

カタナリー曲線と衣服の関係について

桐生裕介*・北本卓也

On the apparel design using the Catenary curve

KIRIU Yusuke*, KITAMOTO takuya

(Received, 2009)

キーワード：カタナリー曲線、衣服芸術

はじめに

ロラン・バルトによる「モードの体系」([1])以降、衣服芸術に関する考察が様々な観点から行われてきた([2]-[7])。現在でも、パリコレクションをはじめとするファッションショー([8],[9])等で発表された意匠を元に、衣服芸術は様々な側面([12])から議論されている。

本稿では、衣服意匠を数理的な観点から見直し、数式を基にした衣服デザインを提案する。また、それに基づき実際に衣服を制作したので、その写真を示す。よく知られているように、糸の両端を支えて垂らすとカタナリー曲線と呼ばれる曲線ができるが、本稿ではこのカタナリー曲線を拡張した「一般カタナリー曲線」を定義し、その意匠衣服への応用を示す。

まず、その一般カタナリー曲線を微分方程式から導出し、その性質を示す。次に、一般カタナリー曲線を用いて二次元平面に記述された型紙と、三次元形状である人体への対応関係を示す。最後に、一般化カタナリー曲線を用いて記述した型紙がスケーラビリティを持つことを示し、実際に制作した衣服の写真を示す。

1. 序論

衣服意匠は長い歴史を持っている。これまで様々な形式、様式、布地などが試みられ、多種多様な衣服形態が存在している。上質さという基準が主であった旧来に比べ、近年では布の様々な性質が表現に取り入れられてきた。例えば、人体の肩幅より大きく衣服の肩幅を設定する「オーバーショルダー」や、布裾の始末をわざと省く「裁ちばなし」なども1つの衣服意匠として広く用いられている。また、劣化を加速する薬品を用い、使い古した衣服を表現する手法もある。

これら多種多様な衣服意匠を理論的に解析し、構成しなおす試みは、ロラン・バルトによる「モードの体系」([1])を始め、様々な所([2]-[7])でなされてきた。本稿では、衣服意匠に数理的な観点を導入し、数式を基にした衣服デザインを提案する。

本稿では、糸のつり合った状態を基準に衣服の構成要素を考察することで、様々な表現との関係との協調を計る。周知の通りカタナリー曲線は糸が垂れる様を表しているが、本研究ではそれを一般化したカタナリー曲線を考えることで、糸を基準に力学的に安定した曲面をもとにした表現手法を考える。

本論文は以下の構成をとる。第2章でカタナリー曲線を拡張した「一般カタナリー曲線」を

*スタジオフォonz

定義する。次に第3章で、一般カタナリー曲線を微分方程式から導出し、その性質を示す。第4章で、一般カタナリー曲線を用いて二次元平面に記述された型紙と、三次元形状である人体への対応関係を示す。第5章で、一般化カタナリー曲線を用いて記述した型紙がスケーラビリティを持つことを示し、これを用いた衣服意匠の記述基盤を示す。最後に第6章でまとめを述べる。

2. 定義等

本稿では以下の記法を用いる。

\mathbf{N} : 自然数全体の集合

\mathbf{R} : 実数全体の集合

よく知られているように

$$f = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \quad (1)$$

で定義される曲線をカタナリー曲線という (ただし、 $a \in \mathbf{R}$ はパラメータ)。

【定義1】

カタナリー曲線において、パラメータ a を $a = 1$ とおいたもの、すなわち

$$f = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

を単位カタナリー曲線と呼ぶことにする。

【命題1】

任意のカタナリー曲線は、単位カタナリー曲線を平面において拡大縮小したものと一致する。

証明

単位カタナリー曲線 (2) を平面において a 倍する、すなわち、 $x \rightarrow ax$, $y \rightarrow ay$ の置き換えを行うと

