$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすブール行列 II

Boolean Matrices Which Satisfy $R^3 = \bar{R}^t \vee I$, II

柏木　芳美
Yoshimi Kashiwagi

Abstract

In the previous paper we have studied a Boolean matrix R of order 2,3 and 4 with the property $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ and have shown that there exists a permutation σ with $R^\sigma = Z$, where

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

We will show in this paper that if a Boolean matrix R with this property is of order 5, then there exists a permutation σ with $R^\sigma = Z$ or $R^\sigma = Y$, where

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1　はじめに

柏木 [1] において,「ブール行列 R が関係式 $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすならば，$R^\sigma = Z$ となる置換 σ が存在する」という予想をたて，ブール行列の次数が 2，3 または 4 ならばこの予想が正しいことを示した．この論文では，次数が 5 のとき Z の他に abstract に定義した 5 次ブール行列 Y も $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たし，逆に置換によるブール行列の変形を無視すればこの条件を満たす 5 次ブール行列はこれら 2 通りしかないことを示す．この結果は，ブール行列の行の 1 の個数によって分類して虱潰しに計算することにより得られた．

尚，元の橋本の予想 ([3] 参考) は「ブール行列 R が関係式 $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすならば $I \leqq R$ か」というものであるが，この予想は次数が 5 の場合にも正しい．

2　記号

この論文では，成分が 0 または 1 である正方ブール行列を扱う．単位行列を I，成分がすべて 1 のブール行列を E と書く．$R = (r_{ij})$，$S = (s_{ij})$ を n 次ブール行列としたとき

$$R \vee S = (r_{ij} \vee s_{ij})$$

$$R \wedge S = (r_{ij} \wedge s_{ij})$$

$$R^t : R \text{ の転置行列 (橋本の論文では } R' \text{ と書かれている)}$$

$$\bar{R} = (\overline{r_{ij}})$$

$$RS = R \times S = (\vee_{k=1}^{n}(r_{ik} \wedge s_{kj}))$$

$$R^{k+1} = R^k R$$

と定める．

$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とし $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ としたとき

$$R^\sigma = (r_{i^\sigma j^\sigma})$$

と定める．

$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ を行ベクトルとしたとき

$$w(\mathbf{r}) : r_i \neq 0 \text{ を満たす } i \text{ の個数}$$

をベクトル $\mathbf{r}$ の重さという．$\mathbf{r}$ が列ベクトルの場合にも同じ記号を用いる．

以下この論文では，$\mathbf{r}_i$ と $\mathbf{c}_i$ を各々 R の第 i 行と第 i 列とし，$\mathbf{s}_i$ を R^3 の第 i 行とする．

3　証明で用いる性質

ここでは 5 次の場合の証明に用いる性質を与える．

次は容易に証明できるか既に知られている結果である．

命題 1. $R = (r_{ij})$ をブール行列とする．このとき次が成り立つ．

(1) R のある行またはある列の成分がすべて 0 ならば $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$.

(2) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする．R が $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすための必要十分条件は，R^σ がこの条件を満たすことである．

(3) R が $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすための必要十分条件は，転置行列 R^t がこの条件を満たすことである．

(4) ([2, 性質 20]) $R^3 \leqq \bar{R}^t \vee I$ とする．$i \neq j$，$r_{ij} = 1$ ならば $r_{ji} = 0$.

補題を準備する．

補題 2. $R = (r_{ij})$ を $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす n 次ブール行列とし，i と j を 1 から n までの番号とする．このとき次が成り立つ．

(1) $i \neq j$ ならば $r_{ij} \wedge r_{ji} = 0$.

(2) $\displaystyle\bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{ki}) = r_{ii}$.

証明. (1) $r_{ij} = 0$ なら明らか．$r_{ij} = 1$ なら命題 1(4) より $r_{ji} = 0$. よってこのときも $r_{ij} \wedge r_{ji} = 0$.

(2) (1) より $\displaystyle\bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{ki}) = r_{ii} \wedge r_{ii} = r_{ii}$. □

次の命題も用いる．

命題 3. $R = (r_{ij})$ を $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす n 次ブール行列，$R^3 = (s_{ij})$，i と j を 1 から n までの $i \neq j$ となる番号とする．このとき次が成り立つ．

(1) $r_{ij} = 1$ であるための必要十分条件は $s_{ji} = 0$ で，$r_{ij} = 0$ であるための必要十分条件は $s_{ji} = 1$.

