

導体に接近した円形単線輪のインダクタンス

武 平 信 夫*

Self Inductance of a Circular Loop of Wire near a Conductor

Nobuo TAKEHIRA

Abstract

Many investigators have been working on the self inductance of a coil near a conductor. The author calculated magnetic field and self inductance of a circular loop near a conductor and tried to obtain data applying the results to a spiral coil and a solenoid coil etc. In this paper it was analyzed assuming that the conductor was a perfect conductor. Satisfying the condition as much as possible, self inductance was measured. The experimental values are considerably in accord with the theoretical values.

1. 緒 言

導体に接近したコイルのインダクタンスを理論的に求める方法について各種研究されている。有限長ソレノイドコイルについて内部に導体を含む場合について北村によって詳細に検討されている¹⁾。北村は導体を完全導体として解析をすすめている。また、山田等はコイルが導体内に含まれる場合について研究している²⁾。山田等も導体を完全導体とみなして解析している。尾上等はソレノイドコイルが平面導体に接した場合のインダクタンスについて、導体の導電率が有限な場合について解析をすすめている³⁾。筆者はうす巻コイル、ソレノイドコイル、矩形断面円形コイル等を無限平面導体に接近しておいた場合のインダクタンスを求める基礎的資料をうるため以下の解析をすすめた。ここでは円形単線輪が平面導体に平行な場合の磁界、インダクタンスを理論的に求めた。導体は北村、山田等と同様、導電率無限大とした。有限な場合については後に研究するつもりである。本研究は強力超音波発生、電気加工、非破壊検査等に資するものと思われる。

2. 円形単線輪のベクトルポテンシャルおよび磁界

Fig. 1 のように円筒座標 (r, ϕ, z) をとると円形単線輪のベクトルポテンシャル A_ϕ は⁴⁾

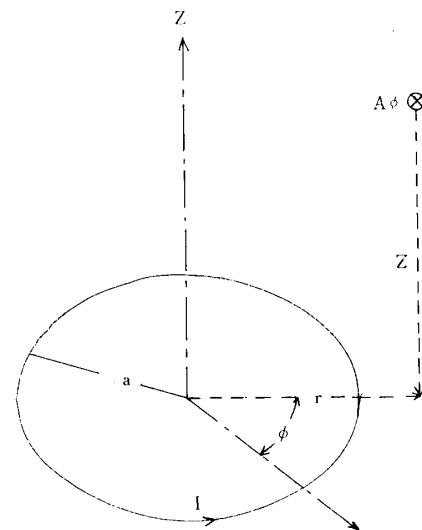


Fig. 1 A circular loop of wire

$$A_\phi = \frac{a \mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2a r \cos \alpha)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2\right) K(k) - E(k) \right] \quad (1)$$

ここで

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad (2)$$

$K(k)$ および $E(k)$ は第1種および第2種の完全楕円積分である。

磁界 \mathbf{H} はベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて

* 電気工学教室

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{A} \quad (3)$$

ここで成分 H_r , H_ϕ , H_z を求めてみる.

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{k} K(k) - \frac{k}{2} K(k) - \frac{E(k)}{k} \right\} \\ &= -\frac{I}{\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ (K(k) - E(k)) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2}\right) \frac{\partial K(k)}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{K(k)}{2} \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{1}{k} \frac{\partial E(k)}{\partial z} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{公式} \quad \frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad (5)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{I}{\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ (K(k) - E(k)) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k}\right) \right. \\ &\quad \left. + E(k) \frac{1}{2(1-k^2)} \frac{\partial k}{\partial z} \right\} \\ &= -\frac{I}{\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z}{\{(a+r)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{K(k) - E(k)}{2(ar)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(ar)^{\frac{1}{2}} E(k)}{(a-r)^2 + z^2} \right\} \\ &= \frac{I}{2\pi} \frac{z}{r\{(a+r)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ -K(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} \\ &= \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\{(a+r)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ K(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$H_\phi = 0 \quad (8)$$

3. 無限平面完全導体に平行な円形単線輪による磁界およびインダクタンス

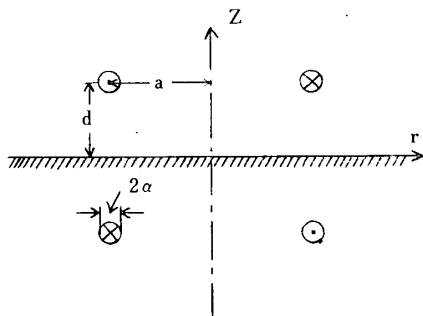


Fig.2 Arrangement of a circular loop

導電率無限大なる導体面上の磁界の法線成分は零となる. これを境界条件としてこの問題を解く. Fig. 2のようにコイル A の影像 A' を考え両者の中心軸との交点を原点とする円筒座標を考える. 導体面上任意の点における A と A' に流れる電流 I , I' による境界 H_z , H'_z を考えると(7)式を用いて

