

ホッパーより流出する粉粒体の流出量変動の周期性について

第 1 報

早野 延 男*・八尋 隆 道*・原 田 教 男*

On the Periodicity Appeared in the Variation of the Flow-out
Quantity of Granules Flowing-out from the Hopper (Part 1)

Nobuo HAYANO, Takamichi YAHIRO and Norio HARADA

Abstract

Flowing out mechanism of granules from the cylindrical bin with the circular aperture are investigated. The existence of two frequencies f_1 (lower) and f_2 (higher) are recognized. f_1 increases rapidly with the diameter of aperture. Besides, f_2 are kept almost constant with the variation of the size of the aperture. Both analysis by autocorrelation coefficient and by periodgram of the recording on the flowing out quantity are in agreement qualitatively with the global structures of the system.

1. 緒 言

貯槽中の粉粒体を閉塞を起さずに円滑に供給することは工業上の重要なプロセスの一つと考えられる。現在までに重力によって、容器内の粉粒体を定常的に排出させる研究は甚だ多く、実用的な目的のために粒子径、流出口径などをパラメーターとして、流出量を表わす実験式が数多く提出されており、それぞれ特定の場合に有用であると考えられる¹⁾²⁾³⁾。

研究の方法としては、粉粒体材料の性質と容器の形状、寸法などの関係を考慮しながら、最適の流出条件を求めて行く方法が取られている。いずれの場合においても、流出開始と同時に、容器内の粉粒体層に対して、Fig. 1のような、フローパターンが発生していることが確認されている。また、各領域 (Zone) を区分する曲線の微細な形状についても多くの報告が見受けられる。

一方流出量の実験式の方は殆んどが、平均流出量に関するものであり、フローパターンを区分する。各 Zone と速度分布の関係を調べた報告は⁴⁾⁵⁾あまり見られないようである。湿分を含まない、形状に不規則性の少ない材料については、一般に実験結果の再現性も良好であるので、各 Zone についての速度分布の理論的解析が検討される段階であると考えられる。

本報告では材料として、砂及びなたねを用いて、ホ

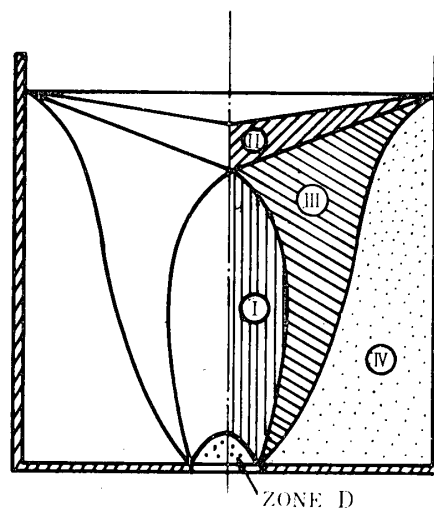


Fig. 1 Flow-Pattern

Zone I ; The highest velocity region in the vertical direction

Zone II ; Surface region in which granules move toward the center

Zone III ; The region which has smaller velocity than zone I. Granules flow as the laminar flow

Zone IV ; This region is called Dead Space

Zone D ; The region which has cone shape

* 生産機械工学教室

ッパーから流出する粉粒体の瞬時流出量の計測を行ない、その結果について主として統計的解析を行ない、流出量の変動において、周期性の存在を確認し、さらに、変動の周期と流出口径との定量的な関係について検討した結果を報告する。

2. 実験装置及び方法

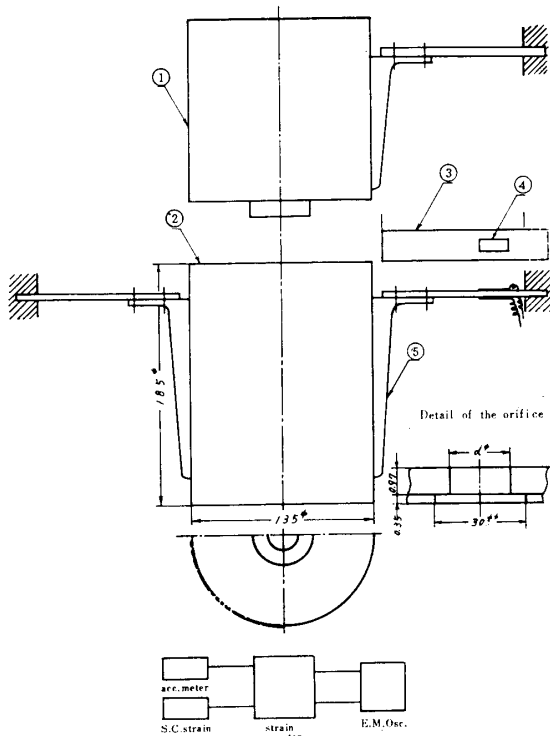


Fig. 2 Experimental apparatus

- ① Aux. bin. ② Main bin ③ Cantilever beams
- ④ S. C. Strain gauge ⑤ Supporting Angle