(2) R の第 i 行の重さが 1 とする．

(i) $r_{ij} = 1$ ならば $r_{jj} = 1$ である．

(ii) $r_{ii} = 1$ ならば R の第 i 列の成分はすべて 1 である．

証明. (1) $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ より明らか．

(2) (i) $r_{jj} = 0$ と仮定して矛盾を起こす．R^2 の (p, q) 成分を u_{pq} とおく．補題 2(2) より

$$u_{jj} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{jk} \wedge r_{kj}) = r_{jj} = 0.$$

$r_{ij} = 1$ で R の第 i 行の重さが 1 なので，$k \neq j$ ならば $r_{ik} = 0$. よって $R^3 = RR^2$ の (i, j) 成分は

$$s_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge u_{kj}) = r_{ij} \wedge u_{jj} = 0.$$

よって，(1) より $r_{ji} = 1$. $r_{ij} = 1$ なのでこれは命題 1(4) に反する．

(ii) S と T を，第 i 行の重さが 1 で (i,i) 成分が 1 である n 次ブール行列とする．このとき ST も同様の性質を持つことが容易に分かる．よって，$k \neq i$ のとき R^3 の (i,k) 成分は $s_{ik} = 0$ となる．従って，(1) より $r_{ki} = 1$ となる．　□

以下で使うわけではないが，次の結果が得られる．

系 4. R をブール行列とする．このとき次が成り立つ．

(1) R の 2 つの行あるいは 2 つの列の成分がすべて 1 ならば $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$ である．

(2) R^3 の 2 つの行あるいは 2 つの列の成分がすべて 1 ならば $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$ である．

証明. $R = (r_{ij})$ とする．

(1) $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ と仮定する．R の第 i 行と第 j 行のすべての成分が 1 とする $(i \neq j)$．よって，$r_{ij} = r_{ji} = 1$ となるが，これは命題 1(4) に反する．列の場合も同様．

(2) 列の場合を示す．行の場合は転置行列を考えればよい．$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ と仮定する．R^3 の第 i 列のすべての成分が 1 とする．命題 3(1) より R の第 i 行の重さは 1 で $r_{ii} = 1$ である．従って，命題 3(2)(ii) より R の第 i 列の成分はすべて 1 である．同様に R はもう 1 つすべての成分が 1 である列を持つ．これは (1) に反する．　□

4　5 次の場合

ここでは次の結果を R の行の重さで場合分けした虱つぶしの計算により示す．

定理 5. R を $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす 5 次ブール行列とする．このとき，$R^\sigma = Z_5$ または $R^\sigma = Y$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ が存在する．ただし，Z_5 は 5 次の Z である．

以下，$R = (r_{ij})$ を $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす 5 次ブール行列とし，$\mathbf{r}_i$ を R の第 i 行とする．まず，命題 1(1) により

(仮定 1) R のすべての行及びすべての列の重さは 1 以上

としてよい．

また，$R^3 = (s_{ij})$ とおく．

4.1　$w(\mathbf{r}_1) = 1$

$\mathbf{r}_1 = (1,0,0,0,0)$ と $\mathbf{r}_1 = (0,1,0,0,0)$ の場合を調べれば十分である．例えば，$\mathbf{r}_1 = (0,0,1,0,0)$ のときは $\sigma = (23)$ とすると R^σ の第 1 行が $(0,1,0,0,0)$ となる．

4.1.1　$\mathbf{r}_1 = (1,0,0,0,0)$

命題 3(2)(ii) より R の第 1 列の成分はすべて 1 なので

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 1 & & S & & \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

となる 4 次ブール行列 S が存在する．$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ より $S^3 = \bar{S}^t \vee I$ となる．よって，$S^\sigma = Z_4$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ が存在する．従って，$R^\tau = Z_5$ となる $\tau \in \mathfrak{S}_5$ が存在する．

