習した算数・数学の総合応用に活かすことができ、幾何の学習活動として有効である。

小学校算数科の授業では、平面のタイル張りを学習した後で取り扱うことが望ましいと思われる。したがって、小学校高学年の授業で取り扱うことになるが、その場合は、カンタベリー・パズルのような実物に触れ、経験的にデュードニー分割のもつ性質を発見する、あるいは、理解することがよいであろう。また、簡単な、例えば、三角形の合同デュードニー分割のパズルを実際に作る（作図、または、工作）することもよい。これらの数学的体験により、合同変換、点対称性、三角形の性質、平行線の性質などの幾何学的感性を養うことができるであろう。

中学校数学科の授業では、２年次までの幾何の内容の総合理解として取り組むとよい。デュードニー分割の最大の特徴である、$p2$–タイル張り可能性について経験により理解させることが望ましい。その際、２枚のOHPシートのような透明なフィルムのそれぞれに等積な多角形（三角形や四角形）の$p2$–タイル張りを描き、それらを重ね合わせてデュードニー分割の適正な位置を探るとよい。また、三角形・四角形の（合同）デュードニー分割を厳密に取り扱うことにより、三角形の合同条件や平行線の性質の理解を深めることができるようになるであろう。これらの体験・理解を通じて、デュードニー分割可能か、不可能かを議論することができるようになる。一般に、数学以外の自然科学や社会科学などの多くは、実際の現象、すなわち、厳然とした実在を取り扱う学問であると言われる。したがって、実在しないもの・不可能なこと・

起こり得ないことは議論の対象外である。一方、数学は厳密な論理の組み立てによる学問と言われ、不可能性についても取り扱う。命題４.６や命題４.７などは不可能性に関する命題である。試行錯誤的に実物を作って時間と労力を使わなくとも、論理により不可能であることを理解することができるということを体験することができる。このことは数学のもつ有用性の１つでもある。

参考文献

[1] J.Akiyama and G.Nakamura, *Dudeney dissections of polygons*, Discrete and Computational Geometry, JCDCG 1998, LNCS 1763, pp. 14–29, Springer Verlag, 2000

[2] ---------- , *Congruent Dudeney dissections of triangles and convex quadrilaterals – All hinge points interior to the sides of the polygons*, in Discrete and Computational Geometry, The Goodman-Pollack Festschrift, ed. B. Aronov, S. Basu, J. Pach, and M. Sharir, Algorithms and Combinatrics 25, pp. 44–63, Springer Verlag, 2003

[3] H.E.Dudeney, The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems, W.Heinemann, 1907

[4] G.N.Frederickson, Hinged dissections, Swinging & Twisting, Cambridge University Press, 2002

[5] H.Lindgren, Geometric dissections, D. Van Nostrand Company, 1964

[6] 石田めぐみ , 北村貴史 , 菅　竜次 , 平成20年度卒業論文「多角形の分解合同とハトメ返し」, 山口大学教育学部

[7] 佐藤好久 , 多角形のデュードニー分割に関する秋山–中村の定理の解説 , 2009