

# 導体に接近したうず巻コイルのインダクタンス\*

武平 信夫\*\*・長田 哲朗\*\*\*・長島 弘修\*\*\*\*

## Self Inductance of a Spiral Coil near a Conductor

Nobuo TAKEHIRA, Teturo OSADA and Hironobu NAGASHIMA

### Abstract

Regarding a spiral coil as a gathering of many circular loops of wire, we calculated its self inductance and mutual inductance between two spiral coils of the same shape. We put the spiral coil in parallel with a conductor and then measured the inductance satisfying the condition that the conductor is a perfect conductor. Experimental values agreed well with the theoretical results.

### 1. はじめに

衝撃電流をコイルに流し、コイルに接近しておかれた導体中に発生するうず電流とコイル電流との電磁力を利用して、水中及び固体中に超音波を発生させ、物性研究、地質調査等に利用している<sup>1)2)3)4)</sup>。うず電流とコイル電流との電磁力を大きくするために、両者の相互インダクタンスが大きくとれるうず巻コイルが良く用いられる。扁平うず巻コイルのインダクタンスは Spielrein によって求められている<sup>5)</sup>。またうず巻コイルが有限な導電率をもつ導体板に平行におかれた場合のインダクタンスについては尾上が求めている<sup>6)</sup>。コイル寸法にくらべて、うず電流の浸透深さが十分小さく、波長が十分大きい場合は、導体板は完全導体とみなせる。筆者らは扁平うず巻コイルを円形単線輪が同一平面上に、同軸に集合しているものとしてその自己インダクタンスを求め、つぎにうず巻コイルを完全導体とみなした導体板に、平行においた場合のインダクタンスを理論的に求め、実験値と比較した。本方式によればうず巻コイルが密に巻いてある場合のみならず、粗に巻いてある場合にも適用できる点が特長である。

### 2. 理 論

#### 2.1 円形単線輪の自己インダクタンス<sup>7)</sup>

半径  $a$ 、導線の半径を  $\alpha$  とする円形単線輪の自己イ

ンダクタンスは (導線の透磁率を  $\mu_0$  とする)

$$L_1 = \mu_0 a \left( \ln \frac{8a}{\alpha} - \frac{7}{4} \right) \quad (1)$$

ただし  $\mu_0$  は真空の透磁率である。

#### 2.2 平行で同軸な2つの円形単線輪の相互インダクタンス<sup>8)</sup>

第一のコイルの半径  $a$ 、第二のコイルの半径  $b$ 、両者の距離を  $2d$  とすると、両者の相互インダクタンス  $M$  は

$$M = \frac{2\mu_0}{k} \sqrt{ab} \left\{ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\} \quad (2)$$

ただし

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + 4d^2} \quad (3)$$

$K(k)$ 、 $E(k)$  は  $k$  を母数とする、第一種および第二種の完全楕円積分である。

$a=b$ 、 $d=0$  のときの  $M$  は(2)式より

$$M = \mu_0 a \left( \ln \frac{4a}{d} - 2 \right) \quad (4)$$

$a=b$ 、 $d=0$  のときは同じく(2)式より

$$M = \mu_0 a \left( \ln \frac{4(a+b)}{a-b} - 2 \right) \quad (5)$$

#### 2.3 うず巻コイルの自己インダクタンス

Fig. 1 において最も内側のコイルの半径を  $a$  とし、内側よりコイルに番号をつけ  $1, 2, 3, \dots, N$  とする。この場合磁界が互助的であるからうず巻コイルの自己インダクタンス  $L_0$  は

$$L_0 = L_{11} + L_{12} + L_{13} + \dots + L_{1N} \\ + L_{21} + L_{22} + L_{23} + \dots + L_{2N}$$