$\mathbf{r}_1 = (1,0,0,0,0)$ の場合が示されたので，適当に置換することにより

$$\mathbf{r}_2 = (0,1,0,0,0),\ \mathbf{r}_3 = (0,0,1,0,0),\ \mathbf{r}_4 = (0,0,0,1,0),\ \mathbf{r}_5 = (0,0,0,0,1)$$

の場合も示されることが分かる．よって，仮定 1 の下で，R のある列の成分がすべて 1 ならば R^3 のその列の成分がすべて 1 なので，命題 3(1) より，今示した場合に帰着する．従って，命題 1(3) により

(仮定 2) R または R^3 のすべての行及びすべての列の重さは 4 以下

としてよい．

4.1.2　$\mathbf{r}_1 = (0,1,0,0,0)$

命題 1(4) より $r_{21} = 0$ である．よって，命題 3(2)(i) より

$\mathbf{r}_2 = (0,1,*,*,*)$　　($*$ は 0 または 1)

となる．以下，$w(\mathbf{r}_2)$ で場合分けする．

4.1.2.1　$w(\mathbf{r}_2) = 1$

このとき $\mathbf{r}_2 = (0,1,0,0,0)$ である．よって，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & * & & \end{pmatrix}$$　　($*$ は勝手な 0 または 1 の 3 行)

となる．R^3 を計算すると $s_{11} = 0$ となり $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$ である．

4.1.2.2　$w(\mathbf{r}_2) = 2$

$\mathbf{r}_2 = (0,1,1,0,0)$ としてよい．例えば $(0,1,0,1,0)$ は $\sigma = (34)$ とすると $(0,1,1,0,0)$ に帰着する．その際，$\mathbf{r}_1 = (0,1,0,0,0)$ を変えないことに注意する．$r_{23} = 1$ なので命題 1(4) より $r_{32} = 0$ である．よって，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & * & * & * \\ & & * & & \end{pmatrix} \qquad (a \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

となる．R^3 を計算すると $1 = s_{11} = a$ となる．$a = 1$ として R^3 を計算すると $s_{21} = 1$ となる．命題 3(1) より $r_{12} = 0$ となるので矛盾.

4.1.2.3　$w(\mathbf{r}_2) = 3$

$\mathbf{r}_2 = (0,1,1,1,0)$ としてよい．命題 1(4) より

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる．よって，R^3 を計算すると

$$\mathbf{s}_1 = (*,1,1,1,*)$$

となる．ただし，$\mathbf{s}_1$ は R^3 の第 1 行．よって命題 3(1) と仮定 1 より

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる ($s_{51} = 1$ のところで仮定 1 を用いた)．R^3 を計算すると $s_{11} = 0$ となり矛盾.

4.1.2.4　$w(\mathbf{r}_2)=4$

$\mathbf{r}_2=(0,1,1,1,1)$．命題 1(4) より

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&1&1&1\\*&0&*&*&*\\*&0&*&*&*\\*&0&*&*&*\end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$\mathbf{s}_1=(*,1,1,1,1)$$

となる．よって命題 3(1) より R の第 1 列 $\mathbf{c}_1$ の成分がすべて 0 となるので済んでいる．

以上で $w(\mathbf{r}_1)=1$ の場合が済んだ．よって，置換や転置を考えることにより $w(\mathbf{r}_i)=1$, $w(\mathbf{c}_i)=1$ $(i=1,\cdots,5)$ の場合も済んだ．従って，以下，

(仮定 3) R のすべての行及びすべての列の重さは 2 以上

としてよい．

4.2　$w(\mathbf{r}_1)=2$

$\mathbf{r}_1=(1,1,0,0,0)$ と $\mathbf{r}_1=(0,1,1,0,0)$ の場合を調べればよい．仮定 3 より，$w(\mathbf{r}_2)\geqq 2$ としてよい．

4.2.1　$\mathbf{r}_1=(1,1,0,0,0)$

$r_{12}=1$ より $r_{21}=0$ である．

4.2.1.1　$w(\mathbf{r}_2)=2$

$\mathbf{r}_2=(0,1,1,0,0)$ と $\mathbf{r}_2=(0,0,1,1,0)$ の場合を調べればよい．

4.2.1.1.1　$\mathbf{r}_2=(0,1,1,0,0)$

このとき

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\*&0&*&*&*\\&&*&&\end{pmatrix}$$