模型ホッパーの形状、寸法は、Fig. 2に示す通りである。

容器の材質は、薄軟鋼板(0.35t)を使用、両肩部に、検出用ビーム(磷青銅板、巾×厚み×長さ30×1

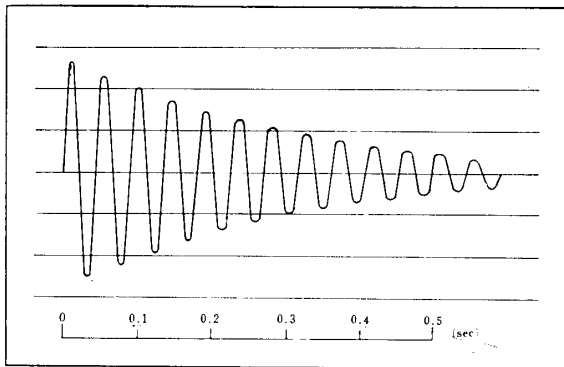


Fig. 3 Free vibration of the system

×100mm)をL字型支持金具を通し、ボルト締めとする。検出用ビームは、バネ系の定数の変動を防止する目的で、バイスを用いて、溝型鋼の上に固定されている。検出用ビームには上下面に、半導体ゲージ(S社製EN-108)を貼付け温度補償とゲインの増大を計った。粉粒体充填時の重量は2143grであり、20grの錘りを引上げることによって、系の減衰状態を調べた波形をFig. 3に示す。固有振動数及び粘性減衰係数比、 c/c_c は、夫々、22c/s、と、0.0254となっている。

模型ホッパーの流出口は、直穴とし、口径を7.0mmφから20.0mmφまで、1.0mmφ間隔で、交換可能なように設計されている。容器への粉体の供給は、本容器の上方に補助容器を設け、ネットを通し、でき得る限り定常な供給を行なった。本報告では特に、比重、粒子径、表面状態を異にする。なたね、標準砂についてのみ報告をする。Table 1になたね、標準砂の物性をまとめておく。

Table 1 Properties of materials

	Rape-seed	Sand
ρ gr/cm ³	0.678	1.259
d mmφ	1.5	0.25
ϕ_r	27°29'	33°40'
ϕ_w	17°39'	19°42'

3 流出口近傍でのブロッキング(閉塞)現象の発生について

—流出量変動のメカニズム—

粉粒体を取扱う工業上のプロセスにおいては、ホッパーから粉粒体を切れ目なく、円滑に排出、供給するのが目的であるので、器底の流出口での粉粒体の閉塞発生はきわめて重大な問題となる。流出口径 D が小となるにつれて、Fig. 1の Zone Dの部分に、アーチ状の空洞が発生し、流動、流出が停止する。この限界口径、 D_{th} については、これまでも多くの研究¹⁻⁶⁾があり、ホッパー中の粉粒体層の底圧の飽和性、フローパターンの形状及びフローパターン中の各 Zone の速度分布の問題との関連において考察が行なわれている。

Brown, R.L. と Richards, J.C.³⁾ は閉塞のメカニズムを調べるために、鋼球を容器内に一層に配列し高速度カメラを用いて、流出口近傍の空隙率の測定を行ない、その結果、空隙率の変動に明瞭な周期性の存在

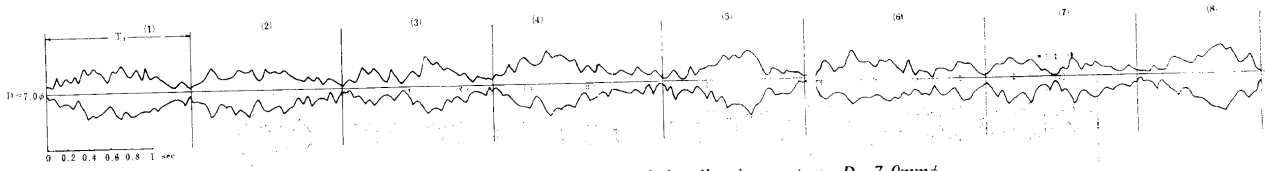


Fig.4 a Irregular vibration with the flow of sand of the vibrating system, $D=7.0\text{mm}\phi$

