紹　介

L.S. ポントリャーギン著・坂本實訳『やさしい微積分』

渋　谷　綾　子

本年8月，出版社から送られてきた封書を開封すると，積分記号がデザインされたピンク色の表紙が美しい182ページのコンパクトな「やさしい微積分」という文庫本が出てきた。帯には「王道コースで基礎攻略　世界的数学者が贈る入門教科書　練習問題・解答付きで独習にも最適」とある。まえがきで著者が「この小さな本は，うまくゆけば，中学校（日本では高等学校）での解析学の教科書となるよう予定したものです。この本は，学習要領に定められたものばかりを含んでいます。」と述べているように，微積分についての基礎的なことがらを初めて学ぶ若い人達のために世界的数学者が執筆した，というものである。

日本の高校生は受験のための数学を学んでいる場合が多いので，微分や積分を学んだとしても意外に本質が理解されていないままであったりするが，本書は王道コース，すなわち，正しい理解のしかたをわかりやすく説明しているので，独習でも微積分の本質的な理解が可能である。したがって，むしろ，高校生よりも，受験数学のテクニックを暗記する必要がなくなった大学生，特に文科系の学生達に適すると思う。山口大学の経済学部の学生たちが，あらためて微積分を学びなおすのにも最適である。

なお，訳者の坂本實先生は私の修士課程のときの指導教授である。著書には「経営のための最適計画法」（建帛社）他があり，訳書としてはポントリャーギンの「最適制御理論における最大値原理」（森北出版）などがある。

著者のポントリャーギンについては，「1908-1988年。ロシア生まれ。13歳のとき爆発事故により失明。1925年にモスクワ大学に入学して『双対定理』を発表し，1938年に出版した『連続群論』ではソヴィエト国家賞を，1961年の『最適制御の数学的理論』ではレーニン賞を受賞。純粋数学・応用数学の両面で業績を上げた。」と紹介されている。レーニン賞は日本の文化勲章ともいうべきものである。

以前，私は視覚障害者に関わる職場にいたことがあり，そこで全盲の世界的な数

学者の微積分に関する本のことを聞きたことがあったが，本書とのであいによってその数学者がポントリャーギンであり，その本を自分の恩師が日本に紹介していたことがわかった。なお，本書（筑摩書房発行，ちくま学芸文庫，本体価格1000円，2008年8月10日第一刷発行）は1987年11月25日，東京図書より刊行された『やさしい微積分』（改訂新版）（坂本實訳）を底本としている。本書は訳者による「文庫版あとがき」によれば，原書初版は1980年に出版され，同年に日本語訳（坂本實訳，東京図書）が出版され，版を重ねて1988年には第3版が出版されて多くの読者を得ているとのことである。

本書の構成は，

まえがき
第1章　導関数
第2章　多項式の導関数の計算
第3章　極大値と極小値，ロルの定理とラグランジュの公式
第4章　関数の研究
第5章　3角関数の導関数と微分のいくつかの規則
第6章　不定積分
第7章　定積分
第8章　収束性の判定基準
第9章　ニュートンの2項式と幾何級数の和
第10章　関数 e^x
第11章　関数 $\log x$
第12章　関数 e^x の級数展開
第13章　あとがき，極限の理論
訳者あとがき
文庫版あとがき
索引
となっている。

そのうち，微積分の専門家でない読者は，まずは，まえがきで中学生（日本の高等学校生）向きの教科書の範囲とされている第1章から第7章までの理解を目標にするといいと思う。第8章以降の章は複雑すぎると著者も指摘しているが，読者が文