となる．よって，$s_{13}=1$ となる．よって，

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&a&b&c\\&&*&&\end{pmatrix}$$

とおける．ただし，a，b，c は 1 または 0．仮定 3 より $w(0,0,a,b,c)\geqq 2$ なので，$(a,b,c)=(1,1,0)$，$(a,b,c)=(0,1,1)$，$(a,b,c)=(1,1,1)$ の 3 通りの場合を検討すればよい（$(a,b,c)=(1,0,1)$ の場合は置換 (45) により $(a,b,c)=(1,1,0)$ に帰着する）．

(1) $(a,b,c)=(1,1,0)$

このときは命題 1(4) と $w(\mathbf{c}_i)\geqq 2$ より

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\*&*&0&1&1\\*&*&*&0&1\end{pmatrix}$$

となるので

$$R^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\*&1&1&1&1\\*&*&1&1&1\\*&*&*&1&1\\*&*&*&*&1\end{pmatrix}$$

となる．よって，命題 3(1) と $w(\mathbf{c}_1)\geqq 2$ より

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}=Y$$

となる．このときは実際に $R^3=\bar{R}^t\vee I$ を満たしている．

(2) $(a,b,c)=(0,1,1)$

このときは

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

となり $w(\mathbf{c}_3) = 1$ なので済んでいる.

(3) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$

このときは

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

となる. R^3 を計算すると $w(\mathbf{s}_1) = 5$ となり仮定 2 に反する.

4.2.1.1.2 $\mathbf{r}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$

このとき, $w(\mathbf{c}_2) \geqq 2$ なので

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる. $\mathbf{s}_1 = (1, 1, 1, 1, *)$ となるので $w(\mathbf{c}_1) \geqq 2$ より

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる. よって $\mathbf{s}_5 = (1, 1, 1, 1, *)$ となり, $w(\mathbf{c}_5) \leqq 1$ となるので済んでいる.

4.2.1.2 $w(\mathbf{r}_2) = 3$

$\mathbf{r}_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$ と $\mathbf{r}_2 = (0, 0, 1, 1, 1)$ の場合を調べればよい.

4.2.1.2.1　$\mathbf{r}_2 = (0,1,1,1,0)$

このときは

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる．$\mathbf{s}_1 = (1,1,1,1,*)$ となるので $w(\mathbf{c}_1) \geqq 2$ より

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる．よって $\mathbf{s}_5 = (1,1,1,1,*)$ となり，$w(\mathbf{c}_5) \leqq 1$ となるので済んでいる．

4.2.1.2.2　$\mathbf{r}_2 = (0,0,1,1,1)$

このときは

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

となり，$w(\mathbf{c}_2) \leqq 1$ となるので済んでいる．

4.2.1.3　$w(\mathbf{r}_2) = 4$

このときは

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる．$\mathbf{s}_1 = (1,1,1,1,1)$ となるので仮定 2 より済んでいる．

4.2.2 $\mathbf{r}_1 = (0,1,1,0,0)$

このときは $w(\mathbf{c}_1) \geqq 2$ より

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる.

4.2.2.1 $w(\mathbf{r}_2) = 2$

$\mathbf{r}_2 = (0,1,1,0,0)$, $(0,1,0,1,0)$, $(0,0,0,1,1)$ の場合を調べればよい.

4.2.2.1.1 $\mathbf{r}_2 = (0,1,1,0,0)$

このとき

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる. よって, 計算により $R^3 \geqq I$ の第3列の成分がすべて1となるので済んでいる.

4.2.2.1.2 $\mathbf{r}_2 = (0,1,0,1,0)$

後との関係で

$$\mathbf{r}_2 = (0,1,*,1,*)$$

の場合を調べる. 従って,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * & 1 & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

とする. このときは $s_{21} = r_{12} = 1$ となり矛盾.