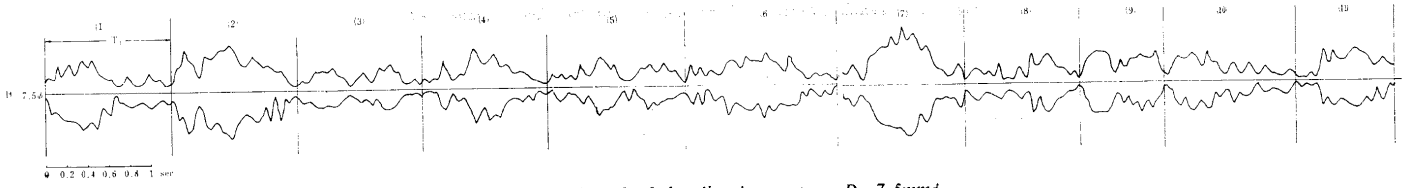


Fig.4 b Irregular vibration with the flow of sand of the vibrating system, $D=7.5\text{mm}\phi$

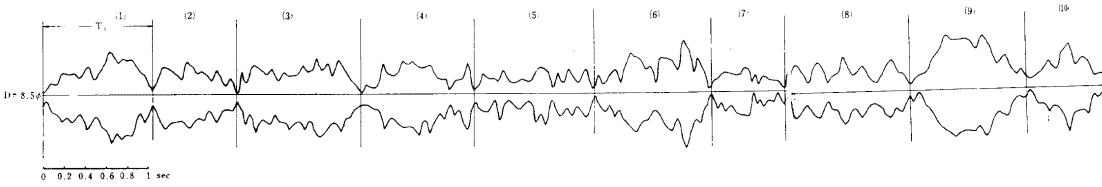


Fig.4 c Irregular vibration with the flow of sand of the vibrating system, $D=8.5\text{mm}\phi$

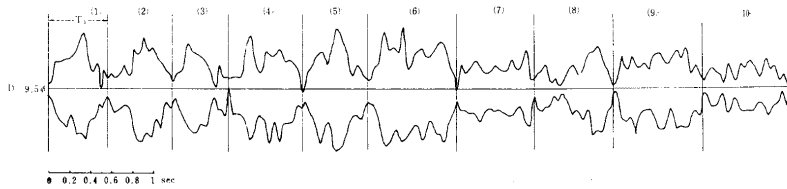


Fig.4 d Irregular vibration with the flow of sand of the vibrating system, $D=9.5\text{mm}\phi$

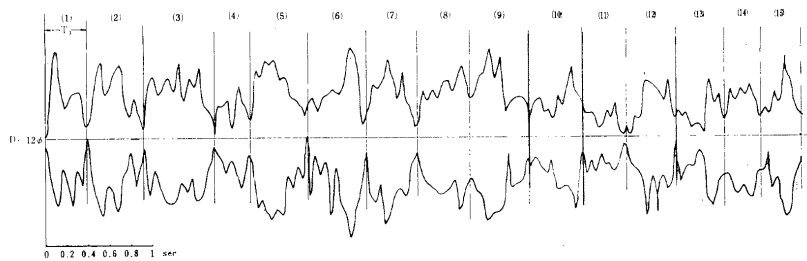


Fig.4 e Irregular vibration with the flow of sand of the vibrating system, $D=11.0\text{mm}\phi$