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\{(a+r)^2 + (z+d)^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ K(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 - r^2 - (z+d)^2}{(a-r)^2 + (z+d)^2} E(k) \right\} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\{(a+r)^2 + d^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ K(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 - r^2 - d^2}{(a-r)^2 + d^2} E(k) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_z &= \frac{I'}{2\pi} \frac{1}{\{(a+r)^2 + (z-d)^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ K(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 - r^2 - (z-d)^2}{(a-r)^2 + (z-d)^2} E(k) \right\} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{I'}{2\pi} \frac{1}{\{(a+r)^2 + d^2\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ K(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 - r^2 - d^2}{(a-r)^2 + d^2} E(k) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

$$H_z + H'_z = 0 \quad (11)$$

$$\text{であるから} \quad I = -I' \quad (12)$$

導体が存在しない場合, 円形単線輪の自己インダクタンスは, 線輪導体半径を α とすると (導線の透磁率 μ_0)

$$L_0 = \mu_0 a \left[\ln \frac{8a}{\alpha} - \frac{7}{4} \right] \quad (13)$$

で与えられるが⁵⁾, 平行な完全導体が存在する場合の A の自己インダクタンスは A と A' の相互インダクタンスを M とすると

$$L = L_0 - M \quad (14)$$

A と A' の相互インダクタンス M は⁶⁾

$$M = \frac{2\mu_0 a}{k_1} \left\{ \left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K(k_1) - E(k_1) \right\} \quad (15)$$

ただし

$$k_1^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + 4d^2} = \frac{a^2}{a^2 + d^2} \quad (16)$$

(13), (15) を用いれば

$$L = \mu_0 a \left[\ln \frac{8a}{\alpha} - \frac{7}{4} - \frac{2}{k_1} \left\{ \left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K(k_1) - E(k_1) \right\} \right] \quad (17)$$

(17) 式が円形単線輪が完全導体に平行に接近した場合の自己インダクタンスを与える式である. この場合の磁界の z 成分については(9)式と(10)式の和をとればよい. r 成分も同様に求めうる.

4. 実験および実験結果

以上の理論を実証すべく、つぎのような実験を行なった。インダクタンス測定には横河ヒューレット・パッカード製Qメータを用いた。円形単線輪として半径1.6mmのフォルマール銅線を、半径91.5mmの円形ループとなした。平面導体板として510×400×2mmのアルミニウム板を使用し、距離設定用のスペーサーとしてアクリル板、ベークライト板を使用した。

ここでは導体表面の磁界を北村と同様に⁷⁾

- (1) 平面導体が完全導体である。
- (2) その広さが無限大である。
- (3) 考えている範囲に対して波長が十分長く静電的である。

と仮定して求めたのであるが、これらの条件をできるだけ満足させるような状態で測定を行った。測定周波数を1000KHzとしたが、この場合のアルミニウムのうず電流浸透深さは約0.1mmで、磁界はほとんど侵入できず(1)の条件は満たされていると考えられる。導体の面積は、円形単線輪の約7倍程度で、一応無限大とみなせる。これで(2)の条件を満たす。また測定周波数における波長は約300mで考えている範囲に対して波長が十分長く、静電的であると考えられ(3)の条件を満足する。

測定方法はつぎの通りである。

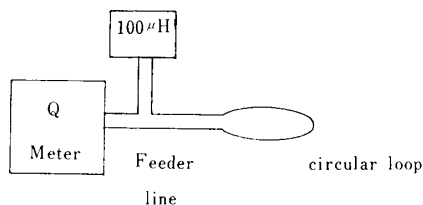


Fig.3 Measuring circuit

- (1) Qメータのインダクタンス測定端子に100μHの標準コイルとテレビ用フィーダー線(53cm)を直列に接続し、測定周波数を1000KHzとし、共振時の容量(C)を求めた。
- (2) 測定周波数は一定とし、標準コイルとフィーダー線にさらに供試円形単線輪を直列に接続して微小容量ダイヤルにて容量変化(ΔC)を求めた。
- (3) C, ΔC, fがわかったので以下に示す測定原理によりインダクタンス変化分(ΔL)を算出した。

標準コイルとフィーダー線のみを接続した場合、共振時における角周波数ωは

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{18}$$

となる。ここで

$$L = \text{標準コイルのインダクタンス} + \text{フィーダー線のインダクタンス}$$

つぎに、同一角周波数のもとで、さらに円形単線輪を接続した場合の共振時においては

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(L+\Delta L)(C-\Delta C)}} \tag{19}$$

