

生徒が思わず考えたくなる数学の授業づくり

柳井 崇史*

To create the class of math in which students are willing to think

YANAI Takashi*

(Received January 15, 2008)

キーワード：表現、中学校数学、授業づくり

はじめに

例えば、この前の一筆書きとか、授業で課題の規則や法則を自分で見つけるととてもうれしいし、それまでにみんなと意見を出し合う「よせなべ」の授業がとても楽しい。だけど、それは、ずっと昔に誰かが見つけたものだから、もしも世界で初めて自分で何かを見つけれたらどんなに楽しいんだろうと思う。

上記の作文は、今年卒業した3年生が、数学の授業を終えるにあたって書いた作文の一部である。「授業で規則や法則を自分で見つけるとうれしい」と書いてある。生徒にとっては、教科書に載っている内容を「教え込まれる」よりは、「自分で考えて、規則や法則を見つける」ことの大切さを語っていると読み取ることができる。また、「みんなと意見を出し合う『よせなべ』の授業が『とても楽しい』」と書いてある。この「よせなべ」の授業とは、学級で、「ああでもない、こうでもない」と自分たちの考えを述べ合う授業の通称である。授業中の一人一人の意見をよせなべの具にたとえているのである。級友と意見を出し合うことの楽しさと、多く的人数で学習することのよさをこの生徒は書いていると受け止めることができる。そして子どもらしく、「もしも世界で初めて自分で何かを見つけれたらどんなに楽しいんだろうと思う」と続けている。これは、この生徒の学ぶことへのあこがれであり、教師にとって大切にしたい生徒の思いである。

周知の通り、文部科学省が行った教育課程実施状況調査やPIASA2003・TIMSS2003などの数学に関する調査では、「数学が楽しくない・有用ではない」と感じる生徒が多いとの結果がだされている。数学教師にとっては、悲しく・悔しい調査結果である。私は、常に「数学で考えることは楽しいし、数学の授業は好き」と授業を通して生徒に感じさせたいと考えている。そんな私にとって、この生徒の作文は、とても、うれしいものであった。このような意欲をもった生徒を多く育てていきたいとの思いが、今回の研究の出発点である。

本稿では、「生徒が思わず考えたくなる数学の授業づくり」と題して、本校数学科が昨年度から取り組んでいる研究を絡めながら述べていく。内容は、「思わず考えたくな

*山口大学教育学部附属山口中学校

る授業の構想」とそれを支える「思わず考えたくなる教材」。そして、生徒の姿を通しての「思わず考えたくなる授業の実際」である。

1. 思わず考えたくなる授業の構想

1-1 主題設定までの経緯

今期の本校の研究主題は「自己を表現したくなる授業の創造」である。「教材から刺激を受けて、自分で考える。それを筋道立てて相手に説明する」という数学の授業の特色から、全校研究主題の「表現したくなる」ことを数学科は、「考えたくなること」としてとらえた。発表などの表に出る表現だけでなく、生徒の内なる思考も「表現する」こととしてとらえたのである。また、数学独特の「表現」を私は、「論理にとびがなく、根拠をもって相手に説明すること」であると考えた。これは、体系の整った数学ならではの表現である。

このように、「数学好きを育てたいという願い」、「本校研究主題とのつながり」、そして、「数学の教科としての特色」などをふまえて、「思わず考えたくなる数学の授業づくり」を考えることに至ったのである。

では、「思わず考えたくなる数学の授業」とは、どのようなものであろうか。私は、「『思わず考えたくなる』ような教材を生徒に与えて、考えたくなる状況をつくり、生徒が意欲をもって考え続けていく授業である」ととらえた。このような授業を構想するにあたって、「教材」と「授業の場面づくり」に着目した。

1-2 思わず考えたくなる教材

まず、思わず考えたくなる数学の授業の中心には、「思わず考えたくなる」教材が必要である。教材の開発にあたって、「数学の授業が楽しいときは、どのようなときですか」と生徒にアンケートを実施した。右がそのアンケートをまとめたものである。この結果から、次の2点を読み取った。1点目は、先ほどの生徒の感想にもあったよう

- ① 「できなかったこと」が「できるようになった」とき
- ② 性質が発見できたとき
- ③ 「わからなかったこと」が「わかった」とき
- ④ 自分の気づかなかった考えに触れたとき
- ⑤ 数学と社会がつながったとき
- ⑥ 数学の系統性が見えたとき