4.2.2.1.3　$\mathbf{r}_2 = (0,0,0,1,1)$

このときは $w(\mathbf{c}_2) \geqq 2$ なので

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 1 & 0 & * & * & * \\ 1 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる．よって，$s_{15} = r_{51} = 1$ となり矛盾．

4.2.2.2　$w(\mathbf{r}_2) \geqq 3$

4.2.2.1.2 において $\mathbf{r}_2 = (0,1,*,1,*)$ の場合は済んでいるので，残りは $\mathbf{r}_2 = (0,0,1,1,1)$ だけである．このときは $w(\mathbf{c}_2) = 1$ となり済んでいる．

以上により，$w(\mathbf{r}_1) = 2$ の場合が終わった．従って，仮定 2 より

(仮定 4) R のすべての行及びすべての列の重さは 3 または 4

としてよい．

4.3　$w(\mathbf{r}_1) \geqq 3$

$w(\mathbf{r}_1) = 4$ なら $w(\mathbf{c}_1) \leqq 2$ となるので済んでいる．よって，$\mathbf{r}_1 = (1,1,1,0,0)$ と $\mathbf{r}_1 = (0,1,1,1,0)$ の場合を調べればよい．

4.3.1　$\mathbf{r}_1 = (1,1,1,0,0)$

このときは仮定 4 より

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる．よって，$s_{52} = s_{53} = 1$ となるので $r_{25} = r_{35} = 0$ となる．よって，$w(\mathbf{c}_5) \leqq 2$ となり済んでいる．

4.3.2 $\mathbf{r}_1 = (0,1,1,1,0)$

このときは

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となり $w(\mathbf{c}_1) \leqq 1$ で済んでいる.

以上によりすべての場合が終わった.

5 6次以上への拡張

新たに見つかった5次ブール行列 Y のべきは次のようになる.

$$I \leqq Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y^3 = \bar{Y}^t \vee I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y^4 = E.$$

この Y を次数が6以上の場合にそのまま拡張して $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすブール行列を得ることはうまく行っていない (6次の場合には $Y^4 = \bar{Y}^t \vee I$ となる Y が得られた). しかし次数が $n = 4m+5$ の場合には次のように拡張できた.

命題 6. $m = 0,1,2,\cdots$ として $n = 4m+5$ とする. このとき n 次ブール行列

$$Y_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす．また，$Y_m^\sigma = Z$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は存在しない．ただし Y_m の各行，各列の 1 の個数は $m+2$ である．

例 7. $n = 9 = 4 \times 1 + 5$ のとき

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Y_m の各行の 1 の個数はすべて $m+2$ なので $Y_m^\sigma = Z$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は存在しない．以下，Y_m が $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすことを示す．そのために各行各列の 1 の個数が 2 個である次の n 次ブール行列 K_n を考える．

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

補題 8. R を n 次ブール行列とし，R の第 i 行を $\mathbf{r}_i$，第 i 列を $\mathbf{c}_i$ とする $(i = 1, 2, \cdots, n)$．このとき次が成り立つ．

(1) $$K_n R = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \vee \mathbf{r}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1} \vee \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_n \vee \mathbf{r}_1 \end{pmatrix}, \quad RK_n = (\mathbf{c}_1 \vee \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_2 \vee \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3 \vee \mathbf{c}_2, \cdots, \mathbf{c}_n \vee \mathbf{c}_{n-1}).$$

(2) $l \leqq n-2$ のとき，

$$K_n^l R = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+1} \\ \mathbf{r}_2 \vee \mathbf{r}_3 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1} \vee \mathbf{r}_n \vee \mathbf{r}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+n-1} \\ \mathbf{r}_n \vee \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+n} \end{pmatrix},$$

$$RK_n^l = (\mathbf{c}_1 \vee \mathbf{c}_n \vee \mathbf{c}_{n-1} \vee \cdots \vee \mathbf{c}_{n-l+1}, \mathbf{c}_2 \vee \mathbf{c}_1 \vee \mathbf{c}_n \vee \cdots \vee \mathbf{c}_{n-l+2},$$

$$\cdots, \mathbf{c}_n \vee \mathbf{c}_{n-1} \vee \mathbf{c}_{n-2} \vee \cdots \vee \mathbf{c}_{n-l}).$$

ただし，添え字が n を超えるときはその数字を n で割った余りが添え字であるとする．

(3) $l \geqq n-1$ のとき，

$$K_n^l R = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_n \\ \vdots \\ \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$$

$$RK_n^l = (\mathbf{c}_1 \vee \mathbf{c}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_1 \vee \mathbf{c}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{c}_n, \cdots, \mathbf{c}_1 \vee \mathbf{c}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{c}_n).$$

証明. (1) 積をそのまま計算する.