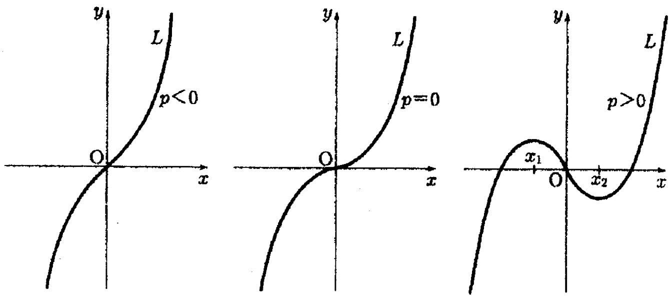
科系であれば第7章までの理解も全く容易というわけではない。文庫本は通読するものとの印象が強いが，この本は一度通読して概略をつかんだのち，二度目，三度目はぜひノートを開いてじっくりと取り組むとより有益であると思われる。それは，本書の特に優れた特徴である“直感的”なイメージを足がかりとした説明を理解するとき，文科系の人は，理科系の人に比して直感的なイメージを描き出すのに少し時間がかかる場合があり，また，グラフィカルなイメージは自分で紙に描いて可視化する手間が必要であることも多々あるからである。さらに，本書の優れた計算技術の説明を読みながら練習問題をじっくり解くためにも時間と手間を惜しまず，ノートに記録していくといい。このような思考方法を習得する訓練は，文科系分野に進学したときは，ともすれば充分になされずにすんでしまうことがあり，それではたとえば経済学を充分に理解するのは困難かもしれないので，本書に取り組んでみることはこれまでそのような経験が少ない人にとって貴重な体験になりうる。イメージの可視化のような作業は苦手だという人でも，何度か試みるうちに頭の中だけですみやかにできるようになるであろう。

「第1章　導関数」は読者の多くはすでに知っている内容かもしれないが，たとえば，導関数と接線の関係，導関数の表記についての説明方法がわかりやすいかどうか，あるいは，好感を感じるかどうかで本書と読者の相性を占うことができそうである。微積分の専門家でない読者にはこのように丁寧に正確に解説されることはありがたいと感じられるのではないだろうか。この章の理解には特別な専門知識は必要なく，グラフをイメージすることができれば，さらに，そのグラフ上の点を動かすイメージができれば，高校での数学の授業が少なかった読者も理解可能と思われる。正接（tan：タンジェント）などは習った記憶がないというような読者も，まずは，読むことをやめずに読み進んでみることである。

「第2章　多項式の導関数の計算」では，多項式の導関数の公式，つまり，$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$を説明している。まだ高校で習った数学を忘れていない一年次の数学概論の授業で，微分の計算となると教員の説明も聞かず，$(x^n)'=nx^{n-1}$や$\{f_1(x)+f_2(x)\}'=f_1'(x)+f_2'(x)$などいくつかの“計算規則”を思い出し，あるいは，参照しながら熱心に計算し始める何割かの学生達が，もし，規則を鵜呑みにしていたとしたら，この章は正確な知識を得るチャンスとなろう。

「第3章　極大値と極小値，ロルの定理とラグランジュの公式」の内容は経済学を学ぶ上で知っておくべきとされることが多い。経済学分野の教科書で微分についての数学的知識が付録としてついているようなときは，その内容に最も近いのがこの第3章である。まず，$f'(x)>0$のとき関数は点xで増加，$f'(x)<0$のとき関数は点xで減少することをふまえ，極大点あるいは極小点のxでは$f'(x)=0$であることを示している。続いて「ロルの定理」（日本では「ロールの定理」と記述されることもある）と，平均値の定理とも呼ばれる「ラグランジュの公式」について簡潔に説明し，これらの考察の結果を記している。続く「第2次導関数」「極大値と極小値の識別」では，第2階導関数とも呼ばれる第2次導関数$f''(x)$と極大値と極小値の識別について説明している。内容としては，$f'(x_0)=0$かつ$f''(x_0)<0$ならばx_0は極大値，$f'(x_0)=0$かつ$f''(x_0)>0$ならばx_0は極小値，ということだが，このことも結果だけを暗記するのではなく，本書で証明されているように$f''(x)$が$f'(x)$を微分して得られた関数であることから，x_0で$f'(x_0)=0$かつ$f''(x_0)<0$ならば，$f'(x)$は減少しながらx_0で0なので$x<x_0$のとき$f'(x)$は正，$x=x_0$のとき$f'(x)$は0，$x>x_0$のとき$f'(x)$は負とであり，$f(x)$ではx_0に左から近づくときは増加関数，x_0より右では減少関数，したがって，$f(x)$はx_0で極大値をとる，というように記憶すればよい。