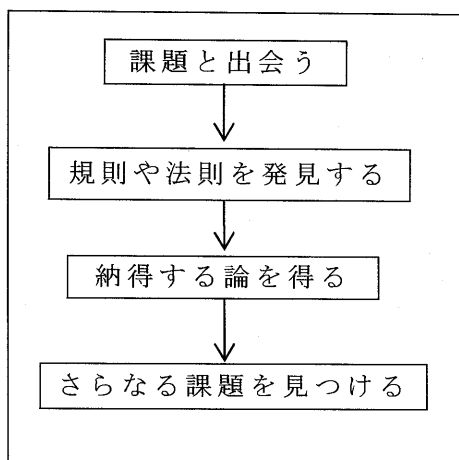
に、「規則や法則を見つけることが生徒は好きである」ということである。発見を取り入れた教材は、たとえ見つけた規則が稚拙であったとしても、自分が見つけたからこそ、性質が正しいことを証明したくなったり、条件を変えて発展させたいとなったりする可能性があるということである。2点目は、「自分が知らないことや気づかなかったことに対して生徒の知的好奇心が高まる」ということである。数学が日常生活とつながったり、予想もしなかった仲間の考え方に、思わず納得してしまう場面は今までの授業でも多くある。

以上のことをふまえて、「思わず考えたくなる教材」として、つぎの4つの教材パターンを考えた。まず、生徒自身の気づきを大切に「規則や法則の発見がある教材」。次に、自分が知らないこと・気づかなかったことを教材化した、「数学の体系に触れる教材」。そして仲間の考え方を知ることができる「複数の考え方がある教材」。最後に、自分の予

想と異なり、「あっと」驚くことが意欲につながる「予想と異なる結果が出る教材」の4パターンである。

1-3 授業構想

次に、授業の流れを右のように考えた。大切な授業の場面は4つある。「思わず考えたくなる課題との出会い」「規則や法則を発見する」「納得する論を得る」「さらなる課題を見つける」の4場面である。



生徒は、まず、「自分にもできそうだ」や「何かあるに違いない」という、「思わず考えたくなる」課題に出会い、考え始めることになる。次に、自分で見つけた規則や法則をお互いに出し合い、学級の課題として再構成することになる。ここで、教師は、新しい問いを発し、「なぜだろう」と思わせる状況を設定することが必要とされる。「もやもやとした」状況が生徒の考えたくなる原動力となるからである。そして、解決のための困難を乗り越え、「納得する論を得る」ことになる。「もやもやとした」状況を「すっきり」と解決できるのが、数学のよさでもある。さらに、解決した課題の条件を変えて考えたり、自ら問題づくりをしたりして、さらなる課題を見つけることになる。ここで、論理や体系の整った数学の美しさを、生徒は感じるようになるのである。

次に、以上の視点で考えた「思わず考えたくなる教材」の2例と、「生徒が思わず考えたくなる授業の実際」を生徒の反応をもとに論述したい。

2. 思わず考えたくなる教材

ここでは、「思わず考えたくなる教材」の4パターンの中から、「規則や法則の発見がある教材」と「数学の体系に触れる教材」を例としてあげたい。

2-1 規則や法則の発見型の教材

3年生の文字式の学習は、式が複雑になり、証明も難しくなるので、学習意欲を維持することが難しい単元である。この単元での教材作成の具体例をあげる。

よく教科書には、「連続する3数の一番大きい数と、一番小さい数の積に1を加えるとまん中の数の2乗になることを証明しなさい」というように、結論が先に提示してあることが多い。単純な連続3整数の中に潜む平方数であり、さらに、一般性ももつというすばらしい性質を私は、「生徒が見つけて欲しい」と考えた。そこで、右のように、数とその平方数を表にして、「表の中にあ

平方数表にひそむ規則

下の表を完成させ、その中にある規則を見つけよう。

数	1	2	3	4	5	6	7	8	...
平方数	1	4	9						...