\* 3月28日電気四学会連合大会(仙台)において発表

\*\* 電気工学教室

\*\*\* 日立電子エンジニアリング

\*\*\*\* 大学院工学研究科電気工学専攻

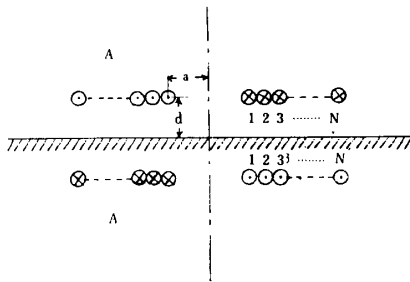


Fig.1 Arrangement of the spiral coil

$$\begin{aligned}
 &+L_{31}+L_{32}+L_{33}+\dots\dots\dots+L_{3N} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+L_{N1}+L_{N2}+L_{N3}+\dots\dots\dots+L_{NN} \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N L_{jk} \tag{6}
 \end{aligned}$$

$L_{jk}$  において  $j=k$  なるときは  $j$  番目のコイルの自己インダクタンスを示し,  $j \neq k$  なるときは  $j$  番目のコイルと  $k$  番目のコイルの相互インダクタンスを示す. また  $L_{jk}=L_{kj}$  である.

2.4 2つのうず巻コイルの相互インダクタンス

Fig. 1 の如く平行におかれた同一形状の2つのうず巻コイル A, A' の相互インダクタンスは, 各コイル間の相互インダクタンスの和として与えられつぎのようになる.

$$\begin{aligned}
 M = &M_{11}+M_{12}+M_{13}+\dots\dots\dots+M_{1N} \\
 &+M_{21}+M_{22}+M_{23}+\dots\dots\dots+M_{2N} \\
 &+M_{31}+M_{32}+M_{33}+\dots\dots\dots+M_{3N} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+M_{N1}+M_{N2}+M_{N3}+\dots\dots\dots+M_{NN} \\
 = &\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N M_{jk} \tag{7}
 \end{aligned}$$

$M_{jk}$  において  $j$  は A のコイルの番号を示し,  $k$  は A' のコイルの番号を示す.  $M_{jk}=M_{kj}$  である.

2.5 導体に接近したうず巻コイルのインダクタンス

導体を完全導体と仮定したので導体面上の磁界の法線成分は零となる. これを境界条件とすれば A, A' に流れる電流は等しくなり, A の自己インダクタンス  $L$  は影像法を用いることができ(6)(7)より

$$L = L_0 - M = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (L_{jk} - M_{jk}) \tag{8}$$

2.6 計算例

最も内側のコイルの半径  $a$ , 導線の半径  $\alpha$ , 巻数  $N$  なる密に巻いた扁平うず巻コイルの自己インダクタンスを求める. この場合相隣る2つの単線輪において  $d = 0$  であるから,  $k^2$  を計算してみて, 0.99 以上であ

れば, 近似式(5)式の(2)式に対する相対誤差は1%以内にとまる. 0.99以下では(2)式を使用する. デジタル電子計算機を使用する場合には  $k^2$  のあらゆる値に対して(2)式を使用してよいが卓上型電子計算機の場合には近似式を用いた方が便利である.  $a=60.5\text{mm}$ ,  $\alpha=0.53\text{mm}$ ,  $N=5$  とした場合, 自己インダクタンス  $L_0=7.65 \mu\text{H}$  である. 相互インダクタンスを求める場合も同様で  $k^2$  を計算して0.99%以上であれば, 近似式(4)式の(2)式に対する相対誤差は1%以内におさまるからこれを使用するのがよい. 上に示した2つのうず巻コイルの距離を1.53mm とすると, 相互インダクタンス  $M=5.77 \mu\text{H}$  となる. よって  $L_0$  と  $M$  の差を取ることによってうず巻コイルが導体板に接近した場合のインダクタンスが求まる.

3. 実験

以上の理論を実証すべくつぎのような実験を行なった. 計算例に示したコイルを作製し,  $800 \times 360 \times 0.5 \text{ mm}$  銅板の上に平行におき, 距離  $d$  を種々の値に変化させて, インダクタンスを Qメータで測定した. 距離設定用のスペーサーとしてベークライト板を用いた. Qメータとうず巻コイルはテレビ用フィーダー線で接続した. ここではインダクタンスを前報<sup>9)</sup>と同様に

- (1) 平面導体が完全導体である.
- (2) その広さが無限大である
- (3) 考えている範囲に対して波長が十分長く静電的である.