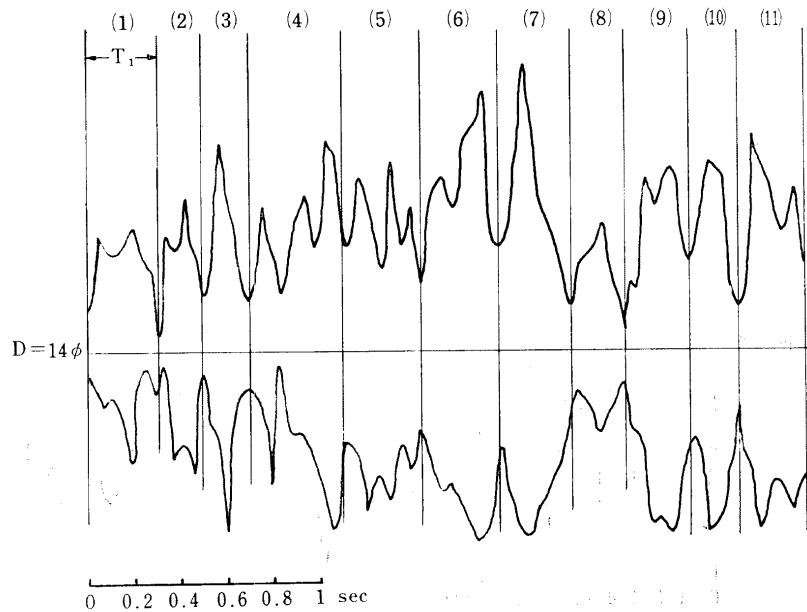


Fig.4 f Irregular vibration with the flow of sand of the vibrating system, $D=14.0\text{mm}\phi$