る規則を見つけよう」という教材に変えて授業実践した。こうすることで、規則や法則を発見できる教材となるのである。

実際の授業では、始めに課題を提示し、自由に考える時間をとった。右は、ある生徒のワークシートである。この生徒は、増加量を表の下に計算した跡と、「最初から2ずつたしていく」と書いていることより、関数的に増加量を考えている。さらに、【自分の考え】の欄にあるように、「△や☆、○」などを使って、もとの数と平方数の関係をつかもうと意欲的に取り組んでいる姿がうかがえる。このように、3年生でも、「この表には、何かあるに違いない」と意欲的な取り組みを引き出すことができるのである。次に、自分が見つけた規則を友達に紹介しあう時間をとった。「何でそうなるの?」と聞かれ、具体数で説明したり、文字式を使って説明を始めた姿があらこちらで見られた。学級全体で確認した規則についても、証明するときまで、意欲をもち続けることができたのである。自分が見つけた規則にしる、仲間が見つけた規則にしる、それは教科書の課題ではなく、「自分たちの発見」であり、「自分たちの課題」として考えることができるのである。自分たちの課題だからこそ、「証明したく」なったのである。

右は、先ほどのワークシートを書いた生徒の感想である。この生徒がすごいと思っている「ウの発表」は、「連続する3数の一番大きい数と、一番小さい数の積に1を加えるとまん中の数の2乗になる」という先ほどの教科書の内容である。

自分たちで見つけたからこそ、この生徒にとって、「すばらしく」「最高」であり、「すごい数たち」となったのである。

2-2 数学の体系に触れる型の教材

次に、数学の体系に触れる教材の例をあげる。

3年生の図形の学習で、次のような課題をもとに授業を構成した。よく、教科書では、「合同を証明しなさい」や「相似であることを証明しなさい」と結論が与えられている。この課題では、合同な図形や相似な図形・同じ長さや角などを生徒が見つけだすというものである。この意味では、先ほどの発見する教材と同じなのであるが、私は、これを教材化するにあたって次の2点に配慮した。1点

数学学習プリント (平方数表にひそむ規則)

平方数表にひそむ規則
下の表を完成させ、その中にある規則を見つけよう。

数	1	2	3	4	5	6	7	8	-
平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	-

1 規則を見つけよう。
【自分の考え】
○最初から2ずつたしていく。

△	☆		
○	○		

①

△	☆		
○	○		

②

○			
☆	○		

③

△	☆	○
○	○	○

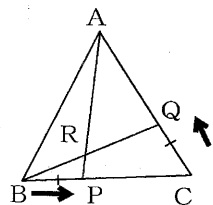
【友達の考え】
ア 連続する数の平方数の差は奇数である。
イ 連続する2数で小さい方の数の平方数を n^2 とし、大きい方の数の平方数に等しい。
ウ 1つは1の数の積に1を加えると、その内の数の平方数に等しい。

【授業の感想】

数学すばらしいじゃないですか!
自分で見つけたのは、アはわかるから、まろからアで「けど」、あ、ウは全部証明でまましたの最高です。
ウの発表は本当にすばらしいです!
ア、アで表してる人って、数めかと思いきや、いろいろ出てきて、すばらしい数たちです。

課題「動点のつくる図形」

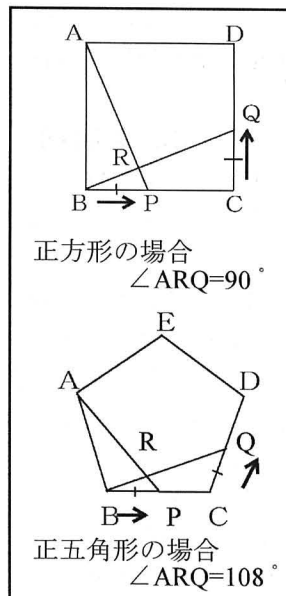
△ABCの辺BC, CA上に、BP=CQとなるような点P, Qをとる。また、APとBQの交点をRとする。
2点PQは、それぞれ、頂点B, Cを同時に出発して同じ速さでそれぞれ頂点C, Aまで動くものとする。



目は、「点 P,Q が動いても、 $\angle ARQ=60^\circ$ は変わらないという美しさを生徒に発見してもらいたい」と思ったことである。さらに、教材研究の段階で、この「正三角形」を右図のように、「正方形」や「正五角形」としても、 $\angle ARQ$ は内角の大きさに等しいという性質を見つけたときに、私自身が「思わずうれしく」なり、これを是非とも生徒に伝えたいと感じたことが2点目である。よく、「教師が楽しまなくて、生徒が授業を楽しむことはできない」と言われる。まさしく、この課題は、そのような教師の思いから生まれてきた課題である。

