同値関係を表現するブール行列のいくつかの性質

橋　本　　　寛

Abstract

An equivalence relation is a reflexive, symmetric, transitive binary relation. Equivalence relations are fundamental in the theory of relations and important in the fields of applications. In the paper relations are represented by Boolean matrices, and properties of Boolean matrices representing equivalence relations are examined. Especially equivalent conditions for equivalence relations are shown in the form of Boolean matrices.

1．はじめに

同値関係は，反射的で，対称的で，推移的な二項関係である。同値関係は関係の理論において基本的な関係であり，また，応用においても重要な関係である。本論文では，同値関係を表現するブール行列のいくつかの性質について述べる。とくにブール行列で表現した場合の同値関係となるための必要十分条件について考察する。

2．演算の定義

x，y を0，1の値をとるものとするとき，$x \vee y = \max(x,\ y)$，$x \wedge y = \min(x,\ y)$，$\bar{x} = 1 - x$ と定める。次に $R = [r_{ij}]$，$S = [s_{ij}]$ を0，1の要素をもつ n 次ブール行列とするとき

$$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}],\ R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}],\ \bar{R} = [\overline{r_{ij}}],\ R' = [r_{ji}]\ \text{（転置）}$$

$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

$$R \diamondsuit S = [(r_{i1} \vee s_{1j}) \wedge (r_{i2} \vee s_{2j}) \wedge \cdots \wedge (r_{in} \vee s_{nj})]$$

$$R^{k+1} = R^k \times R\ \ (k = 1,\ 2,\ \cdots),\ R^1 = R$$

$$R^{+} = R \vee R^{2} \vee R^{3} \vee \cdots$$

$R^{*} = I \vee R \vee R^{2} \vee \cdots$（ただし $I = [\delta_{ij}]$，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）

$R \leqq S \Leftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

また零行列を O，すべての要素が1の行列を E で示す。このとき，反射的な関係を表現する行列 R は $I \leqq R$ となり，対称的な関係を表現する行列 R は $R \leqq R'$ となる。また推移的な関係を表現する行列 R は $R^2 \leqq R$ となる。したがって，同値関係を表現する R は，$I \leqq R$，$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$ となる。

なお，本論文では0，1の要素をもつ n 次ブール行列を R，S，$T = [t_{ij}]$ などで表す。

3．結果

すでに述べたように，同値関係を表現する行列 R は，$I \leqq R$，$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$ となるが，以下ではこの条件の同値条件について，次の順序で考察を行う。

(1) 単一の条件に関する同値条件について

$I \leqq R$ の同値条件；$R \leqq R'$ の同値条件；$R^2 \leqq R$ の同値条件

(2) 2つの条件の組合せに関する同値条件について

$I \leqq R$，$R \leqq R'$ の同値条件；$I \leqq R$，$R^2 \leqq R$ の同値条件；$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$ の同値条件

ただし，(1)によって直接的に得られるものは除く。

(3) 3つの条件全体に関する同値条件について

$I \leqq R$，$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$ の同値条件

ただし，(1)，(2) によって直接的に得られるものは除く。

ここで関係式を変形する上で有用な主要な公式を整理しておく。いずれもよく知られているものである[12，17，18]。

(1) $S \leqq T$ を変形する公式

$$S \leqq T \Leftrightarrow S' \leqq T' \Leftrightarrow \overline{T} \leqq \overline{S} \Leftrightarrow S \wedge T = S \Leftrightarrow S \vee T = T \Leftrightarrow S \wedge \overline{T} = O \Leftrightarrow \overline{S} \vee T = E$$

(2) $S = T$ を変形する公式

$$S = T \Leftrightarrow S' = T' \Leftrightarrow \overline{S} = \overline{T} \Leftrightarrow S \leqq T,\ T \leqq S \Leftrightarrow (S \wedge \overline{T}) \vee (\overline{S} \wedge T) = O$$

(3) $S=O$ を変形する公式

$S=O \Leftrightarrow S \leqq O \Leftrightarrow S \leqq \overline{S} \Leftrightarrow S \times S' \leqq \overline{I} \Leftrightarrow S'=S,\ S^2=O$

(4) $R \wedge S \leqq T$ を変形する公式

$R \wedge S \leqq T \Leftrightarrow R \leqq \overline{S} \vee T \Leftrightarrow S \leqq \overline{R} \vee T$

(5) $R \times S \leqq T$ を変形する公式

$R \times S \leqq T \Leftrightarrow R \leqq T \diamond \overline{S'} \Leftrightarrow S \leqq \overline{R'} \diamond T \Leftrightarrow \overline{T'} \times R \leqq \overline{S'} \Leftrightarrow S \times \overline{T'} \leqq \overline{R'}$

3.1　$I \leqq R$ の同値関係

反射性の同値条件，すなわち与えられた R が反射的関係を表現するブール行列となるための必要十分条件について考察する。

[性質1] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$

(2) $\overline{R} \leqq \overline{I}$

(3) $R \wedge I = I$

(4) $R \vee I = R$

(5) $\overline{R} \wedge I = O$

(6) $R \vee \overline{I} = E$

(証明) $I \leqq R$ に $S \leqq T$ の変形公式を適用すればよい。　(証明終)

[性質2] [7] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$

(2) $\overline{R} \leqq \overline{R} \times R'$

(3) $\overline{R} \leqq R' \times \overline{R}$

(4) $\overline{R'} \leqq R \times \overline{R'}$

(5) $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$

[性質3] [7] (1) $(R \times \overline{R'}) \wedge I = O$　(2) $(\overline{R'} \times R) \wedge I = O$　(3) $(R' \times \overline{R}) \wedge I = O$　(4) $(\overline{R} \times R') \wedge I = O$

[性質4] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$

(2) $\overline{R} \wedge I \leqq \overline{R} \times R'$

(3) $\overline{R} \wedge I \leqq R' \times \overline{R}$

(4) $\overline{R'} \wedge I \leqq R \times \overline{R'}$

(5) $\overline{R'} \wedge I \leqq \overline{R'} \times R$

(証明) (1) ⇒ (2) $I \leqq R$ から $\overline{R} \wedge I = O$ となるので，$\overline{R} \wedge I = O \leqq \overline{R} \times R'$ となる。

(2) ⇒ (1) 性質3(4) によって $(\overline{R} \times R') \wedge I = O$ であるから $\overline{R} \wedge I = O$ すな

わち $I \leqq R$ となる。

他の場合については省略する。 (証明終)

[性質5] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$

(2) $\overline{R} \wedge I \leqq R \times \overline{R'}$

(3) $\overline{R} \wedge I \leqq \overline{R'} \times R$

(4) $\overline{R'} \wedge I \leqq \overline{R} \times R'$

(5) $\overline{R'} \wedge I \leqq R' \times \overline{R}$

(証明) 性質4の証明と同様である。 (証明終)

[性質6] (1) $\overline{R} \leqq R \times \overline{R'} \Rightarrow I \leqq R$

(2) $\overline{R} \leqq \overline{R'} \times R \Rightarrow I \leqq R$

(3) $\overline{R'} \leqq \overline{R} \times R' \Rightarrow I \leqq R$

(4) $\overline{R'} \leqq R' \times \overline{R} \Rightarrow I \leqq R$

(証明) (1) 性質3(1)によって $(R \times \overline{R'}) \wedge I = O$ だから $\overline{R} \wedge I = O$ となり，$I \leqq R$ となる。(2)-(4) については省略する。 (証明終)

[注意1] 次の命題は一般には成立しない。

$$I \leqq R \Rightarrow \overline{R} \leqq R \times \overline{R'} \quad ; \quad I \leqq R \Rightarrow \overline{R'} \leqq \overline{R} \times R'$$

$$I \leqq R \Rightarrow \overline{R} \leqq \overline{R'} \times R \quad ; \quad I \leqq R \Rightarrow \overline{R'} \leqq R' \times \overline{R}$$

いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，$I \leqq R$ であるが，$\overline{R} \leqq R \times \overline{R'}$，$\overline{R} \leqq \overline{R'} \times R$，$\overline{R'} \leqq \overline{R} \times R'$，$\overline{R'} \leqq R' \times \overline{R}$のいずれも成立しない。

しかし，性質2および性質5で示しているように

$$I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \leqq \overline{R} \times R' \quad ; \quad I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R'} \leqq R \times \overline{R'}$$

$$I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \leqq R' \times \overline{R} \quad ; \quad I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$$

および

$$I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \wedge I \leqq R \times \overline{R'} \quad ; \quad I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R'} \wedge I \leqq \overline{R} \times R'$$

$$I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \wedge I \leqq \overline{R'} \times R \quad ; \quad I \leqq R \Leftrightarrow \overline{R'} \wedge I \leqq R' \times \overline{R}$$

は成立する。実際，上記の行列 R に関して

$$\overline{R} \leqq \overline{R} \times R' \quad ; \quad \overline{R'} \leqq R \times \overline{R'}$$

$$\overline{R} \leqq R' \times \overline{R} \quad ; \quad \overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$$

が成立する。また，明らかに

$$\overline{R}\wedge I\leqq R\times\overline{R'} \quad ; \quad \overline{R'}\wedge I\leqq\overline{R}\times R'$$

$$\overline{R}\wedge I\leqq\overline{R'}\times R \quad ; \quad \overline{R'}\wedge I\leqq R'\times\overline{R}$$

が成立する。

[性質7] [8] 次の条件は同値である。

(1) $R\wedge I=O$

(2) $(\overline{R'}\times R)\wedge(R\times\overline{R'})\geqq R$

(3) $\overline{R'}\times R\geqq R$

(4) $R\times\overline{R'}\geqq R$

(5) $(\overline{R'}\times R)\vee(R\times\overline{R'})\geqq R$

[性質8] 次の条件は同値である。

(1) $I\leqq R$

(2) $(R'\times\overline{R})\wedge(\overline{R}\times R')\geqq\overline{R}$

(3) $R'\times\overline{R}\geqq\overline{R}$

(4) $\overline{R}\times R'\geqq\overline{R}$

(5) $(R'\times\overline{R})\vee(\overline{R}\times R')\geqq\overline{R}$

(証明) 性質7において R を $\overline{R}$ とおけばよい。　(証明終)

3.2 $R\leqq R'$ の同値条件

対称性の同値条件，すなわち与えられた R が対称的関係を表現するブール行列となるための必要十分条件について考察する。

[性質9] [13, 17, 18] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R'\leqq R$

(3) $R'=R$

(4) $R\wedge R'=R$

(5) $R\wedge R'=R'$

(6) $R\vee R'=R$

(7) $R\vee R'=R'$

(8) $R\leqq\overline{R}\vee R'$

(9) $R'\leqq\overline{R'}\vee R$

(10) $R\wedge\overline{R'}\leqq R'$

(11) $R'\wedge\overline{R}\leqq R$

[性質10] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $\overline{R}\leqq\overline{R'}$

(3) $\overline{R'}\leqq\overline{R}$

(7) $\overline{R}\vee\overline{R'}=\overline{R}$

(8) $\overline{R}\vee\overline{R'}=\overline{R'}$

(9) $\overline{R}\leqq R\vee\overline{R'}$

(4) $\overline{R'}=\overline{R}$　　(10) $\overline{R'}\leqq R'\vee\overline{R}$
(5) $\overline{R}\wedge\overline{R'}=\overline{R}$　　(11) $\overline{R}\wedge R'\leqq\overline{R'}$
(6) $\overline{R}\wedge\overline{R'}=\overline{R'}$　　(12) $\overline{R'}\wedge R\leqq\overline{R}$

（証明） $R'=R\Leftrightarrow(\overline{R})'=\overline{R}$ であるから性質9において R を $\overline{R}$ とおけばよい。

（証明終）

［性質11］ 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$　　(5) $R\wedge\overline{I}\leqq R'\wedge\overline{I}$
(2) $R\vee I\leqq R'\vee I$　　(6) $R'\wedge\overline{I}\leqq R\wedge\overline{I}$
(3) $R'\vee I\leqq R\vee I$　　(7) $R\wedge\overline{I}=R'\wedge\overline{I}$
(4) $R\vee I=R'\vee I$

（証明） (1) ⇒ (2) 明らかである。

(2) ⇒ (1) $R\vee I\leqq R'\vee I$ であるので $(R\vee I)\wedge\overline{I}\leqq(R'\vee I)\wedge\overline{I}$ となり $R\wedge\overline{I}\leqq R'\wedge\overline{I}$ となる。ところで $R\wedge I=R'\wedge I$ だから $(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\leqq(R'\wedge\overline{I})\vee(R'\wedge I)$ となり，$R\leqq R'$ となる。

(1) ⇒ (5) $R\leqq R'$ から $R\wedge\overline{I}\leqq R'\wedge\overline{I}$ となる。

(5) ⇒ (1) $R\wedge\overline{I}\leqq R'\wedge\overline{I}$ であり，また $R\wedge I=R'\wedge I$ であるから $(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\leqq(R'\wedge\overline{I})\vee(R'\wedge I)$ となり，$R\leqq R'$ が得られる。

他の場合は省略する。　（証明終）

なお $R\leqq R'$ の同値条件として，性質9から性質10を得たやり方と同じようにして，以下の性質12-14，性質16-19からも同様の同値条件を導くことができるが，それらについては省略する。

［性質12］ 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$　　(4) $R\wedge\overline{I}\leqq R'$
(2) $R\leqq R'\vee I$　　(5) $R'\wedge\overline{I}\leqq R$
(3) $R'\leqq R\vee I$

（証明） (1) ⇒ (2) $R\leqq R'\leqq R'\vee I$

(2) ⇔ (3) 両辺を転置すればよい。

(2) ⇒ (4) $R\leqq R'\vee I$ から $R\wedge\overline{I}\leqq R'$ となる。

(4) ⇔ (5) 両辺を転置すればよい。

(4) ⇒ (1) $R\wedge\bar{I}\leqq R'$であり，また$R\wedge I=R'\wedge I$であるから$(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I)\leqq R'\vee(R'\wedge I)$となり，$R\leqq R'$が得られる。　(証明終)

[性質13] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $(R\wedge R')\vee I=R\vee I$

(3) $(R\wedge R')\vee I=R'\vee I$

(4) $R\wedge R'\wedge\bar{I}=R\wedge\bar{I}$

(5) $R\wedge R'\wedge\bar{I}=R'\wedge\bar{I}$

(証明) (1) ⇒ (2) ⇒ (4) $R\leqq R'$から$R'=R$となるので$(R\wedge R')\vee I=(R\wedge R)\vee I=R\vee I$となり，(2)が得られる。これから $((R\wedge R')\vee I)\wedge\bar{I}=(R\vee I)\wedge\bar{I}$となり，$R\wedge R'\wedge\bar{I}=R\wedge\bar{I}$となって，(4)が得られる。

(4) ⇒ (1) $R\wedge R'\wedge\bar{I}=R\wedge\bar{I}$であり，また$R\wedge R'\wedge I=R\wedge I$であるから$(R\wedge R'\wedge\bar{I})\vee(R\wedge R'\wedge I)=(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I)$となり，$R\wedge R'=R$したがって$R\leqq R'$が得られる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質14] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R\vee R'\vee I=R'\vee I$