$$ay = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

を得る。これがカタナリー曲線と一致することは明らか。□

命題1より、カタナリー曲線は拡大縮小を除いて1種類しか存在しないことがわかる。次に一般カタナリー曲線を定義する。

【定義2】

カタナリー曲線において、右辺の分母を $2b$ とおいたもの、すなわち

$$f = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2b} \quad (3)$$

を一般化カタナリー曲線と呼ぶことにする。

一般化カタナリー曲線において、 $b = a$ とおけば、カタナリー曲線となる。また、一般カタナリー曲線は

$$f = \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \right)$$

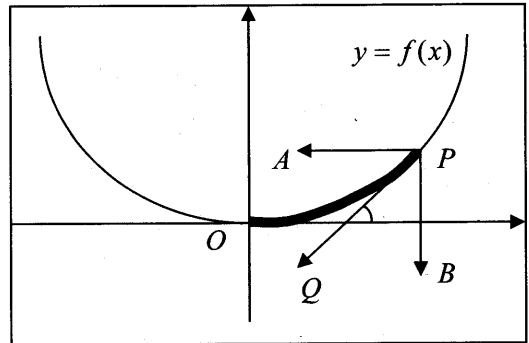
と書けるので、カタナリー曲線を y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍拡大縮小したものである。

3. 一般化カタナリー曲線の導出とその特定

3-1 カテナリー曲線の導出

原点を通る関数 $y = f(x)$ を考える。 $y = f(x)$ の曲線の両端は固定されており、単位長さ辺り $y = f(x)$ の重さを持った紐であるとする。この状態で力のつりあいが取れるような関数 $y = f(x)$ を求める。この問題はカタナリー曲線の導出としてよく知られた問題であるが、一般化カタナリー曲線の導出の説明のためここで解説する。

右図の点 P において、 $y = f(x)$ に接線 PQ を引き、その垂直成分を PB 、水平成分を PA とする。接線 PQ 方向の張力の大きさを T 、水平方向の張力の大きさ (PA の長さ) を H 、接線と PQ と x 軸がなす角を θ とおくと、水平方向の力のつりあいより



$$H = T \cos \theta \quad (4)$$

次に垂直方向について考える。点 P にかかる重力は図の太線部の長さを s 、重力定数を g とすると gvs (v は単位長さ辺りの曲線の重さ) である。これが垂直成分の張力とつりあっていることより

$$gvs = T \sin \theta \quad (5)$$

ここで s は曲線の長さであるから、

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad (6)$$

で与えられる。(5) の両辺をそれぞれ(4)の両辺で割ると

$$\frac{gvs}{H} = \tan \theta \quad (7)$$

を得るが、(7)の左辺は(6)より

$$\frac{gvs}{H} = \frac{gv}{H} \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = r \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad (8)$$

と書ける (ただし、 $r = gv/H$ と置いた)。 $\tan \theta$ は接線の傾きと等しいので、(7)の右辺は $f'(x)$

と置き換えることができる。よって(7),(8)より

$$r \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2} dt = f'(x) \quad (9)$$

(9)に $x = 0$ を代入すると

$$f'(0) = 0 \quad (10)$$

を得る。また(9)の両辺を x で微分すると

$$r\sqrt{1+f'(x)^2} = f''(x) \quad (11)$$

を得る。(11)の微分方程式を $f(0) = 0$ ($y = f(x)$ は原点を通るという条件) と(10)の拘束条件の下で解くと

$$f(x) = \frac{e^{rx} + e^{-rx} - 2}{2r} \quad (12)$$

を得る。(12)において $r = a$ とおけば、これはカタナリー曲線を y 軸方向に $1/r$ ほど下へシフトし、原点を通るようにしたものになっている。

3-2 一般化カタナリー曲線の導出

次に一般化カタナリー曲線を導出する。先ほどと同様に、原点を通る関数 $y = f(x)$ を考える。ただし、今度は $y = f(x)$ の下に布(下図の着色部分)が垂れており、ここにかかる重力を $y = f(x)$ の曲線で支えているとする。この状態で力のつりあいが取れるような関数 $y = f(x)$ を求める。この場合は水平方向の力のつりあいは先ほどと同様に(4)となるが、垂直方向は次のようになる。