と仮定して求めた. 測定周波数が1000~2000kHzであったので, うず電流浸透深さは0.046~0.065mmで磁界は導体中にほとんど侵入できない. 波長は150~300mで, コイル寸法にくらべて十分長い. 理論値と実験値を比較したものをFig. 2に示す. Qメータの精度を考慮すれば両者は良く一致しているといえる.

4. むすび

うず巻コイルが完全導体と平行におかれた場合のインダクタンスを, うず巻コイルを円形単線輪の集合とみなして計算してもさしつかえないことが実証されたが, 今後は, 導体板の面積, 及び厚さとコイル寸法との関係を明らかにする必要がある. つぎに計算法について言及する. うず巻コイルを円形単線輪の集合とみなしてインダクタンスを求める方法は, 従来使用されている計算法と比較して一見はなほ面倒なように思われるが, デジタル電子計算機を使用すれば, 巻数, 導線径等が変化しても同一手順で容易に求められる.

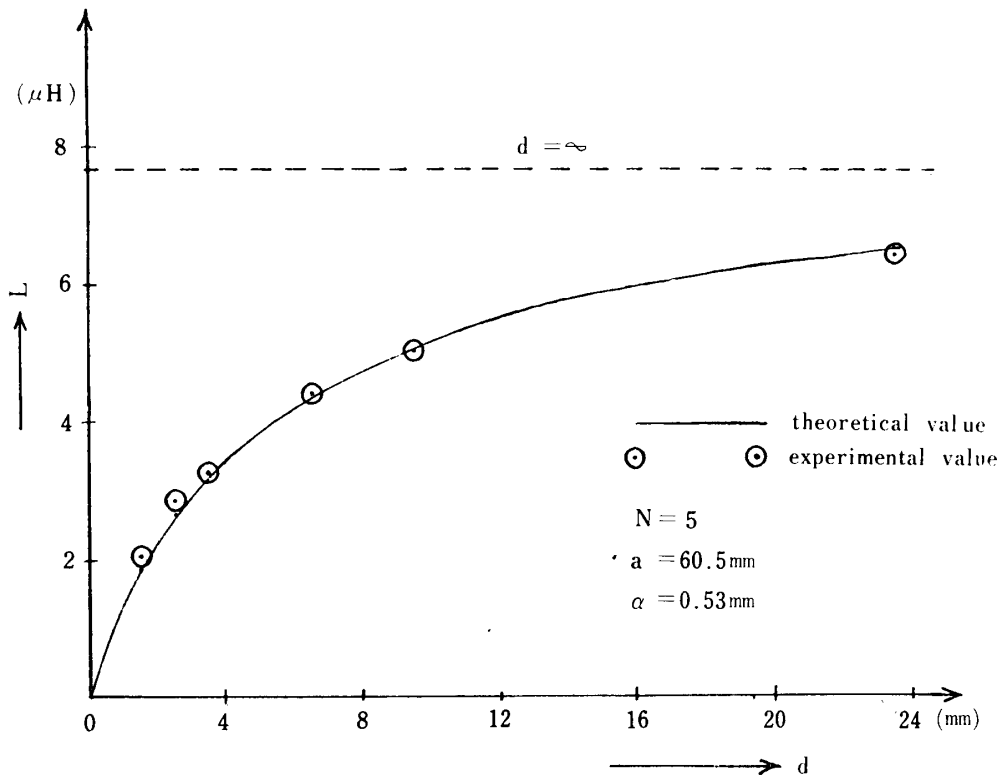


Fig. 2 Self inductance of the spiral coil

ここでは本学電子計算機室 FACOM-231を使用した  
ので巻数の多い場合の計算はしなかったが、大型電子  
計算機を使用すれば、時間的には相当短縮できるはず  
である。