実際の授業では、生徒が「思わず考えたくなかった」のは、生徒が、この2点目を知ったときである。その意味では、「さらなる課題を見つける」という、数学の体系に触れることができる教材ということが言えよう。

このように、「思わず考えたくなる教材」は、「教材を深く解釈する」「『生徒にこれを見つけさせたい』『伝えたい』という教師の願いをもつ」「課題にもっとも適した教材のパターンに作りかえる」ということで開発できるのである。



3. 「思わず考えたくなる」授業の実際

次に、「思わず考えたくなる授業づくり」の実際を「思わず考えたくなる課題との出会い」「規則や法則を発見する」「納得する論を得る」「さらなる課題を見つける」という場面づくりと絡めながら、述べていきたい。

右の写真は、ある授業での一場面である。この生徒は、「自分がわかった」ことを皆に伝えたくて、嬉しそうに生き生きと説明している。この嬉しそうな発表に至るまでの経緯を中心に述べていく。



3-1 本授業の課題

右は、本授業の課題「規則を見つけよう」であり、1年生の6月に実施したものである。入学して間もない生徒たち

課題「規則を見つけよう」												
次の数の並びから規則を見つけよう												
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...	

ちに、「規則や法則を発見する体験」をしてもらうために、教科書にはない課題を与えた。授業のねらいは、「目のつけどころをふやす」である。

平凡な奇数列ではあるが、この中には、様々な規則が含まれる。例えば、「2ずつ増えている」ということが、真っ先に考えられる。しかし、「どの2数をひいても偶数」や「隣り合う2数をたすと4の倍数」のように、数の間の演算を変えたり、「連続する3数では、両端の数の和は、まん中の数の2倍である」のように、関係する数の数を増やしたりすることで、さまざまな規則を発見をすることができる課題なのである。

この教材のパターンは、先ほどの例と同じで、規則や法則を発見する教材である。これらの例のように、計画的に学年ごとに適切に単元に配置することで、3年生になっても、発見を楽しむ生徒が育っていくのである。

3-2 本授業の様子

実際の授業では、なじみのある奇数の並びを課題とすることで、「自分にもできる」という安心感を生徒はもったようである。生徒は最初に、「2ずつ増えている」という規則を発表した。それに続けて、「ちがう言い方ができる人」と生徒に尋ねると、「1個とばしになっている」「前の数字に2をたしている」などの発言がでた。そして、「今の意見は、言い方はちがっているが、本質は一緒である」と私がまとめた。そうすることで、生徒は、「自分の言葉で言ってよい」「自分の発表を大切にしてもらえ」という安心感を感じるのである。この場面が生徒が課題と出会う場面である。

次に、自由に規則や法則を見つける時間をとった。ここでは、「じゃあやっごらん」とだけ、生徒に指示した。生徒はこの段階で既に、「見つけたくなっている」「考えたくなっている」からである。このように、課題自体が発問の手助けをしていることが数学では多く存在する。

次に私は、机間観察をしながら、個々の生徒に意欲づける言葉をかけた。同時に、「目のつけどころの違う規則」を見つけている生徒を把握した。

しばらくして、自分の見つけた規則を説明し合う時間をとった。ここで生徒は、自分が見つけた規則を認められたり、仲間の発想に驚かされたりする体験を積むことになる。1年生らしく、具体数を使って説明する場面が多く見られた。1年生のこの時期では、仲間が見つけた規則や法則を具体数で自分なりに理解することも、「納得する論を得る」体験のひとつとなると考えている。さらに課題を学級全体のものとするために、先ほど把握していた反応の中から、5名の生徒に板書してもらった。

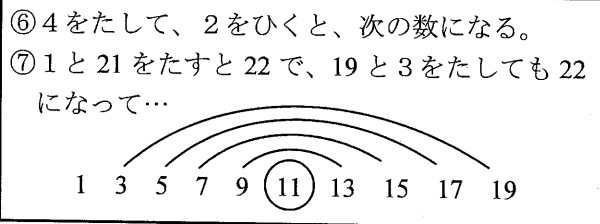
右が板書の内容である。これらの規則には、「たす」「ひく」「かける」などの演算が2数の間に入っている。意図的にこれらの反応を生徒から引き出し、演算という観点から「目のつけどころをふやしてもらいたかった」のである。