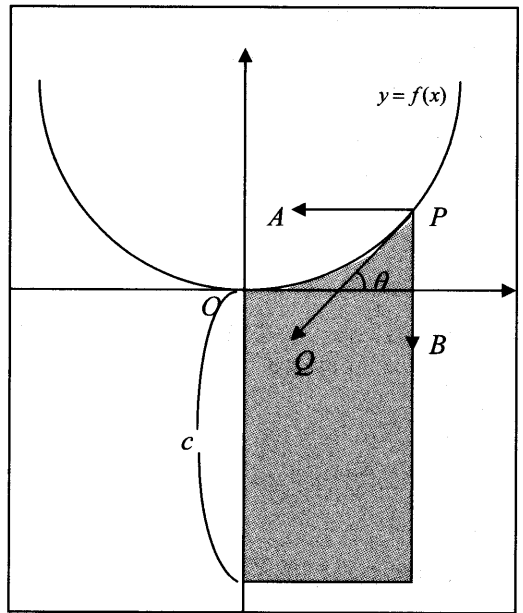
点 P にかかる重力は図の着色部分の面積を M 、単位面積当たりの質量を w 、重力定数を g とすると gwM である。これが垂直成分の張力とつりあっていることより

$$gwM = T \sin \theta \quad (13)$$

ここで図より M は

$$M = cx + \int_0^x f(t) dt \quad (14)$$

で与えられる。よって(7)の代わりに



$$\frac{gwM}{H} = \tan \theta \quad (15)$$

を、(9)の代わりに

$$\frac{gwM}{H} = kcx + k \int_0^x f(t) dt \quad (16)$$

を得る (ただし、 $k = gw/H$ と置いた)。よって(9)に相当する微分方程式は

$$kcx + k \int_0^x f(t) dt = f'(x) \quad (17)$$

となり、これを先ほどと同様に $f'(0)=0, f(0)=0$ の拘束条件の元で解くと

$$f(x) = -c + \frac{ce^{\sqrt{k}x} + ce^{-\sqrt{k}x}}{2} \quad (18)$$

を得る。(12)において $k = a^2$ とおけば

$$f(x) = -c + \frac{ce^{ax} + ce^{-ax}}{2} \quad (19)$$

を得る。これはカタナリーに非常に良く似た関数

$$f(x) = c \left(\frac{ce^{ax} + ce^{-ax}}{2} \right) \quad (20)$$

を y 軸方向に c ほど下へシフトし、原点を通るようにしたものになっている。(20)は

$$f(x) = c \left(\frac{ce^{ax} + ce^{-ax}}{\frac{2}{c}} \right) \quad (21)$$

と書けるので、 $b = 1/c$ と置くと、(3)の一般化カタナリー曲線を得る。

3-3 カテナリー曲線の特定

カタナリー曲線(1)が図形的に与えられたとき、パラメータ a を特定する方法を考える。

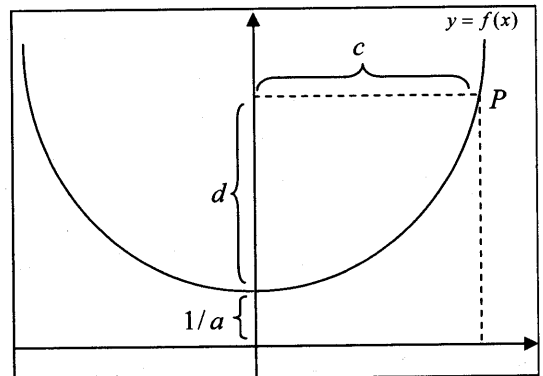
下図のように、曲線上に任意の点 P をとり、
下図のように c, d を決める。このとき(1)より