(3) $R\vee R'\vee I=R\vee I$

(4) $(R\vee R')\wedge\bar{I}=R'\wedge\bar{I}$

(5) $(R\vee R')\wedge\bar{I}=R\wedge\bar{I}$

(証明) (1) ⇒ (2) ⇒ (4) $R\leqq R'$から$R=R'$となるので $R\vee R'\vee I=R'\vee R'\vee I=R'\vee I$ となり，(2)が得られる。これから $(R\vee R'\vee I)\wedge\bar{I}=(R'\vee I)\wedge\bar{I}$となり，$(R\vee R')\wedge\bar{I}=R'\wedge\bar{I}$となって，(4) が得られる。

(4) ⇒ (1) $(R\vee R')\wedge\bar{I}=R'\wedge\bar{I}$であり，また$R\wedge I=R'\wedge I$であるので $(R\vee R')\wedge I=(R\wedge I)\vee(R'\wedge I)=(R'\wedge I)\vee(R'\wedge I)=R'\wedge I$となる。したがって$((R\vee R')\wedge\bar{I})\vee((R\vee R')\wedge I)=(R'\wedge\bar{I})\vee(R'\wedge I)$となり，$R\vee R'=R'$すなわち$R\leqq R'$が得られる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質15] [3]　(1) $I\leqq R'\vee\bar{R}$

(2) $I\leqq R\vee\overline{R'}$

(5) $R\wedge\overline{R'}\wedge\bar{I}=R\wedge\overline{R'}$

(6) $R'\wedge\bar{R}\wedge\bar{I}=R'\wedge\bar{R}$

(3) $R\wedge\overline{R'}\wedge I=O$　(7) $R'\vee\overline{R}\vee I=R'\vee\overline{R}$

(4) $R'\wedge\overline{R}\wedge I=O$　(8) $R\vee\overline{R'}\vee I=R\vee\overline{R'}$

［性質16］次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R\vee I\leqq\overline{R}\vee R'$

(3) $R'\vee I\leqq\overline{R'}\vee R$

(4) $R\wedge\overline{I}\leqq(\overline{R}\vee R')\wedge\overline{I}$

(5) $R'\wedge\overline{I}\leqq(\overline{R'}\vee R)\wedge\overline{I}$

（証明）(1) ⇒ (2) ⇒ (4) $R\leqq R'\leqq\overline{R}\vee R'$となり，また性質15(7)によって$\overline{R}\vee R'\vee I=\overline{R}\vee R'$であるから $R\vee I\leqq\overline{R}\vee R'\vee I=\overline{R}\vee R'$となり，(2) が得られる。これから $(R\vee I)\wedge\overline{I}\leqq(\overline{R}\vee R')\wedge\overline{I}$，$R\wedge\overline{I}\leqq(\overline{R}\vee R')\wedge\overline{I}$となり，(4) が得られる。

(4) ⇒ (1) $R\wedge\overline{I}\leqq(\overline{R}\vee R')\wedge\overline{I}$であり，また性質15(1)によって$I\leqq\overline{R}\vee R'$であるので $(\overline{R}\vee R')\wedge I=I$となる。したがって$R\wedge I\leqq I=(\overline{R}\vee R')\wedge I$であるから$(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\leqq((\overline{R}\vee R')\wedge\overline{I})\vee((\overline{R}\vee R')\wedge I)$となり，$R\leqq\overline{R}\vee R'$が得られ，性質9(8),(1)によって$R\leqq R'$となる。

他の場合は省略する。（証明終）

［性質17］次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\vee R'$

(3) $R'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\vee R$

（証明）(1) ⇒ (2) $R\wedge\overline{I}\leqq R\leqq R'\leqq\overline{R}\vee R'$

(2) ⇒ (1) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\vee R'$ ⇔ $R\wedge R\wedge\overline{I}\leqq R'$ ⇔ $R\wedge\overline{I}\leqq R'$となり，また$R\wedge I=R'\wedge I$であるから$(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\leqq R'\vee(R'\wedge I)$ となり，$R\leqq R'$が得られる。

(2) ⇔ (3) 両辺を転置すればよい。（証明終）

［性質18］次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $(R\wedge\overline{R'})\vee I\leqq R'\vee I$

(3) $(R'\wedge\overline{R})\vee I\leqq R\vee I$

(4) $R\wedge\overline{R'}\leqq R'\wedge\overline{I}$

(5) $R'\wedge\overline{R}\leqq R\wedge\overline{I}$

（証明）(1) ⇒ (2) ⇒ (4) 性質9(1),(10)によって$R\leqq R'$のとき$R\wedge\overline{R'}\leqq R'$となり，したがって$(R\wedge\overline{R'})\vee I\leqq R'\vee I$となり，(2)が得られる。これから

$((R\wedge\overline{R'})\vee I)\wedge\overline{I}\leqq(R'\vee I)\wedge\overline{I}$ となり，$R\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R'\wedge\overline{I}$ となる。ところで性質15(5)から $R\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}=R\wedge\overline{R'}$ であるから $R\wedge\overline{R'}\leqq R'\wedge\overline{I}$ となり，(4)が得られる。

(4) ⇒ (1) $R\wedge\overline{R'}\leqq R'\wedge\overline{I}\leqq R'$ となり，$R\wedge\overline{R'}\leqq R'$ だから $R\leqq R'$ となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質19] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R\wedge\overline{R'}\leqq R'\vee I$

(3) $R'\wedge\overline{R}\leqq R\vee I$

(証明) (1)⇒ (2) $R\wedge\overline{R'}=O\leqq R'\vee I$

(2) ⇔ (3) 両辺を転置すればよい。

(2) ⇒ (1) $R\wedge\overline{R'}\leqq R'\vee I$ から $R\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R'$ となる。また $R\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}=R\wedge\overline{R'}$ であるから $R\wedge\overline{R'}\leqq R'$ となり，$R\leqq R'\vee R'=R'$ となる。　(証明終)

[性質20] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R\leqq(R\wedge R')\vee I$

(3) $R'\leqq(R\wedge R')\vee I$

(4) $R\wedge\overline{I}\leqq R\wedge R'$

(5) $R'\wedge\overline{I}\leqq R\wedge R'$

(証明) (1) ⇒ (2) $R\leqq R\vee I=(R\wedge R')\vee I$

(2) ⇒ (1) $R\leqq(R\wedge R')\vee I$ から $R\wedge\overline{I}\leqq((R\wedge R')\vee I)\wedge\overline{I}$ となり，$R\wedge\overline{I}\leqq R\wedge R'\wedge\overline{I}$ となる。ところで $R\wedge I=R\wedge R'\wedge I$ であるから $(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\leqq(R\wedge R'\wedge\overline{I})\vee(R\wedge R'\wedge I)$ となり，$R\leqq R\wedge R'\leqq R'$ となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質21] 次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$

(2) $R\vee R'\leqq R'\vee I$

(3) $R\vee R'\leqq R\vee I$

(4) $(R\vee R')\wedge\overline{I}\leqq R'$

(5) $(R\vee R')\wedge\overline{I}\leqq R$

(証明) (1) ⇒ (2) $R\vee R'=R'\leqq R'\vee I$

(2) ⇒ (1) $R\vee R'\leqq R'\vee I$ から $(R\vee R')\wedge\overline{I}\leqq(R'\vee I)\wedge\overline{I}$ となり，$(R\vee R')\wedge\overline{I}\leqq R'\wedge\overline{I}$ となる。ところで $(R\vee R')\wedge I=R'\wedge I$ であるから $((R\vee R')\wedge\overline{I})\vee$

$((R \vee R') \wedge I) \leqq (R' \wedge \overline{I}) \vee (R' \wedge I)$ となり，$R \vee R' \leqq R'$ すなわち $R \leqq R'$ となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質22] [5] 次の条件は同値である。