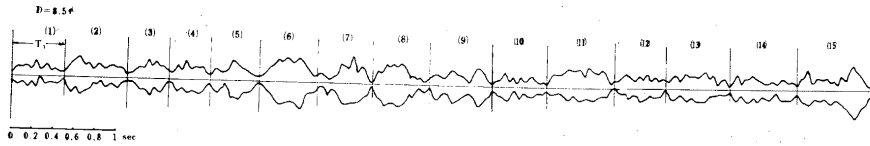


Fig.5 a Irregular vibration of the system with the flow of rape-seed

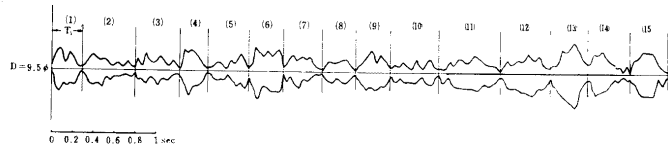


Fig.5 b Irregular vibration of the system with the flow of rape-seed

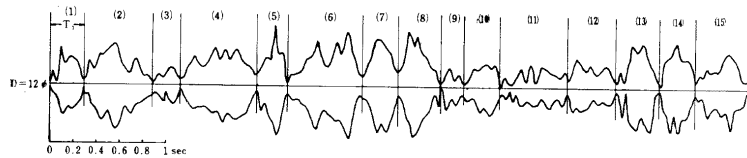


Fig.5 c Irregular vibration of the system with the flow of rape-seed

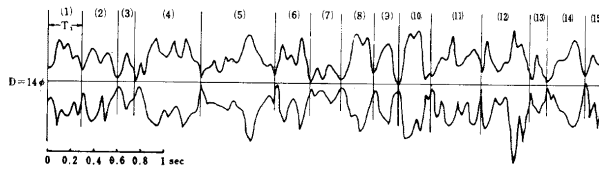


Fig.5 d Irregular vibration of the system with the flow of rape-seed

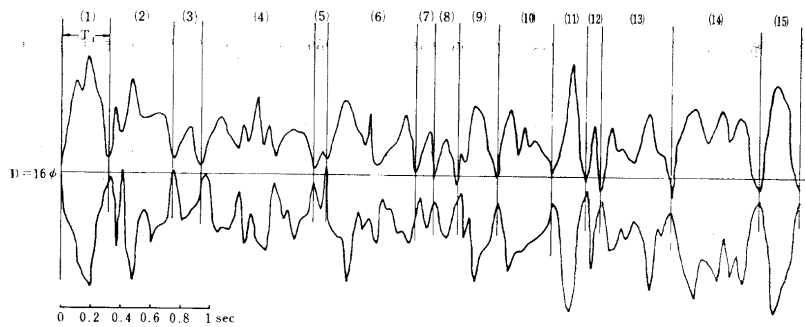


Fig.5 e Irregular vibration of the system with the flow of rapeseed

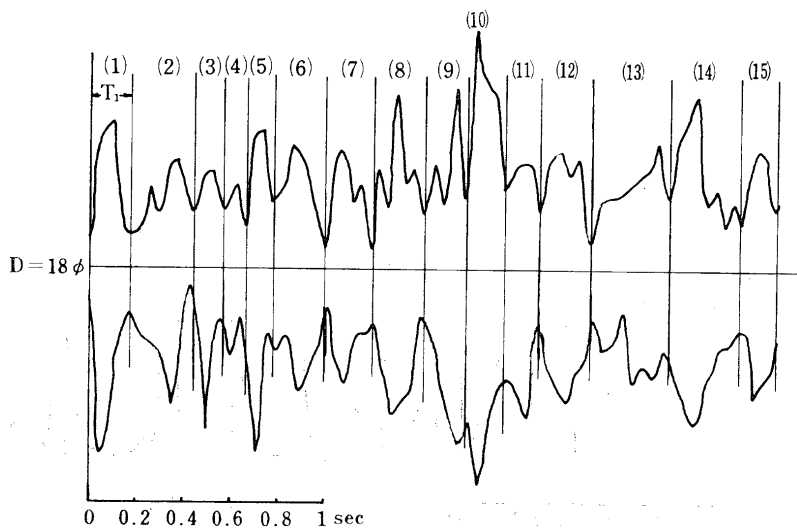


Fig.5 f Irregular vibration of the system with the flow of rape-seed

することを確認している。しかし、彼らの実験は現実を理想化した例であって、現実の多様な粉粒体の閉塞現象は甚だ複雑な様相を呈している。すでに実験方法の項で述べたように (Fig. 2 参照)。筆者らは流出量の変動を測定するのに、容器の2ヶ所を片持梁で支持し、粉粒体の流出によって、系全体が振動するような構成を取っている。もし流出する粉粒体の量が時間的に、不変で一様なものであれば片持梁に貼付したストレーンゲージから取り出された信号は振巾一定の自励振動系と考えられ、この振動の振巾は流出口径 D によって決まるある特定の値をもつものと考えられる。一方実際の波形の包絡波形を作ってみると、砂に対しては Fig. 4 (a)~(f) に、なたねに対しては Fig. 5 (a)~(f) のような、一見した所では極めて複雑な変動を行っている。この包絡波形を概観すると、振巾の大きな部分 (ループ) と小さな部分 (ノード) とがある間隔をもって交互に発生しており、恰も唸りの現象に類似のものとも見ることが出来る。また、この振動系の固有振動数については、2節で述べたように

$f_n = 22c/s$ となっており、この f_n は Fig. 4 (a)~(f) Fig. 5 (a)~(b)、の標本全体を通じて、不変に保たれている。このことは、実験の項に述べたように、定常流れの条件が精度よく保たれていることを示すものと考えられるが、またこのことは2つの接近した振動数の干渉が原因となって発生する唸りの現象とは異質のものであるとも考えられる。このことについては次節で詳しく述べる。一方現象論的な見方として、この包絡波形を固有振動数 f_n をもって振動している振動系が粉粒体の流出の不規則性によって変調された振巾変調波形とする見方は自然なものと考えられる。この報告では後者の立場を取って実測波形の包絡線 (変調波) の性質を考察の対象と考えることにする。

次に変動発生メカニズムについては既に述べたように、この振動系には外部より、何ら振動的な外力は作用していないので、いわゆる、自励的な振動系と考えられる。電気回路的な類推を用いれば振動系の要素の中に負性抵抗要素の存在が必要と考えられる。また、制御工学的な用語によれば、どこかで正帰還が行なわれていることが要求される。このような立場から以下に流出口近傍での粉粒体の流動、流出の現象を考察する。

まず i) Fig. 1 の底部の小孔を開くと同時に Zone D の円錐状の部分が崩落を始める。

ii) この Zone D の落下によって系は負の運動量変化を受け上方にはね上ることになる。

iii) はね上の際の平均的な加速度を α_{jump} と考えると、容器内の粉粒体粒子のうち、Zone D の近傍の粒子団に作用する見掛けの加速度は $g + \alpha_{\text{jump}}$ となって更に崩れ易くなるものと考えられる。つまりここで、正帰還が行なわれたものと見ることが出来る。例えば Fig. 4 (a)~(f)、などからも見られるように、系の振動のモードとこの崩壊による、加振力のモードの位相が合致すれば、大きなループが発生していることが観察される。この有様は崩壊に周期性があるとすれば、その振動数 f と系の固有振動数 f_n との大小関係及び位相関係によって、種々の振動のモードの発生が考えられる。

iv) 次に Zone D の崩落による、周辺の粒子の運動の様相について考えると、粒子同志の圧密が弛み初め、さらに粒子間にすべり (並進) が発生し、また同時に粒子はそれ自身、回転運動も同時に起すものと考えられる。また、粒子団がある大きさのままで、移動を起す場合なども考えられるが、これられの粒子間の多様な再配列の結果が流動に対する抵抗そのものと考えられる。