$$d + \frac{1}{d} = f(c) = \frac{e^{ca} + e^{-ca}}{2a} \quad (22)$$

を得るが、これより

$$q(a) = d + \frac{1}{d} - \frac{e^{ca} + e^{-ca}}{2a} \quad (23)$$

を定義すると、 $q(a)=0$ を満たす a が求めるパ



ラメータの値である。よってこれをニュートン法などを用いて求めればよい。一般的に、方程式の解は1つとは限らないが、次の定理にあるように、 $q(a)=0$ の実数解はただ1つ存在する。

【定理1】

(23)で $q(a)$ を定義するとき、 $q(a)=0$ の実数根はただ1つ存在する。

証明

$$g(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ca} + e^{-ca} - 2}{a} \right) \quad (24)$$

で $g(a)$ を定義したとき、 $q(a)=0$ は $d=g(a)$ と変形でき、かつ $g(a)$ は a の連続関数であるので、題意を証明するには次の3式を示せば十分である。

$$g(0) = 0, \lim_{a \rightarrow \infty} g(a) = \infty, g'(a) > 0 \ (a > 0)$$

始めの2式は明らかである。第3式は次のようにして示すことができる。

$$g'(a) = \frac{1}{2a^2} (ace^{ac} - ace^{-ac} - e^{ac} - e^{-ac} + 2) \quad (25)$$

であるが、 $h(a)$ を

$$h(a) = ace^{ac} - ace^{-ac} - e^{ac} - e^{-ac} + 2$$

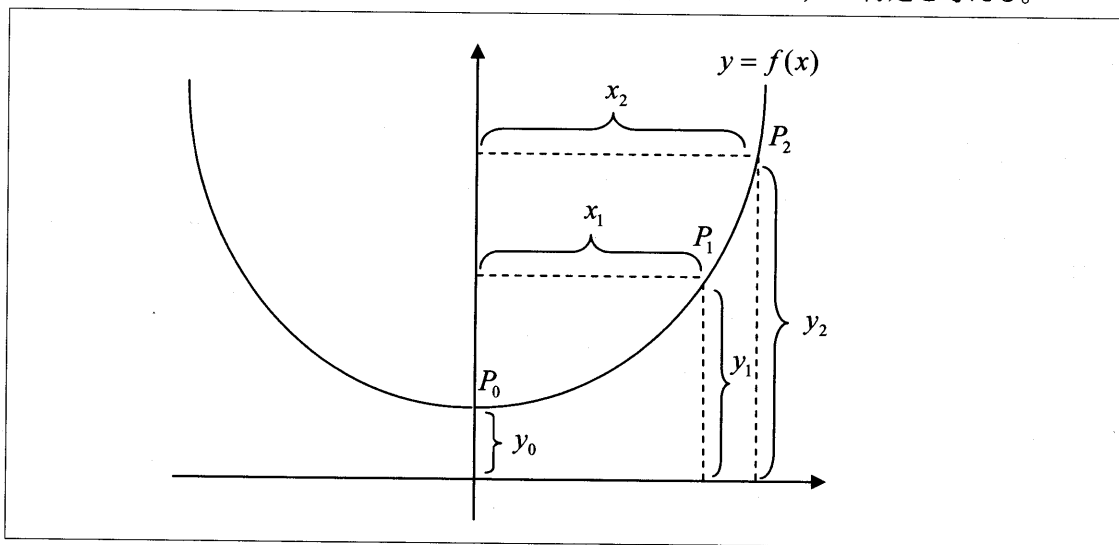
と定義すると

$$h'(a) = ac^2(e^{-ac} + e^{ac}) > 0 \ (a > 0), h(0) = 0$$

より $h(a) > 0 \ (a > 0)$ 。これと $g'(a) = \frac{h(a)}{2a^2}$ (\because (25))より題意は示された。□