(1) $S \leqq T$

(2) $S \wedge \overline{T} = O$

(3) $S' \wedge \overline{T'} = O$

(4) $\overline{S} \vee T = E$

(5) $\overline{S'} \vee T' = E$

(6) $(S \times \overline{T'}) \wedge I = O$

(7) $(\overline{T'} \times S) \wedge I = O$

(8) $(S' \times \overline{T}) \wedge I = O$

(9) $(\overline{T} \times S') \wedge I = O$

[性質23] 次の条件は同値である。

(1) $S \leqq T$

(2) $S \times \overline{T'} \leqq \overline{I}$

(3) $\overline{T'} \times S \leqq \overline{I}$

(4) $S' \times \overline{T} \leqq \overline{I}$

(5) $\overline{T} \times S' \leqq \overline{I}$

(証明) 性質22(1)，(6)-(9) による。　(証明終)

[性質24] 次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$

(2) $R \wedge \overline{R'} = O$

(3) $R' \wedge \overline{R} = O$

(4) $\overline{R} \vee R' = E$

(5) $\overline{R'} \vee R = E$

(6) $(R \times \overline{R}) \wedge I = O$

(7) $(\overline{R} \times R) \wedge I = O$

(8) $(R' \times \overline{R'}) \wedge I = O$

(9) $(\overline{R'} \times R') \wedge I = O$

(証明) 性質22による。　(証明終)

[性質25] 次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$

(2) $R \times \overline{R} \leqq \overline{I}$

(3) $\overline{R} \times R \leqq \overline{I}$

(4) $R' \times \overline{R'} \leqq \overline{I}$

(5) $\overline{R'} \times R' \leqq \overline{I}$

(証明) 性質23による。　(証明終)

[性質26] 次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$

(2) $I \leqq \overline{R} \diamond R$

(4) $I \leqq \overline{R'} \diamond R'$

(5) $I \leqq R' \diamond \overline{R'}$

(3) $I \leqq R \Diamond \overline{R}$

(証明) 性質25による。 (証明終)

[性質27] 次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$

(2) $I \leqq (\overline{R} \Diamond R) \wedge (R \Diamond \overline{R}) \wedge (\overline{R'} \Diamond R') \wedge (R' \Diamond \overline{R'})$

(証明) (1) ⇒ (2) 性質26による。

(2) ⇒ (1) $I \leqq \overline{R} \Diamond R$ となるので 性質26 (2), (1)によって $R \leqq R'$ となる。

(証明終)

3.3 $R^2 \leqq R$ の同値条件

推移性の同値条件，すなわち与えられた R が推移的関係を表現するブール行列となるための必要十分条件について考察する。

[性質28] [13, 18] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R \leqq R \Diamond \overline{R'}$

(3) $R \leqq \overline{R'} \Diamond R$

(4) $R \leqq (R \Diamond \overline{R'}) \wedge (\overline{R'} \Diamond R)$

(5) $R' \leqq \overline{R} \Diamond R'$

(6) $R' \leqq R' \Diamond \overline{R}$

(7) $R' \leqq (\overline{R} \Diamond R') \wedge (R' \Diamond \overline{R})$

(8) $R \vee R^2 = R$

(9) $R^2 \vee R^3 \leqq R$

(10) $R^+ = R$

[性質29] [4] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $I \leqq R \Diamond \overline{R'} \Diamond \overline{R'}$

(3) $I \leqq \overline{R'} \Diamond R \Diamond \overline{R'}$

(4) $I \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'} \Diamond R$

(5) $R^2 \times \overline{R'} \leqq \overline{I}$

(6) $R \times \overline{R'} \times R \leqq \overline{I}$

(7) $\overline{R'} \times R^2 \leqq \overline{I}$

(8) $\overline{R} \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R}$

[性質30] [4] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$

(3) $R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

(4) $(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$

推移性すなわち $R^2 \leqq R$ と同値な条件についてはここで示したもの以外にも

多数の同値条件が知られている[4，6]。

3.4　$I \leqq R$，$R \leqq R'$ の同値条件

与えられた関係が反射的でかつ対称的であるための必要十分条件について考察する。反射的で対称的な関係は両立関係，同調関係(compatible relation)[11]，また許容関係(tolerance relation)と呼ばれることがある。

[性質31]　次の条件は同値である。

(1)　$I \leqq R$，$R \leqq R'$

(2)　$I \vee R' \leqq R$

(3)　$I \vee R \leqq R'$

(4)　$I \vee R' \leqq R \wedge R'$

(5)　$I \vee R \leqq R \wedge R'$

(6)　$I \vee R' = R$

(7)　$I \vee R = R'$

(8)　$I \vee R' = R \wedge R'$

(9)　$I \vee R = R \wedge R'$

(10)　$I \vee (R \wedge R') = R$

(11)　$I \vee (R \wedge R') = R'$

(証明)　(1) ⇒ (10)　$R \leqq R'$ から $R' = R$ となり，また $I \leqq R$ なので $I \vee (R \wedge R') = I \vee (R \wedge R) = I \vee R = R$ となる。

(10) ⇒ (1)　$I \leqq R$ となり，また $(I \vee (R \wedge R'))' = R'$，$I \vee (R \wedge R') = R'$ となるので $R = R'$ が得られる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質32]　次の条件は同値である。

(1)　$I \leqq R$，$R \leqq R'$

(2)　$R \vee I = R \vee R'$

(3)　$R' \vee I = R \vee R'$

(証明) (1) ⇒ (2)　$R' = R$ となるから $R \vee I = R = R \vee R'$ となる。

(2) ⇔ (3)　両辺を転置すればよい。

(2) ⇒ (1)　$I \leqq R \vee R'$ だから $(R \vee R') \wedge I = I$ となり，$(R \wedge I) \vee (R' \wedge I) = I$ となる。ところで $R \wedge I = R' \wedge I$ であるから $R \wedge I = I$ すなわち $I \leqq R$ となり，$R \vee I = R$ となる。したがって $R = R \vee R'$ となり，$R' \leqq R$ すなわち $R \leqq R'$ が得られる。　(証明終)

[性質33]　次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R,\ R \leqq R'$

(2) $I \leqq R \wedge (\overline{R'} \diamond R')$

(3) $I \leqq R \wedge (R' \diamond \overline{R'})$

(4) $I \leqq R \wedge (R \diamond \overline{R})$

(5) $I \leqq R \wedge (\overline{R} \diamond R)$

(証明) (1) ⇔ (2) $R \leqq R' \Leftrightarrow R \times I \leqq R' \Leftrightarrow I \leqq \overline{R'} \diamond R'$ であるから「$I \leqq R,\ R \leqq R'$」⇔「$I \leqq R,\ I \leqq \overline{R'} \diamond R'$」$\Leftrightarrow I \leqq R \wedge (\overline{R'} \diamond R')$ となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質34] $I \leqq R,\ R \leqq R' \Leftrightarrow I \leqq R \wedge (\overline{R'} \diamond R') \wedge (R' \diamond \overline{R'})$

(証明) (1) $I \leqq R,\ R \leqq R'$ のとき

$R \leqq R'$ から $I \leqq \overline{R'} \diamond R'$, $I \leqq R' \diamond \overline{R'}$ となり, $I \leqq R \wedge (\overline{R'} \diamond R') \wedge (R' \diamond \overline{R'})$ となる。

(2) $I \leqq R \wedge (\overline{R'} \diamond R') \wedge (R' \diamond \overline{R'})$ のとき

$I \leqq R,\ I \leqq \overline{R'} \diamond R'$ となり, $R \leqq R'$ となる。　(証明終)