v) 上述の再配列に対する抵抗は粒子の比重、 r 、粒子径 d 、表面状態 (Surface condition s.f.c.) などと、流出口径 D との関係から、アーチが崩壊せず流出量が次第に減少して遂には閉塞する場合も考えられる。

vi) また、 r 、 d 、s.f.c. と D との関係により崩落が大きくなり、いわゆる、フラッシング現象を起す場合も考えられる。これらは振動論的な見方を行えば、負性抵抗による、跳躍現象の一種とも考えられる。現象としては大きなフラッシングの後には、殆んどの場合流出量は減少する傾向にある。

vii) 付着性粉体の場合には上記のフラッシング現象が重要な問題となるが、粒体の場合には粒子物性と流出口径 D が適当であれば、上記流出のメカニズムによって、瞬時流出量の変動はある平均流出量の上下にある巾をもった周期的変動を繰返しているものと考えられる。

4. 実験波形とその解釈

— 流出量変動の大局的構造 (Global structure) —
この節では変動 (包絡) 波形の精密なまた局所的な模様を調べる前に、変動そのものの、構造を知るという目的から、非線型な振動の解析の常とう手段として、まず波形の大局的な性質を調べて行くことにする。

砂の瞬時流出量を記録した、Fig. 4.(a)~(f)を見ると波形はある単位の塊り (Cluster) をつなぎ合せたように見える。この塊りに着目して、Fig. 4.(a)~(f)を調べて行くと、流出口径 D が小さい間は、振巾 A が小さく、塊りの持続時間 (T_1 Sec) が大きい、流出口径を拡げて行くにつれて振巾 (Cluster の振巾の最大値) は大きく、 T_1 は小さくなって行く。また、この Cluster の、つなぎ目 (ノード) の部分では振動の位相が π だけ逆転していることが観察される。換言すれば、われわれは、波形の振巾の小さくなる部分で、特に位相関係が上述のようになる部分を意識的に Cluster のつなぎ目であるとの解釈を取ったわけである。次に各 Cluster の内部に着目すると、小さいけれども、明瞭な小起伏が見受けられる。Cluster 中のこの小変動の数を n とすると、波形全体の大局的性質は A 、 T_1 、及び、 n の3つで把握することが可能であるこの3つの特性的な量と前述した流出口近傍でのアーチの崩壊——その部分の流出——上層部の粒子団の流れ込みによるアーチの形成——その崩壊といった、ブロッキング (アーチング) メカニズムとの関係について考える。

(i) D が小であると流出量の平均値 (絶体値) も小となり、従って A も小となる。つまり $D \rightarrow$ 小と $A \rightarrow$ 小とは対応しており、 A がある値より小であれば閉塞が発生することになる。

(ii) D 小の時、 T_1 が大きいことは全体としての流出現象が緩やかであり、粒子間の再配列も緩やかに行なわれ、流出口でのアーチの形成と崩壊——これをブリージング動作 Breezing action と表現することにする——の回数は小さいものと考えられる。逆にこの Breezing action が激しく行なわれれば、流出量も増大するものと考えれば $D \rightarrow$ 大、 $T_1 \rightarrow$ 小の傾向も十分説明することが可能である。このような考え方を是認すれば流出量 Q と T_1 との関係についても、言及することが可能となる。事実、多くの研究者^{1~7)}によれば、非付着性の紛粒体の流出量 Q 、は D と共に増加し、その増加の仕方は D の比較的小さい間は直線に近いが、漸次、 D^2 に比例する項の影響が表われることが報告されている。

以上を数式で表示すると、Breezing action の頻度は $1/T_1$ に比例すると考えられるので

$$Q \sim 1/T_1 \quad (4 \cdot 1)$$

及び

$$1/T_1 = f_1 \sim f(D) \quad (4 \cdot 2)$$

なる関係式を仮定しておき、Fig. 4. a~f より f_1 と

$f(D)$ との関係を求めれば (4・1) より

$$Q \sim f(D) \quad (4 \cdot 3)$$

を決めることが可能となる。平均流出量に関する、多くの報告からは、

$$Q \sim \alpha D + \beta D^2 \quad (4 \cdot 4)$$

(但し $\alpha \gg \beta$)