3-4 一般化カタナリー曲線の特定

一般化カタナリー曲線(3)が図形的に与えられたとき、パラメータ a, b の特定を考える。



上図のように、曲線上に点 $P_0 = (0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ をとる。ただし、

y_0, x_1, y_1, x_2, y_2 は $0 < x_1 < x_2, 0 < y_0 < y_1 < y_2$ を満たす実数とする。このとき、次の定理が成り立つ。

[定理2]

3点 P_0, P_1, P_2 を通る一般化カタナリー曲線が存在するための必要十分条件は

$$\frac{x_1^2}{y_1 - y_0} > \frac{x_2^2}{y_2 - y_0} \quad (26)$$

である。またこの条件(27)が満たされるとき、3点 P_0, P_1, P_2 を通る一般化カタナリー曲線はただ1つ存在し、(3)のパラメータ a, b ($a, b > 0$) は一意に決まる。

証明

省略

4. 一般化カタナリー曲線を用いた衣服の記述基盤

4-1 衣服の動的、静的な性質

参考文献 [10],[11] では衣服の布の曲げ剛性等の物理パラメータを考慮したモデルが用いられているが、本稿では布に関する物理パラメータは w (布の比重) のみが用いられている。これは本稿が衣服の静的な性質を元に衣服の設計を考えているからである。曲げ剛性等の物理パラメータは着心地などの衣服の動的な性質に影響する反面、衣服が静止した際の性質、すなわち静的な性質にはほとんど影響しない (体型により変化した衣服形状を考えるにあたって、非着用時の静的な性質を基礎として大域的な性質を考えているからである)。よって静的な性質を考慮するには、 w を考察すれば十分であると考えられる。

「純粋に垂れた糸」は最も剛性の働いていない状態と考えられる。布を織る場合、周囲の力で面にかかる力の変化は織りの状態に依存する。編みの場合も同様である。よって、織りや編みによる変化、及び人体の形状や着用時の変化を含む様々な力学的性質について、力学的性質 (剛性を含む) の働いていない状態 (垂れた糸) を基準とすることで、詳細に理解していきける可能性は多分にある。「垂れた糸」を表現するカタナリー曲線の力学的性質を保ち一般化カタナリー曲線を導出することで、衣服として形成された状態における布地の力学的性質を今後解明することを目指している。