[性質35] $I \leqq R,\ R \leqq R' \Leftrightarrow I \leqq R \wedge ((\overline{R'} \diamond R') \vee (R \diamond \overline{R}))$

(証明) (1) $I \leqq R,\ R \leqq R'$ のとき

$R \leqq R'$ から $I \leqq \overline{R'} \diamond R'$ となり, $I \leqq R \wedge ((\overline{R'} \diamond R') \vee (R \diamond \overline{R}))$ となる。

(2) $I \leqq R \wedge ((\overline{R'} \diamond R') \vee (R \diamond \overline{R}))$ のとき

$I \leqq R,\ I \leqq (\overline{R'} \diamond R') \vee (R \diamond \overline{R})$ となり, $I = ((\overline{R'} \diamond R') \wedge I) \vee ((R \diamond \overline{R}) \wedge I)$ となるが, $(\overline{R'} \diamond R') \wedge I = (\overline{R'} \diamond R')' \wedge I = (R \diamond \overline{R}) \wedge I$ であるので $I = (\overline{R'} \diamond R') \wedge I$ となり, $I \leqq \overline{R'} \diamond R'$ すなわち $R \leqq R'$ が得られる。　(証明終)

[注意2] 一般には「$I \leqq R \wedge ((\overline{R'} \diamond R') \vee (R' \diamond \overline{R'})) \Rightarrow R \leqq R'$」とはいえない。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば, $I \leqq R \wedge ((\overline{R'} \diamond R') \vee (R' \diamond \overline{R'}))$ となるが, $R \leqq R'$ とはならない。

[性質36] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R,\ R \leqq R'$

(2) $I \leqq R \wedge R' \wedge (\overline{R'} \diamond R') \wedge (R' \diamond \overline{R'}) \wedge (R \diamond \overline{R}) \wedge (\overline{R} \diamond R)$

(証明) (1) ⇒ (2) $R \leqq R'$ から $I \leqq \overline{R'} \diamond R'$, $I \leqq R' \diamond \overline{R'}$ なり, 転置して $I \leqq R \diamond \overline{R}$, $I \leqq \overline{R} \diamond R$ が得られる。また $I \leqq R$ から $I \leqq R'$ となるから,

$$I \leqq R \wedge R' \wedge (\overline{R'} \diamond R') \wedge (R' \diamond \overline{R'}) \wedge (R \diamond \overline{R}) \wedge (\overline{R} \diamond R)$$

が成立する。

(2) ⇒ (1) $I \leqq R$, $I \leqq \overline{R'} \Diamond R'$ となり，$R \leqq R'$ が得られる。　(証明終)

[性質37] [13] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R \leqq R'$

(2) $R \vee R' \vee I = R$

(3) $R \vee R' \vee I = R'$

(4) $R \vee R' \vee I \leqq R$

(5) $R \vee R' \vee I \leqq R'$

[性質38] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R \leqq R'$

(2) $(R \wedge \overline{R'}) \vee (\overline{R} \wedge I\ ) = O$

(3) $(R' \wedge \overline{R}) \vee (\overline{R'} \wedge I\ ) = O$

(4) $(R' \wedge \overline{R}) \vee (\overline{R} \wedge I\ ) = O$

(5) $(R \wedge \overline{R'}) \vee (\overline{R'} \wedge I) = O$

(6) $\overline{R} \wedge (R' \vee I) = O$

(7) $\overline{R'} \wedge (R \vee I) = O$

(証明) (1) ⇔ (2) $I \leqq R \Leftrightarrow I \wedge \overline{R} = O$ であり，また $R \leqq R' \Leftrightarrow R \wedge \overline{R'} = O$ であるから「$I \leqq R$, $R \leqq R'$」⇔「$I \wedge \overline{R} = O$, $R \wedge \overline{R'} = O$」⇔ $(I \wedge \overline{R}) \vee (R \wedge \overline{R'}) = O$ ⇔ $(R \wedge \overline{R'}) \vee (\overline{R} \wedge I) = O$ となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

3.5 $I \leqq R$, $R^2 \leqq R$ の同値条件

与えられた関係が反射的でかつ推移的であるための必要十分条件について考察する。反射的でかつ推移的な関係は擬順序(pseudo-order)または前順序(preorder)と呼ばれる[14]。

[性質39] [2, 8, 10, 12, 13] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R^2 \leqq R$

(2) $I \leqq R$, $R^2 = R$

(3) $I \vee R^2 \leqq R$

(4) $I \vee R^2 = R$

(5) $R = R \Diamond \overline{R'}$

(6) $R = \overline{R'} \Diamond R$

(7) $R' = \overline{R} \Diamond R'$

(9) $R \times \overline{R'} = \overline{R'}$

(10) $\overline{R'} \times R = \overline{R'}$

(11) $\overline{R} \times R' = \overline{R}$

(12) $R' \times \overline{R} = \overline{R}$

(13) $R \times \overline{R'} = \overline{R'} \times R = \overline{R'}$

(14) $\overline{R} \times R' = R' \times \overline{R} = \overline{R}$

(15) $R^* = R$

(8) $R' = R' \Diamond \overline{R}$

[注意3] 一般には,「$R = R \Diamond \overline{R'} \Rightarrow R = \overline{R} \Diamond R'$」とはいえない。

いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば $R = R \Diamond \overline{R'}$ となるが, $R = \overline{R} \Diamond R'$ とはならない。

[性質40] [2] すべての m ($m = 2, 3, \cdots$) に対して, 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R^2 \leqq R$

(2) $I \leqq R$, $R^m \leqq R$

(3) $I \leqq R$, $R^m = R$

(4) $I \vee R^m \leqq R$

(5) $I \vee R^m = R$

[性質41] すべての m ($m = 2, 3, \cdots$) に対して, 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R^2 \leqq R$

(2) $I \leqq R^m$, $R^m = R$

(3) $I \leqq R^m$, $R^m \leqq R$

(証明) (1) ⇒ (2) $R^2 = R$ であるから $I \leqq R = R^m$, $R^m = R$ となる。

(2) ⇒ (3) 明らかである。

(3) ⇒ (1) $I \leqq R^m \leqq R$ だから $I \leqq R$ となり, これから $I \leqq R \leqq R^2 \leqq \cdots \leqq R^m$ となる。一方 $R^m \leqq R$ であるから $R = R^2 = \cdots = R^m$ となる。(証明終)

[性質42] すべての m ($m = 1, 2, \cdots$) に対して, 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R^2 \leqq R$

(2) $I \leqq R^m$, $R^{m+2} = R$

(3) $I \leqq R^m$, $R^{m+2} \leqq R$

(証明) (1) ⇒ (2) $R^2 = R$ となるから $I \leqq R = R^m$, $R^{m+2} = R$ となる。

(2) ⇒ (3) 明らかである。

(3) ⇒ (1) $I \leqq R^m$ から $R^2 = I \times R^2 \leqq R^m \times R^2 = R^{m+2} \leqq R$, $R^2 \leqq R$ となり, また $I \leqq R^m \leqq R$ となる。(証明終)

反射的でかつ推移的な条件については上記の性質39, 40, 41, 42 以外にも多数の条件が知られている[2]。

3.6　$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$ の同値条件

与えられた関係が対称的でかつ推移的であるための必要十分条件について考察する。対称的で推移的な関係は partial equivalence と呼ばれる。

［性質43］［1，12，13］次の条件は同値である。

(1)　$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$

(2)　$R \leqq R'$，$R^2 = R$

(3)　$R' \vee R^2 \leqq R$

(4)　$R' \vee R^2 = R$

(5)　$(R \vee R')^2 \leqq R$

(6)　$(R \vee R')^2 = R$

(7)　$R \times R' = R$

(8)　$R' \times R = R$

(9)　$R \times R' \leqq R$，$R' \times R \leqq R$

(10)　$R \times \overline{R} \leqq \overline{R}$，$\overline{R} \times R \leqq \overline{R}$