なる関係式が確認されている。

(iii) Cluster 中の小起伏の個数 n については、アーチが弛み、全体的な崩落が発生する際に生ずる Zone I の周辺の粒子団の圧密の不連続的な小崩壊によるものであると考えられる。その理由として、 D の大小により、 T_1 はかなり変化するが、単位時間に発生する n の個数は余り変化せず、したがって、 D の大小によらず、 $T_1/n = T_2$ なる。比の値は T_1 自身の D による変化ほどは変化しないことである。このことはなたねに対する Fig. 5(a)~(f)の波形からも認められる。

以上の考察に基いて、Fig. 4 及び Fig. 5 の波形より、波形の特性量として、 T_1 、 f_1 、 n 、 T_2 、 f_2 の値を測定し表としたものが、砂に対しては Table 1、Table 3 として示されている。表中の右端の数値は夫々の量の算術平均値、 T_1 、 f_1 、 n 、 T_2 、 f_2 を示している。

さらに、横軸に D を取り、縦軸として、 f_1 、 f_2 を記したものが Fig. 6. である。Fig. 6. から、全体的な崩壊の平均振動数、 f_1 (Coarse collapsing frequency) (4・4) 式より予想したように $f_1 \sim \alpha D + \beta D^2$ のように変化し、局部的崩壊の振動数 f_2 (Rearrangement collapsing frequency) の方の変化は D と共に変化はするが、変化の仕方は小さいことが観察される。さらに崩壊のメカニズムとの関連について付言すれば Cluster のノードの部分で f_1 に相当するパルス (負の運動量のパルス) が系に印加され、このパルスの強弱が次の Cluster の性格を支配するものと考えられる。

Table 2 Sand

f_1 ; Lower frequency T_1 ; $1/f_1$,
 f_2 ; Higher frequency T_2 ; $1/f_2$,

Dmm ϕ	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Average
		7.0	T_1	1.40	1.45	1.45	1.65	1.35	1.70	1.45	1.20						
	f_1	0.72	0.69	0.69	0.61	0.74	0.53	0.69	0.53								0.65
	n	11	10	11	11	9	12	10	8								10.25
	T_2	0.13	0.15	0.13	0.15	0.15	0.14	0.15	0.15								0.14
	f_2	7.85	6.90	7.85	6.70	6.70	7.06	6.90	6.70								7.08
7.5	T_1	1.20	1.20	1.20	1.20	1.35	1.45	1.25	1.10	0.85	1.25	0.90					1.18
	f_1	0.83	0.83	0.83	0.83	0.74	0.69	0.80	0.91	1.17	0.80	1.11					0.87
	n	9	9	9	9	10	11	10	9	6	8	6					8.73
	T_2	0.13	0.13	0.13	0.13	0.14	0.13	0.13	0.12	0.14	0.16	0.15					0.14
	f_2	7.50	7.50	7.50	7.50	7.41	7.58	8.00	8.20	7.05	6.40	6.66					7.39
8.5	T_1	1.05	0.80	1.20	1.10	1.15	1.10	0.70	1.20	1.10	0.75						1.02
	f_1	0.95	1.25	0.83	0.91	0.87	0.91	1.43	0.83	0.91	1.33						1.02
	n	9	6	9	8	9	9	6	8	7	5						7.60
	T_2	0.12	0.13	0.13	0.14	0.13	0.12	0.12	0.15	0.16	0.15						0.14
	f_2	8.56	7.50	7.50	7.25	7.83	8.17	8.56	6.67	6.36	6.67						7.51
9.5	T_1	0.60	0.50	0.55	0.75	0.75	0.58	0.62	0.55	0.70	0.65	0.83	0.75	0.75	0.85	0.83	0.68
	f_1	1.67	2.00	1.82	1.34	1.34	1.73	1.62	1.82	1.43	1.54	1.21	1.34	1.34	1.18	1.18	1.50
	n	4	4	4	6	6	4	6	4	5	4	7	6	6	7	7	5.33
	T_2	0.15	0.13	0.14	0.13	0.13	0.15	0.13	0.14	0.14	0.16	0.12	0.13	0.13	0.12	0.12	0.14
	f_2	6.68	8.00	7.28	8.00	8.00	6.90	9.68	7.27	7.13	6.15	8.43	8.00	8.00	8.23	8.23	7.73
12.0	T_1	0.42	0.52	0.60	0.40	0.55	0.55	0.50	0.48	0.60	0.50	0.42	0.48	0.46	0.35		0.49
	f_1	2.50	1.85	1.67	2.50	1.85	1.85	2.00	2.08	1.67	2.00	2.38	2.08	2.17	2.86		2.10
	n	3	4	5	3	5	4	4	4	5	4	4	4	4	3		4.00
	T_2	0.14	0.13	0.12	0.13	0.11	0.14	0.13	0.12	0.12	0.13	0.11	0.12	0.12	0.12		0.12
	f_2	7.13	7.70	8.33	7.50	9.10	7.28	8.00	8.33	8.33	8.00	9.53	8.33	8.70	8.56		8.20
14.0	T_1	0.30	0.20	0.20	0.40	0.35	0.40	0.33	0.23	0.25	0.22	0.30					0.29
	f_1	3.33	5.00	5.00	2.25	2.85	2.25	3.03	4.34	4.00	4.55	3.33					3.63
	n	3	2	2	3	3	4	2	2	2	2	2					2.46
	T_2	0.10	0.10	0.10	0.13	0.12	0.10	0.17	0.12	0.13	0.11	0.15					0.12
	f_2	10.00	10.00	10.00	7.50	8.57	10.00	6.07	8.70	8.00	9.10	6.68					8.60