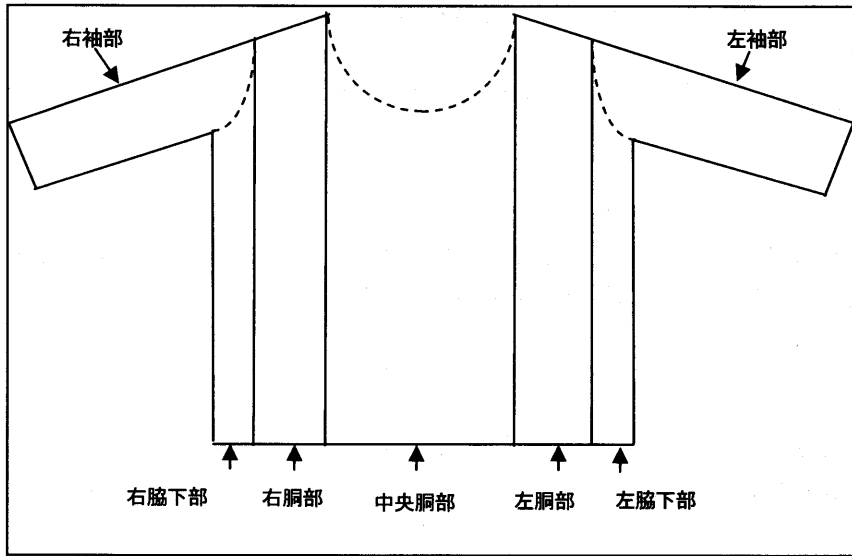
4-2 衣服のスケラビリティ

下記の点より、一般化カタナリーをベースにした衣服はスケラビリティに優れていると考えられる。

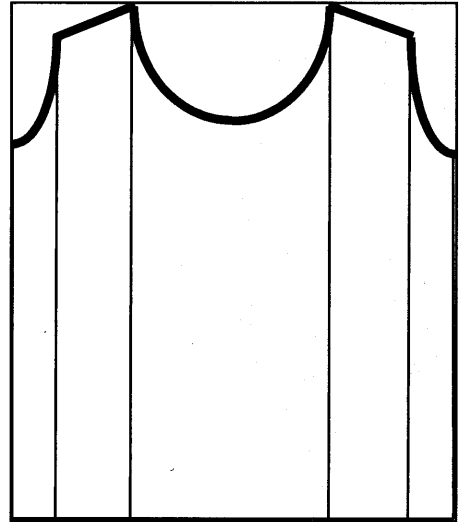
- (i) 型紙の単なる拡大、縮小でなく、パラメータを含んだ数式によるスケリングである。
- (ii) 先に示したように一般化カタナリーは物理的に自然な状態を表しており、力学的に安定である

4-3 衣服の構成要素

本論文では、下図のように重力のかかる鉛直線を元にして、幾つかの独立した部位に分割し、その部位を構成要素と呼ぶ。



破線で表した部分(首周り)の部分に一般化カテナリー曲線を用いている。前章で述べた通り、一般化カテナリー曲線は、垂れた糸を基準に均質に下部を支えた力学的構造を持っているため、布を均質に垂らした状態を保つ構造となっている。布は織りや編みなどの性質を反映し垂れるため、構成要素に割り当てられた様々な布による振る舞いの違いが自然に表現される。布にかかる外力を省き、布が力学的に安定し垂れた状態を構成要素が保つことから、各構成要素を力学的に独立した状態として扱うことになる(右図を参照)。衣服の構成要素を、独立な力学的性質を保つよう分割したことで、構成要素それぞれへ個別の表現を適用可能になり、各構成要素の組み合わせの自由度が支えられる。同時に、力学構造上安定し制約の少ない状態を保つため、着用時にも身体的制約が少ないと考えられる。

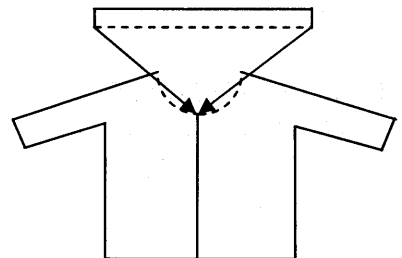


これまでの衣服設計では、初期設定となる型紙を用いて多様な形式を取り扱って来たが、本論文の機構では、力学構造上安定した衣服へ多様な衣服意匠の形式を適用することが可能になっている。