(11)　$R = (R \vee R')^+$

［性質44］次の条件は同値である。

(1)　$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$

(2)　$R \vee R^2 = R'$

(3)　$R \vee R^2 \leqq R'$

（証明）(1) ⇒ (2)　$R' = R$，$R^2 = R$ となるから，$R \vee R^2 = R \vee R = R = R'$ となる。

(2) ⇒ (3)　明らかである。

(3) ⇒ (1)　$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R'$ であり，$R \leqq R'$ から $R' = R$ となるので，$R^2 \leqq R' = R$ となる。　（証明終）

［性質45］　(1)　$R^2 \times R' \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2)　$R^2 \times (R' \times R)^m \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$　$(m = 1, 2, \cdots)$

（証明）(1)　$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とする。このとき $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge r_{kj} \wedge r_{kj} = 1$ であり，$R \times R \times R' \times R \leqq R$ によって $r_{ij} = 1$ となり，$R^2 \leqq R$ となる。

(2)　$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とする。$R' \times R$ の (i, j) 要素を $(R' \times R)_{ij}$ で示せば $r_{kj} \wedge r_{kj} = 1$ だから $(R' \times R\ )_{jj} = 1$ となる。また $(R' \times R)^m$ の (i, j) 要素を $((R' \times R)^m)_{ij}$ で示せば $(R' \times R)_{jj} = 1$ によって $((R' \times R)^m)_{jj} = 1$ となる。したがって $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge ((R' \times R)^m)_{jj} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$ が得られ，$R^2 \leqq R$ となる。　（証明終）

［性質46］　(1)　$R \times R' \times R^2 \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2)　$(R \times R')^l \times R^2 \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$　$(l = 1, 2, \cdots)$

（証明） 性質45の証明と同様である。 （証明終）

[性質47] l, $m=0,1,2,$ …に対して，

$$(R\times R')^{l}\times R^{2}\times(R'\times R)^{m}\leqq R \Rightarrow R^{2}\leqq R$$

ただし $(R\times R')^{0}=(R'\times R)^{0}=I$ とする。

（証明） $l=m=0$ のときは明らかであり，$l=0$，$m\geqq 1$ のときは性質45で，また $l\geqq 1$，$m=0$ のときは性質46ですでに示しているので，l，$m\geqq 1$とする。

$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおく。$R\times R'$，$R'\times R$ の $(i,\ j)$ 要素を $(R\times R')_{ij}$，$(R'\times R)_{ij}$で示せば，$r_{ik}\wedge r_{ik}=1$，$r_{kj}\wedge r_{kj}=1$ によって $(R\times R')_{ii}=1$，$(R'\times R)_{jj}=1$ となる。また $(R\times R')^{l}$，$(R'\times R)^{m}$の $(i,\ j)$ 要素を $((R\times R')^{l})_{ij}$，$((R'\times R)^{m})_{ij}$で示せば，$(R\times R')_{ii}=1$，$(R'\times R)_{jj}=1$によって $((R\times R')^{l})_{ii}=1$，$((R'\times R)^{m})_{jj}=1$ となり，$((R\times R')^{l})_{ii}\wedge r_{ik}\wedge r_{kj}\wedge((R'\times R)^{m})_{jj}=1$となるので $(R\times R')^{l}\times R\times R\times(R'\times R)^{m}\leqq R$ によって $r_{ij}=1$となり，$R^{2}\leqq R$ が得られる。 （証明終）

[性質48] $m=1$, 2, …に対して，次の条件は同値である。

(1) $R\leqq R'$，$R^{2}\leqq R$

(2) $R\leqq R'$，$R^{2m}=R$

(3) $R\leqq R'$，$R^{2m}\leqq R$

（証明） $m=1$のときは明らかであるので $m\geqq 2$とする。

(1) ⇒ (2) $R^{2}=R$ であるので $R^{2m}=R$ となる。

(2) ⇒ (3) 明らかである。

(3) ⇒ (1) $r_{ik}=r_{kj}=1$とする。$R\leqq R'$ によって $r_{jk}=r_{kj}=1$となり，$R^{2(m-1)}$の $(i,\ j)$ 要素を $(R^{2(m-1)})_{ij}$ で示せば $(R^{2(m-1)})_{jj}=1$となる。したがって $r_{ik}\wedge r_{kj}\wedge(R^{2(m-1)})_{jj}=1$となり，$r_{ij}=1$が得られ，$R^{2}\leqq R$ となる。 （証明終）

3.7 $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^{2}\leqq R$ の同値条件

与えられた関係が反射的で対称的で推移的であるための必要十分条件，すなわち同値関係となるための必要十分条件について考察する。

[性質49] [9, 10, 13, 15, 16, 20] 次の条件は同値である。

(1) $I\leqq R$，$R\leqq R'$，$R^{2}\leqq R$

(2) $I\leqq R$，$R^{2}\leqq R'$

(7) $I\leqq R$，$R'\times R=R$

(8) $(R\times R')\vee I\leqq R$

(3) $I \leqq R$，$R^2 = R'$
(4) $I \leqq R$，$R \times R' \leqq R$
(5) $I \leqq R$，$R' \times R \leqq R$
(6) $I \leqq R$，$R \times R' = R$
(9) $(R' \times R) \vee I \leqq R$
(10) $(R \times R') \vee I = R$
(11) $(R' \times R) \vee I = R$
(12) $R = (R \vee R')^*$

なお，上の性質中の条件について，$R^2 \leqq R'$ なる R で表現される関係は circular であるといわれる[9，20]。また $R' \times R \leqq R$ なる R で表現される関係はユークリッド的であるといわれ[15]，$R \times R' \leqq R$ なる R で表現される関係は cotransitivity を有している，また第三者による相等の関係であるといわれる。

[性質50] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$，$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$
(2) $I \vee R' \vee R^2 \leqq R$
(3) $I \vee R \vee R^2 \leqq R'$
(4) $I \vee R' \vee R^2 \leqq R'$
(5) $I \vee R' \vee R^2 = R$
(6) $I \vee R \vee R^2 = R'$
(7) $I \vee R' \vee R^2 = R'$

(証明) (1) ⇒ (5) $R' = R$，$R^2 = R$ となるので $I \vee R' \vee R^2 = I \vee R \vee R = I \vee R = R$ となる。

(5) ⇒ (2) 明らかである。

(2) ⇒ (1) $I \leqq R$ ，$R' \leqq R$，$R^2 \leqq R$ となり，$R' \leqq R$ から $R \leqq R'$ となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質51] $m = 1$，2，…に対して，次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$，$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$
(2) $I \leqq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$，$R \leqq R'$，$T_1 \times T_2 = R$
(3) $I \leqq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$，$R \leqq R'$，$T_1 \times T_2 \leqq R$

ただし S_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$，T_1，T_2 は R または R' である。

(証明) (1) ⇒ (2) $R' = R$，$R^2 = R$ となるので，$I \leqq R = R^m = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$，$T_1 \times T_2 = R \times R = R$ となる。

(2) ⇒ (3) 明らかである。

(3) ⇒ (1) $R'=R$ となるから，$R^2=T_1\times T_2\leqq R$ となり，また $I\leqq S_1\times S_2\times\cdots\times S_m=R^m\leqq R$ となる。 (証明終)

[性質52] [15, 19] 次の条件は同値である。

(1) $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$

(2) $I\leqq R\times R'$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$

(3) $I\leqq R'\times R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$

(証明) 性質51による。 (証明終)