- ①奇数どうしをたすと偶数になる。
- ②前の数と次の数をひくと2になる。
- ③となりどうしの数をたすと4の倍数になる。
- ④奇数どうしをかけても奇数になる。
- ⑤1を基準にして、次の数は+2、次の数の5には、+4と偶数増えている。

ここでは、それに関連した発言をうながした。できるだけ多くの生徒に発表できるように配慮したためである。さらに、「割り算の規則はあるのだろうか」や「⑤は足し算なのか引き算なのか」など、より深める発問により、多くの生徒の発言を引き出すことができた。

続けて、「さらに、目のつけどころの違うもの」として、右の規則を発表してもらった。

⑥の規則では、「2回の演算が入っている」という生徒の意見を引き出し、演算の観点から、拡張することができた。この場面が「規則や法則を発見する」場面である。



⑦については、発表した生徒の発言を受けながら、数名の生徒がこの規則について右のように説明した。しかし、まん中の「11」については、どうしてもすっきりしない様子であった。先ほどの写真の女子生徒が、嬉しそうに発言したのはこの場面である。

- ・ 1 と 21 をたすと 22 になって、19 と 3 をたしても 22 になって…。
- ・ 例えば… 1 と 21 をたすと 22 になって…11 が余る。
- ・ 1 から 21 の奇数の書いてある数は、11 個じゃないですか。奇数の場合は、ひとつ数が余るのでサイドから計算していくと、1 つ残ってその数は、その数自身である。
- ・ 11 は、その数自身である。

この女子生徒にとって、最初に級友が発表した規則の中の「11」は、納得できない「もやもやとした」状況だったのである。そして、「11 が余る」や「11 はその数自身である」という級友の発言を手助けにして、「ペアにして余った 11 は、自分自身をたすことになる」という自分なりの論を得たのである。「もやもやとした」状況から納得できる論を得て「スッキリした」状況になったときの嬉しそうな発言の姿だったのである。

3-3 発言を支えたもの

この生徒が「思わず伝えたくなった」理由は、次のように考えることができる。

まず、授業を通して、生徒の発言に対する数学的な価値づけがなされ、自分の発言が「授業で生きるという体験」を積んでいること。また、自分の発言が仲間に認められることで、「安心感のある学級」という場となっていたこと。さらに、

- ①安心して発言することができる雰囲気（教師・学級集団）があったこと
- ②個人の課題から学級全体の課題となっていたこと
- ③この生徒にとって 11 の説明が、「適切な壁」であったこと
- ④解決できたうれしさを感じたこと

個々の生徒の課題が、全体で考える課題になっていたことが挙げられる。そして、この課題は、この生徒にとっても、他の生徒にとっても「何とか説明できそうな」適切な壁であったことも挙げられる。

ここまで、実際の授業を通して、生徒が「課題と出会う場面」「規則や法則を発見する場面」「納得する論を得る場面」に沿って述べてきた。「さらなる課題を見つける場面」は、この授業では取り扱えなかったのであるが、授業後に、「先生、こんなのをを見つけました」と生徒がうれしそうにレポートをもってくる姿は、この生徒が「さらなる課題」をつかんだ証となるのではなからうか。このようにして、「思わず考えたくなる授業」が展開していくのである。

おわりに

ここまで、「思わず考えたくなる数学の授業づくり」と題して、述べてきた。教師の願いや思いを込めた、「思わず考えたくなる教材」をつくること。生徒の意欲を高め、生徒の発言を的確に分析すること。生徒の発言を生かし、深めていく場面をつくること。そして、生徒が表現しやすい授業の雰囲気を授業の中で常に心がけること。このような授業を

くり返すことで、次第に生徒は、自らものごとを多様に考えたり、自信をもって相手に説明したりすることができるようになったのである。

「思わず考えたくなる授業」は、考えることの楽しさを伝え、生徒の知的好奇心をくすぐり、学ぶ意欲を高める。そして、自らの思考を受け入れられたり、仲間の思考に学んだりしながら、論理的思考力が育成されていくのである。そうして身につけた論理的思考力は、日常生活の中の課題に対しても、論理的に考えることのできる力へと育っていくのである。

私は、これからも、「数学で考えることは楽しいし、数学の授業が好き」と感じる生徒を育て続けたいのである。そのためには、数学教師としての研鑽を積み続けて行かなければならないと考えている。