4-4 構成要素と多様な表現形式

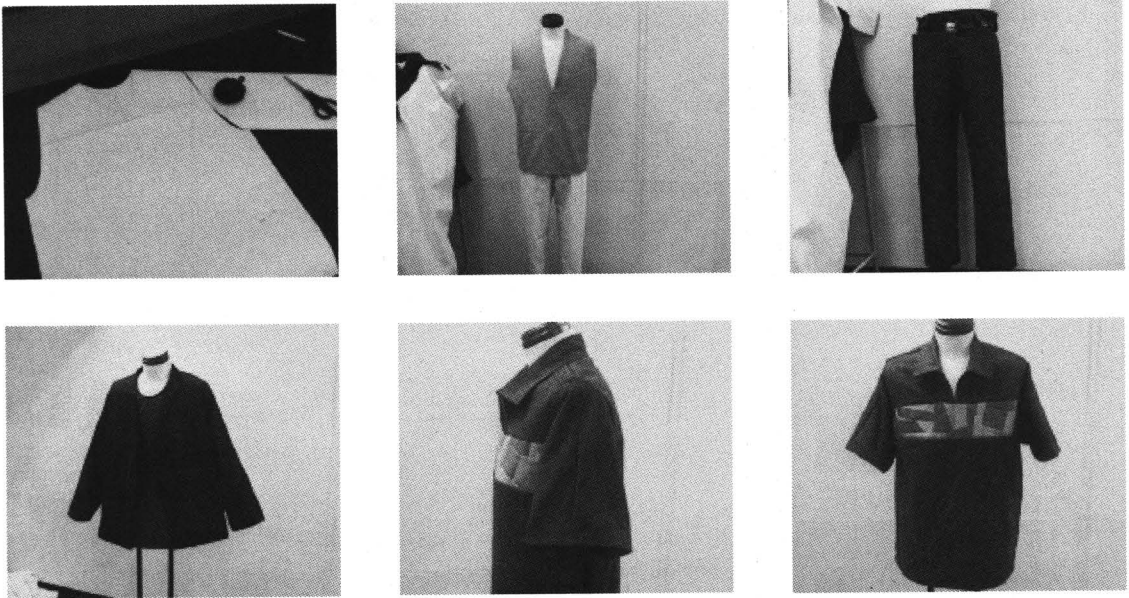
上に述べたように、本論文の機構は様々な衣服の形態へ適用可能である。その一例として、下右図にシャツの襟への対応を示す。

この他にも首の部分に付ける布の形を変えることにより、ハイネックなどにも対応可能である。前節にも述べたように、一般化カテナリー曲線は力学上安定な曲線なので異なる



る襟に対しても、力学的な安定性が期待できる。

一般化カテナリー曲線を用いて実制作した衣服を下図に示す。様々な表現形式に対応できることが、実制作により確認された。



まとめ

カテナリー曲線を拡張した一般化カテナリー曲線を微分方程式から導出し、その数学的な性質をいくつか示した。また、一般化カテナリー曲線を用いることにより、力学上安定な衣服構成を行うことができ、様々な衣服意匠への対応が可能であることを述べた。

本研究の目標は、衣服意匠に対して、数理的な観点を導入し、数式を基にした衣服デザインを提案することにある。今後は、さらに衣服の表現技法と数式との関連の研究を推し進め、基礎及び応用研究を促進するための基礎を築いていきたい。

参考文献・URL 等

- [1] ロラン・バルト(佐藤信夫訳), ``モードの体系'', みすず書房, 1972.
- [2] ジルドゥルーズ(財津 理訳), ``差異と反復'', 河出書房新社, 1992.
- [3] ジルドゥルーズ(宇波 彰翻訳), ``プルーストとシーニュ'', 法政大学出版局, 1986.
- [4] ジルドゥルーズ(守中 高明、他訳), ``批評と臨床'', 河出書房新社, 2002.
- [5] ジャック・デリダ(林 好雄訳), ``声と現象'', 筑摩書房, 2005.
- [6] ジャック・デリダ(高橋 允昭、他訳), ``哲学の余白'', 法政大学出版局, 2007.
- [7] ジャック・デリダ(若桑 毅訳), ``エクリチュールと差異'', 法政大学出版局, 1977.
- [8] 周防 珠実 他(編集), ``ファッション—18世紀から現代まで(京都服飾文化研究財団コレクション)'', タッシェンジャパン, 2002.
- [9] <http://www.style.com/fashionshows/>
- [10] 鳥海 浩一郎, ``繊維集合体—構造と力学的性質—'', 繊維学会誌, Vol. 60, No. 6, pp. 161-165, 2004.

- [11] 高寺 政行, ``織物の力学特性と衣服の設計・評価に関する基礎的研究'', 繊維学会誌, Vol. 61, No. 11, pp. 294-297, 2005.
- [12] 鷺田 清一, ``モードの迷宮'', 筑摩書房, 1996.