(18), (19)より

$$LC = LC - L\Delta C + C\Delta L - \Delta L\Delta C \tag{20}$$

よれより

$$\Delta L = \frac{L\Delta C}{C - \Delta C} \tag{21}$$

C≫ΔCとして

$$\Delta L \approx \frac{L\Delta C}{C} \tag{22}$$

再び(18)式を用いて

$$\Delta L = \frac{\Delta C}{\omega^2 C^2} \tag{23}$$

(23)式を用いるとC, ΔC, fを測定することによりΔLが求められる。

ΔC=10⁻²Cとすると

$$\frac{L\Delta C}{C} \times \frac{C - \Delta C}{L\Delta C} \times 100 = 99(\%)$$

となりΔCの値がCの100分の1以下であれば測定誤差は1%以下であり、Qメータの精度が問題となってくる。本実験ではC=約245pF, ΔCは最大1.06pFであったのでC≫ΔCなる条件を十分満足している。

Table 1に供試円形単線輪の寸法を示す。Fig. 4は計算値、実測値を示したものである。距離2dが導線直径2αに近づいてくると近接効果が表われてきて、電流が導線の中心を流れるとみなしてよいかどうか問題となってくるが、実験結果からこの程度の太さでは問題とならないようである。

Table 1 Testing coil

a	91.5mm
α	1.6 mm
N	1

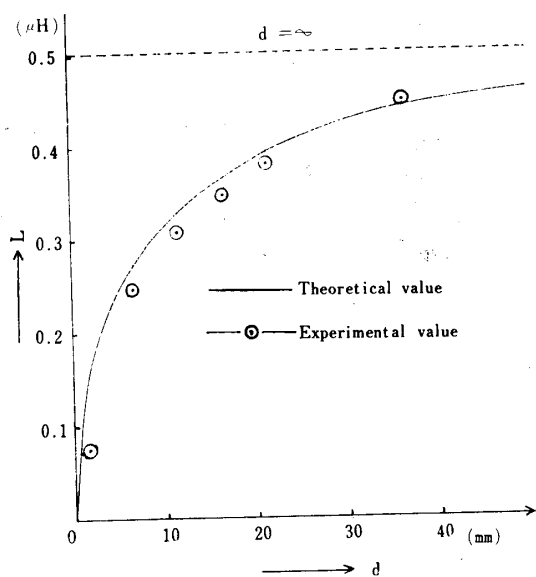


Fig. 4 Self inductance of a circular loop near a conductor

5. 結 言

今後検討すべき問題点としては

- (1) うず電流の浸透深さがどの程度までなら完全導体とみなせるか
- (2) 導体板およびコイルの寸法と波長との関係
- (3) 導電率が有限な場合

の3点がある。今回は磁界分布については測定できなかったが機会をみて行いたい。

終りに日頃ご指導を賜わる戸田圭一講師，および本実験に協力された昭和43年度卒論生長田哲朗，長高弘修の諸君に深く感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) 北村覚一：電試研究報告，No. 563 (1957)
- 2) 山田直平他：信学誌，32, 77 (1949).
- 3) 尾上守夫：信学会全国大会，352 (1967).
- 4) J. A. Stratton: "Electromagnetic Theory", (1941) P. 263.
- 5) 文献4) P. 264.
- 6) 文献4) P. 263.
- 7) 文献1) P. 15.

(昭和44年1月6日受理)

付 録

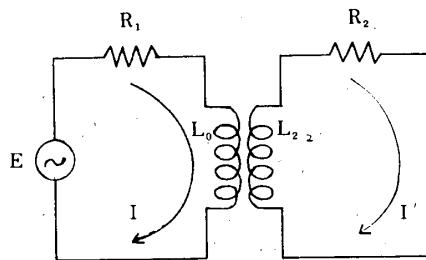


Fig. 5 Equivalent circuit of a circular loop near a conductor

(14)式は Fig. 5 の如く等価回路で考えても得られる。

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_0)I + j\omega MI' = E \\ (R_2 + j\omega L_2)I' + j\omega MI = 0 \end{cases} \quad (24)$$

ここで

$$\begin{cases} R_1 + j\omega L_0 = Z_{11} \\ R_2 + j\omega L_2 = Z_{22} \\ j\omega M = Z_M \end{cases} \quad (25)$$

とおくと

$$I = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_M^2} E \quad (26)$$

よって一次側からみた合成インピーダンスZは

$$\begin{aligned} Z &= Z_{11} - \frac{Z_M^2}{Z_{22}} = R_1 + j\omega L_0 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \\ &= \left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2 \right) + j\omega \left(L_0 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\therefore L = L_0 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \quad (28)$$

$I = -I'$ なる条件を(24)式に入れると

$$\begin{aligned} R_2 + j\omega L_2 &= j\omega M \\ \therefore R_2 &= 0 \quad L_2 = M \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{よって } L = L_0 - M \quad (14)$$