(2) S がブール行列または行ベクトルまたは列ベクトルのとき $S \vee S = S$ となることに注意する．よって，例えば $(\mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2) \vee (\mathbf{r}_2 \vee \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \mathbf{r}_3$ となる．従って，(1) を繰り返し用いると，

$$K_n^l R = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+1} \\ \mathbf{r}_2 \vee \mathbf{r}_3 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \vee \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{l+n} \end{pmatrix}$$

となることが分かる．ただし，添え字が $n+r$ $(1 \leqq r \leqq n-1)$ のときは r を意味する．RK_n^l についても同様である.

(3) (2) より $K_n^{n-1}R$ の各行は $\mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_n$ となる．ここから先の行は変わらないので結論が得られる．RK_n^l についても同様である. □

命題 6 の証明. 以上の準備の下で $Y_m^3 = \bar{Y}_m^t \vee I$ となることを示す．以下，$m = 0, 1, 2, \cdots$, $n = 4m+5$ とする．$I \leqq Y_m$ なので $I \leqq Y_m^3$．従って，対角成分は等しい.

$\bar{Y}_m$ の第 1 列は，(1,1) 成分が 0 で，その後 1 が $n-(m+2) = 3m+3$ 個続き，その後 0 が $m+1$ 個続く．第 2 列以降はその並びを 1 つずつ下に下げた (第 n 行だけは第 1 行に上げた) ものである.

次に Y_m^3 の行に注目する．補題 8(2) より，K_n を用いると Y_m は

$$Y_m = K_n^{m+1}$$

と書ける．よって，K_n の第 i 行を $\mathbf{r}_i$ とすると，補題 8(2) より

$$Y_m^3 = K_n^{3m+3} = K_n^{3m+2}K_n = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \vee \mathbf{r}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{3m+3} \\ \mathbf{r}_2 \vee \mathbf{r}_3 \vee \cdots \vee \mathbf{r}_{3m+4} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となる．よって，Y_m^3 の第 1 行は，第 1 列から 1 が $3m+4=(3m+3)+1$ 個続き，その後 0 が $n-(3m+4)=m+1$ 個続く．第 2 行以降はその並びを 1 つずつ右にずらした (第 n 列だけは第 1 列にずらした) ものである．

以上により，$\bar{Y}_m \vee I$ の第 1 列と Y_m^3 の第 1 行が，従って $\bar{Y}_m \vee I$ の各列と Y_m^3 の対応する行が等しいことになる．従って $Y_m^3 = \bar{Y}_m^t \vee I$ が示された． □

次の命題は，$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす n 次ブール行列から $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす $n+1$ 次ブール行列を得る方法を与える．

命題 9. R を $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす n 次ブール行列とする．このとき $n+1$ 次ブール行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

も同じ条件式を満たす．

証明. このブール行列を T とおく．容易に，

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \bar{R}^t \vee I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \bar{T}^t \vee I$$

となることが分かる． □

6　おわりに

虱潰しに計算することにより，$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たす 5 次ブール行列を調べ，置換を除けば Z と Y しかないことを確認した．その結果，$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすブール行列は本質的には Z しかないであろうという私の予想は外れた．尚，$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすブール行列 R は $I \leqq R$ を満たすかという橋本によって提起された問題はまだ未解決である．

ブール行列について色々とお教えいただいた橋本先生に感謝する．

参考文献

[1] 柏木　芳美："$R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすブール行列"，山口経済学雑誌，第 49 巻，第 3 号，pp.517–531 (2001).

[2] 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質 II"，山口経済学雑誌，第 35 巻，第 3・4 号，pp.281–293 (1986).

[3] 橋本　寛："連結的な反対称的推移関係"，山口経済学雑誌，第 42 巻，第 3・4 号，pp.53–74 (1994).