「第4章　関数の研究」では，前章で学んだことを，関数$y=f(x)=x^3-px$（ここにpは定数）を例にして，この関数の場合はpの値によって3次放物線の概形がどのようになるかを示し，さらに，変曲点について調べている。



pの値（符号）による3次放物線のグラフの概形の変化（本書52頁の図3）

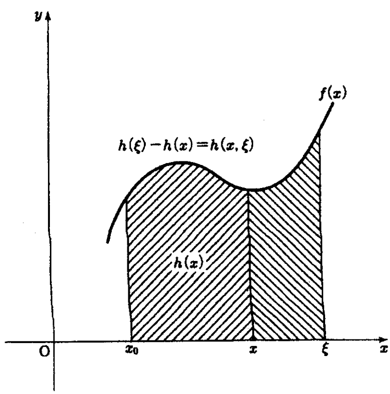
「第5章　3角関数の導関数と微分のいくつかの規則」は本書の微分パートのしめくくりの章である。3角関数に関する知識は文科系の専門分野では言及されることは少ないが，

積と商の導関数（$\{u(x)v(x)\}'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ と $\left\{\dfrac{u(x)}{v(x)}\right\}'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{\{v(x)\}^2}$）

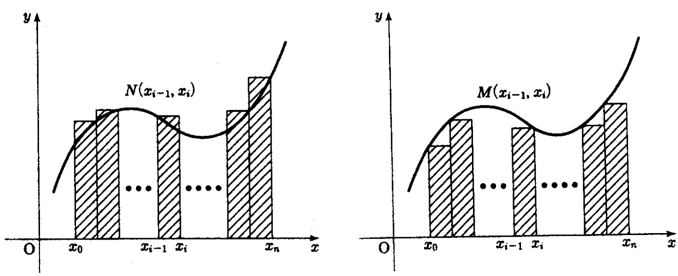
は，できれば，この章で説明されている考え方とともにしっかりとおぼえておくとよい。合成関数の導関数，$\{\psi(\varphi(x))\}'=\psi'(\varphi(x))\varphi'(x)$ もおぼえておくべきであろう。

「第6章　不定積分」では微分演算の逆の演算としての積分演算を説明している。

「第7章　定積分」では，幾何学での面積計算に利用される積分演算について記述している。もし，高等学校で積分を学んでいなければ，平面上の図形の面積といえば小学校で学んだ三角形や四角形，台形，平行四辺形などの面積を求める公式しか頭に浮かんでこないかもしれない。積分演算による面積計算の理解は身近な科目としては，たとえば，統計学の授業で確率密度関数を学ぶようなときにも理解の助けになるものである。この章では，さらに有限和の列の極限としての定積分についても述べ，これらの概念をいくつかのグラフ（図）を用いてわかりやすく説明している。



積分による面積計算
（本書113頁の図14の一部）



有限和の列の極限としての定積分（本書119頁の図16）

以上，著者が中学校（日本の高等学校）の学生向けとした第1章から第7章までを概観した。文庫本で100ページ余りの内容としてはずいぶんと豊かなものではないだろうか。著者のポントリャーギンは「本は入念に書けば書くほど薄くなり，それだけ書くための労力が大きくなる。おおざっぱに言って，著者が綿密さを2倍にすれば，本の厚さは半分になる。」と語っている。本書を手に取り，その内容に触れてみれば，この著者の言葉の意味がよくわかるだろう。また，この入門書が版を重ねて長い間読み継がれてきたのは，洗練された翻訳によるところも大きいと思われる。読みやすいだけでなく，誠実な語り口までもが伝わってくるようである。

世界的に高名な科学者が，まえがきで「私の希望としては，中学生が幾何学を学ぶときには，3角形は薄い金属板でできていて，手にとることができ，場所を移すことができ，裏返しにもできるものだと受け取ってもらいたいものです。このことは，これが3角形の定義でなければならないというのではなく，その理解が，私の考えでは，このようでなければならないと言うのです。」と記述するような率直な初学者への配慮をもって中学校(日本では高等学校)の教科書を執筆していることも興味深い。

なお，訳者による「文庫版あとがき」によると，ポントリャーギンの日本語訳が存在する他の著書として，6冊の単行本からなる「ポントリャーギン数学双書」（森北出版）が出版されている。また，経済的には恵まれない家庭に生まれ，13歳で事故のため全盲となりながら卓越した業績を残したこの数学者の生涯については，その双書の「6」『最適制御理論における最大値原理』（坂本實訳）に「ポントリャーギン小自伝」が含まれていることが紹介されている。この偉大な数学者についてさらに詳細を知るための重要な書籍として『ポントリャーギンの生涯，自叙伝』（ロシア語，第2版，2006年）もあげられている。