上の性質中の $I\leqq R\times R'$ なる R で表現される関係は連鎖律を満たす，または継続的(serial)であるといわれ[15]， それは行列 R の各行に1があることを意味している。

[性質53] (1) $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R \Rightarrow I\leqq R\times R'$, $R^2=R'$

(2) $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R \Rightarrow I\leqq R'\times R$, $R^2=R'$

(証明) $I\leqq R'$ となるから，$I\leqq R\times R'$, $I\leqq R'\times R$ となる 。また $R'=R$, $R^2=R$ となるので $R^2=R=R'$ となる。 (証明終)

[注意4] 次の命題はいずれも一般には成立しない。

$I\leqq R\times R',\ R^2=R' \Rightarrow I\leqq R$; $I\leqq R'\times R,\ R^2=R' \Rightarrow R\leqq R'$

$I\leqq R'\times R,\ R^2=R' \Rightarrow I\leqq R$; $I\leqq R\times R',\ R^2=R' \Rightarrow R^2\leqq R$

$I\leqq R\times R',\ R^2=R' \Rightarrow R\leqq R'$; $I\leqq R'\times R,\ R^2=R' \Rightarrow R^2\leqq R$

いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$I\leqq R\times R'$, $I\leqq R'\times R$, $R^2=R'$ となるが，$I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$ はいずれも成立しない。

[性質54] (1) $I\leqq R\times R'$, $R^2\leqq R' \Rightarrow R^2=R'$

(2) $I\leqq R'\times R$, $R^2\leqq R' \Rightarrow R^2=R'$

(証明) (1) $I\leqq R\times R'$ から $R\times I\leqq R\times(R\times R')$ となり，$R\leqq R^2\times R'\leqq R'\times R'=(R')^2$ となる。したがって $R'\leqq R^2$ となり，$R^2\leqq R'$ だから $R^2=R'$ となる。

(2) $I\leqq R'\times R$ から $I\times R\leqq(R'\times R)\times R$ となり，$R\leqq R'\times R^2\leqq R'\times R'=(R')^2$ と

なる。したがって $R'\leqq R^2$ となり，$R^2\leqq R'$ だから $R^2=R'$ となる。（証明終）

［性質55］ $m=1, 2, \cdots$ に対して，次の条件は同値である。

(1) $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$

(2) $I\leqq R$, $S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m}=R$

(3) $I\leqq R$, $S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m}\leqq R$

ただし S_i $(i=1, 2, \cdots, 2m)$ は R または R' であり，$S_1'=S_{2m}$, $S_2'=S_{2m-1}$, $\cdots$, $S_m'=S_{m+1}$ となり，また ある i に対して $S_i=R$ であるとする。

（証明） (1) ⇒ (2) $R'=R$, $R^2=R$ となるから $R=R^{2m}=S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m}$ となる。

(2) ⇒ (3) 明らかである

(3) ⇒ (1) $I\leqq R$ から $I\leqq R'$ となるので $I\leqq S_i$ $(i=1, 2, \cdots, 2m)$ となり，またある i に対して $S_i=R$ であるから $S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m}\geqq R$ となる。したがって $S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m}=R$ となる。また $(S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m})'=R'$ から $S_{2m}'\times S_{2m-1}'\times\cdots\times S_2'\times S_1'=R'$, $S_1\times S_2\times\cdots\times S_{2m}=R'=R$ となり，$R^{2m}=R$ となる。$I\leqq R$ から $R\leqq R^2\leqq\cdots\leqq R^{2m}$ となり，$R^{2m}=R$ によって $R=R^2=\cdots=R^{2m}$ となる。

（証明終）

［性質56］ $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R \Rightarrow I\leqq R'\times R$, $R\times R'\leqq R$

（証明） $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$ のとき $I\leqq R'$, $R'=R$ となるから，$I\leqq R'\times R$, $R\times R'=R\times R=R^2\leqq R$ となる。（証明終）

［注意5］ 一般には，

$$I\leqq R'\times R,\ R\times R'\leqq R \Rightarrow I\leqq R;\ I\leqq R'\times R,\ R\times R'\leqq R \Rightarrow R^2\leqq R$$

$$I\leqq R'\times R,\ R\times R'\leqq R \Rightarrow R\leqq R'$$

とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$I\leqq R'\times R$, $R\times R'\leqq R$ となるが，$I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$ についてはいずれも成立しない。

［性質57］ $R\times R'\leqq R \Rightarrow R\leqq R^2$

(証明) $r_{ij}=1$とすれば，$r_{ij}\wedge r_{ij}=1$だから，$R\times R'\leqq R$によって$r_{ii}=1$となり，$r_{ii}\wedge r_{ij}=1$となる。　(証明終)

[性質58] $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R \Rightarrow I\leqq R\times R'$, $R'\times R\leqq R$

(証明) $I\leqq R'$, $R'=R$となるから，$I\leqq R\times R'$, $R'\times R=R\times R=R^2\leqq R$となる。

(証明終)

[注意6] 次の命題はいずれも一般には成立しない。

$I\leqq R\times R'$, $R'\times R\leqq R \Rightarrow I\leqq R$; $I\leqq R\times R'$, $R'\times R\leqq R \Rightarrow R^2\leqq R$

$I\leqq R\times R'$, $R'\times R\leqq R \Rightarrow R\leqq R'$

いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$I\leqq R\times R'$, $R'\times R\leqq R$となるけれども，$I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$はいずれも成立しない。

[性質59] $R'\times R\leqq R \Rightarrow R\leqq R^2$

(証明) $r_{ij}=1$とすれば，$r_{ij}\wedge r_{ij}=1$だから，$R'\times R\leqq R$によって$r_{jj}=1$となり，$r_{ij}\wedge r_{jj}=1$となる。　(証明終)

[性質60] $m=1$, 2, …に対して，

$I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R \Leftrightarrow I\leqq S_1\times S_2\times\cdots\times S_m$, $T_1\times T_2=R$

ただしS_i $(i=1, 2, \cdots, m)$, T_1, T_2はRまたはR'であり，$T_1'=T_2$であるとする。

(証明) (1) $I\leqq R$, $R\leqq R'$, $R^2\leqq R$のとき

$R'=R$, $R^2=R$であるので，$I\leqq R=R^m=S_1\times S_2\times\cdots\times S_m$, $T_1\times T_2=R\times R=R$となる。

(2) $I\leqq S_1\times S_2\times\cdots\times S_m$, $T_1\times T_2=R$のとき

$(T_1\times T_2)'=R'$から$T_2'\times T_1'=R'$, $T_1\times T_2=R'$となり$R'=R$となるので，$R\times R=R$, $I\leqq S_1\times S_2\times\cdots\times S_m=R^m=R$となる。　(証明終)

[性質61] $m=2$, 3, …に対して，

$I \leqq R$, $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$ $\Leftrightarrow$ $I \leqq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{2m-2}$, $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_{2m-2} \times T_{2m-1} \times T_{2m} = R$

ただし T_i $(i=1, 2, \cdots, 2m)$ は R または R' であり，また $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2$, $\cdots$, $T_{2m-2} = S_{2m-2}$, $T_{2m-1} = R$, $T_{2m} = R$ であって，さらに $T_1' = T_{2m}$, $T_2' = T_{2m-1}, \cdots$, $T_m' = T_{m+1}$ であるとする。

(証明) (1) $I \leqq R$, $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$ のとき

$R' = R$, $R^2 = R$ となるから $I \leqq R = R^{2m-2} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{2m-2}$, $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_{2m} = R^{2m} = R$ となる。

(2) $I \leqq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{2m-2}$, $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_{2m} = R$ のとき