終りに日頃ご指導を賜わる戸田圭一講師に深く感謝  
の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) W. Eisenmenger: Acustica, 19, 185 (1962)
- 2) 奥島基良他: 信学会超音波研究会資料, 1966年9月.
- 3) 奥島基良他: 音学会論文集, 165 (1967)
- 4) 奥島基良他: 音学会論文集, 179 (1968)
- 5) J. Spielrein: Arch. Elektrotech, 3, 187 (1915).
- 6) 尾上守夫: 電学誌, 88, 1894 (1968)
- 7) 竹山説三: 電磁気学現象理論, 丸善 (1968) P.384.
- 8) 同上: P.383
- 9) 武平信夫: 山口大学工学部研究報告, 20, 1, (1969)
- 10) 舟橋憲治: 演習電気磁気学, 電機大出版局 (1967) P.356

(昭和44年1月29日受理)

付 録 1

(4), (5)式はつぎのようにして(2)式から導びく<sup>10)</sup>.  $a \Rightarrow b$  で  $\alpha \Rightarrow 0$  または  $d = 0$  の時は  $k \Rightarrow 1$  となる. このとき第一種完全楕円積分  $K(k)$ は

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\cos\phi} \quad (9)$$

となり定積分は不可能となる.

$$\text{このとき } k'^2 = 1 - k^2 \quad (10)$$

なる補助母数  $k'$  をとり

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi + k'^2\sin^2\phi}} + \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi + k'^2\sin^2\phi}} \quad (11)$$

の如く積分区間を2つに分ける.

$$\text{ここで } 0 < k'^2 \leq \epsilon \ll 1 \quad (12)$$

とする. 変数の変換を行うことによって第一項は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi + k'^2\sin^2\phi}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{d\phi}{\cos\phi} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos\epsilon}{1-\cos\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

$$= \ln \frac{2}{\varepsilon} \tag{13}$$

第2項は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi + k'^2 \sin^2\phi}} &= \int_0^{\varepsilon} \frac{d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta + k'^2 \cos^2\zeta}} \\ &= \int_0^{\varepsilon} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + k'^2}} \\ &= \left[ \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k'^2}) \right]_0^{\varepsilon} \\ &= \ln \frac{2\varepsilon}{k'} \end{aligned} \tag{14}$$

(13), (14)より  $K(k)$  は

$$\begin{aligned} K(k) &= \ln \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{2\varepsilon}{k'} = \ln \frac{4}{k'} \\ &= \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \\ &= \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2 + 4d^2}}} \end{aligned} \tag{15}$$

第2種完全楕円積分は

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2\phi} \, d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \, d\phi = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

よって  $a=b, d=0$  のときは

$$\begin{aligned} M &= 2\mu_0 a \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{4a^2 + 4d^2}}} - 1 \right\} \\ &= \mu_0 a \left\{ \ln \frac{4\sqrt{a^2 + d^2}}{d} - 2 \right\} \\ &= \mu_0 a \left\{ \ln \frac{4a}{d} - 2 \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

$a=b, d=0$  のときは

$$\begin{aligned} M &= 2\mu_0 a \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} - 1} \right\} \\ &= \mu_0 a \left\{ \ln \frac{4(a+b)}{a-b} - 2 \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

付 録 2

うず巻コイルの自己インダクタンスを求める方法として従来の計算法を紹介するとつぎのようになる。

うず巻コイルの内径を  $a_1$ , 外径を  $a_2$  とすれば

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{4}{3} \frac{\mu_0 a_2 N^2}{(1-\alpha)^2} \left[ \int_{\alpha}^1 \{K(k) - E(k)\} dk \right. \\ &\quad \left. - \alpha^3 \int_{\alpha}^1 \frac{K(k) - E(k)}{k^3} dk \right] \end{aligned} \tag{17}$$

ただし

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} \tag{18}$$

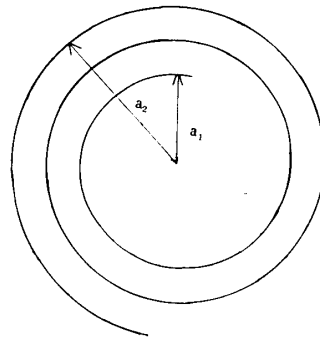


Fig.3 Dimensions of the spiral coil