$R^2 = I \times R^2 \leqq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{2m-2} \times R \times R = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_{2m} = R$, $R^2 \leqq R$ となり，また $(T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_{2m-1} \times T_{2m})' = R'$ から $T_{2m}' \times T_{2m-1}' \times \cdots \times T_2' \times T_1' = R'$, $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_{2m-1} \times T_{2m} = R' = R$ となり，$I \leqq R^{2m-2} \leqq R$ が得られる。　(証明終)

[性質62] $m = 2, 3, \cdots$ に対して，

$I \leqq R$, $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R \Leftrightarrow I \leqq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{2m-2}$, $T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{2m-1} \times T_{2m} = R$

ただし T_i $(i=1, 2, \cdots, 2m)$ は R または R' であり，また $T_1 = R$, $T_2 = R$, $T_3 = S_1$, $T_4 = S_2$, $\cdots$, $T_{2m-1} = S_{2m-3}$, $T_{2m} = S_{2m-2}$ であって，さらに $T_1' = T_{2m}$, $T_2' = T_{2m-1}, \cdots$, $T_m' = T_{m+1}$ であるとする。

(証明) 性質61の証明と同様である。　(証明終)

[性質63] [8, 12]　(1) $I \leqq R' \Diamond \overline{R}$　(3) $I \leqq \overline{R'} \Diamond R$

(2) $I \leqq \overline{R} \Diamond R'$　(4) $I \leqq R \Diamond \overline{R'}$

[性質64] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $(R \Diamond \overline{R'}) \wedge (R \Diamond \overline{R'})' = R$

(3) $(R \Diamond \overline{R'}) \wedge (\overline{R} \Diamond R') = R$

(4) $(\overline{R'} \Diamond R) \wedge (\overline{R'} \Diamond R)' = R$　[17]

(5) $(\overline{R'} \Diamond R) \wedge (R' \Diamond \overline{R}) = R$　[17]

(証明) (1) ⇒ (2) 性質39によって「$I \leqq R$, $R^2 \leqq R$」$\Leftrightarrow$ $R \Diamond \overline{R'} = R$ となり，また $R = R'$ となるから $R \Diamond \overline{R'} = R'$, $(R \Diamond \overline{R'})' = R$ となる。したがって $(R \Diamond \overline{R'}) \wedge (R \Diamond \overline{R'})' = R \wedge R = R$ となる。

(2) ⇒ (1) $(R \Diamond \overline{R'}) \wedge (R \Diamond \overline{R'})' = R$ から $((R \Diamond \overline{R'}) \wedge (R \Diamond \overline{R'})')' = R'$, $(R \Diamond$

$\overline{R'})' \wedge (R \Diamond \overline{R'}) = R'$となり，$R' = R$となる。性質63より$I \leqq R \Diamond \overline{R'}$であるから$I \leqq (R \Diamond \overline{R'}) \wedge (R \Diamond \overline{R'})' = R$となり，また$R \leqq R \Diamond \overline{R'}$から$R^2 \leqq R$となる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質65] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $\overline{R} \times R' = \overline{R'}$

(3) $R' \times \overline{R} = \overline{R'}$

(証明) (1) ⇒ (2) $R \times R \leqq R$から$R \leqq R \Diamond \overline{R'}$, $\overline{R} \times R' \leqq \overline{R}$となり，$R \leqq R'$から$R' = R$となるので$\overline{R} \times R' \leqq \overline{R'}$が得られる。一方$I \leqq R$から$I \leqq R'$であるから，$\overline{R} \times R' \geqq \overline{R} = \overline{R'}$となり，$\overline{R} \times R' = \overline{R'}$となる。

(2) ⇒ (1) $\overline{R} \times R' = \overline{R'}$から$R \Diamond \overline{R'} = R'$となり，性質63によって$I \leqq R \Diamond \overline{R'}$であるから$I \leqq R'$, $I \leqq R$となる。これから$\overline{R} \leqq \overline{R} \times R' = \overline{R'}$となる。したがって$\overline{R} \leqq \overline{R'}$, $R' \leqq R$, $R \leqq R'$となり，$R' = R$が得られる。また$R \Diamond \overline{R'} = R'$から$R' \leqq R \Diamond \overline{R'}$であり，$R' = R$なので$R \leqq R \Diamond \overline{R'}$となり，$R \times R \leqq R$すなわち$R^2 \leqq R$が得られる。

他の場合は省略する。　(証明終)

[性質66] 次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$, $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R'} = \overline{R}$

(3) $\overline{R'} \times R = \overline{R}$

(4) $\overline{R} \Diamond R' = R$

(5) $R' \Diamond \overline{R} = R$

(6) $R \Diamond \overline{R'} = R'$

(7) $\overline{R'} \Diamond R = R'$

(証明) 性質65による。　(証明終)

4．まとめ

同値関係の同値条件について考察をおこない，従来よく知られている条件について整理し，さらに若干の一般にはあまり知られていないと思われる条件を示した。とくに同値関係の条件を構成する反射性，対称性，推移性の種々の同値条件を調べているが，これらの条件を組み合わせることにより様々な形で同値関係の条件を表現できる。

文献

[1] 橋本　寛："Vacuously Transitive 関係の性質", 山口経済学雑誌, 第37巻, 第3・4号, pp. 399-426(昭和63年3月).

[2] 橋本　寛："反射的推移関係の性質", 山口経済学雑誌, 第45巻, 第6号, pp.1199-1212(平成9年9月).

[3] 橋本　寛："関係行列の初歩的な同値条件と非反射的推移性", 山口経済学雑誌, 第47巻, 第1号, pp.29-47(平成11年3月).

[4] 橋本　寛："非反射的推移関係に関する同値条件", 山口経済学雑誌, 第48巻, 第2号, pp.257-285(平成12年3月).

[5] 橋本　寛："Negatively Transitive 関係に関する性質の一般化", 山口経済学雑誌, 第52巻, 第4号, pp.595-620(平成16年3月).

[6] 橋本　寛："推移性のもとでの Semitransitive 関係と Ferrers 関係", 山口経済学雑誌, 第53巻, 第5号, pp.425-448(平成17年1月).

[7] 橋本　寛："Semitransitive 関係と Ferrers 関係の Negative 推移性", 山口経済学雑誌, 第54巻, 第5号, pp.657-681(平成18年1月).

[8] 橋本　寛："推移性に関する二つの特殊な自己反双対的関係の十分条件", 山口経済学雑誌, 第56巻, 第6号, pp.743-764(平成20年3月).

[9] Kolman, B. and Busby, R. C.："Discrete Mathematical Structures for Computer Science", Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1984).

[10] Lavrov, I. and Maksimova, L.："Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms," Kluwer Academic, New York (2003).

[11] Liu, C. L.："コンピュータサイエンスのための離散数学入門" (成嶋　弘, 秋山　仁共訳), オーム社(平成7年3月), (Elements of Discrete Mathematics, 2nd Edition by C. L. Liu, McGraw-Hill, 1985).

[12] Maddux, R. D.："Relation Algebras," Elsevier, Amsterdam (2006).

[13] 守屋悦朗："離散数学入門", サイエンス社(2006年6月).

[14] 日本数学会："岩波数学辞典 第4版", 岩波書店(2007年3月).

[15] 小野寛晰："情報科学における論理", 日本評論社(1994年4月).

[16] Rosen, K. H. : "Handbook of Discete and Combinatorial Mathematics," CRC Press, Boca Raton (2000).

[17] Schmidt, G. and Ströhlein, T. : "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[18] Schröder, E. : "Algebra der Logik. Vol.3," Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publishing, New York, 1966).

[19] 牛島和夫ほか："離散数学", コロナ社(2006年9月).

[20] Wallis, W. D. : "A Beginner's Guide to Discrete Mathematics," Birkhäuser, Boston (2003).