Table 3 Rape-seed

f_1 ; Lower frequency T_1 ; $1/f_1$,
 f_2 ; Higher frequency T_2 ; $1/f_2$,

Dmmφ	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Average
		8.5	T_1	0.50	0.60	0.42	0.36	0.50	0.56	0.52	0.56	0.60	0.52	0.66	0.50	0.64	0.64
	f_1	2.00	1.67	2.38	2.78	2.00	1.79	1.92	1.79	1.67	1.92	1.52	2.00	1.56	1.56	1.38	1.86
	n	5	4	4	3	4	4	4	6	4	4	6	5	6	6	7	4.80
	T_2	0.10	0.15	0.11	0.12	0.13	0.14	0.13	0.09	0.15	0.13	0.11	0.10	0.11	0.11	0.10	0.12
	f_2	10.00	6.67	9.09	8.33	7.69	7.14	7.69	11.11	6.67	7.69	9.09	10.00	9.09	9.09	10.00	8.62
9.5	T_1	0.36	0.46	0.76	0.32	0.34	0.46	0.60	0.50	0.36	0.96	0.40	0.36	0.66	0.42	0.54	0.50
	f_1	2.78	2.17	1.32	3.13	2.94	2.17	1.67	2.00	2.78	1.04	2.50	2.78	1.52	2.36	1.85	2.20
	n	4	4	7	2	3	4	4	4	3	7	4	3	6	3	6	4.27
	T_2	0.09	0.12	0.11	0.16	0.11	0.12	0.15	0.13	0.12	0.14	0.13	0.12	0.13	0.14	0.09	0.12
	f_2	11.11	8.33	9.09	6.25	9.09	8.33	6.67	7.69	8.33	7.14	7.69	8.33	7.69	7.14	11.11	8.27
12.0	T_1	0.30	0.60	0.24	0.66	0.26	0.64	0.30	0.36	0.20	0.14	0.60	0.42	0.36	0.32	0.48	0.41
	f_1	3.33	1.67	4.17	1.52	3.85	1.56	3.33	2.78	5.00	2.50	1.67	2.50	2.78	3.13	2.08	2.79
	n	3	5	2	5	3	5	2	4	2	3	6	4	3	3	5	3.67
	T_2	0.10	0.12	0.12	0.13	0.12	0.13	0.15	0.09	0.10	0.13	0.10	0.11	0.12	0.11	0.10	0.12
	f_2	10.00	8.33	8.33	7.69	8.33	7.69	6.67	11.11	10.00	7.69	10.00	9.09	8.33	9.09	10.00	8.82
14.0	T_1	0.30	0.30	0.14	0.56	0.64	0.30	0.26	0.28	0.22	0.26	0.44	0.44	0.14	0.34	0.18	0.32
	f_1	3.33	3.33	7.14	1.79	1.56	3.33	3.85	3.57	4.55	3.85	2.28	2.28	7.14	2.96	5.56	3.77
	n	3	2	2	4	6	3	2	2	2	3	4	4	1	3	2	2.87
	T_2	0.10	0.15	0.07	0.14	0.11	0.10	0.13	0.14	0.11	0.09	0.11	0.11	0.14	0.11	0.09	0.11
	f_2	10.00	6.67	14.29	7.14	9.09	10.00	7.69	7.14	9.09	11.11	9.09	9.09	7.14	9.09	11.11	9.18
16.0	T_1	0.32	0.42	0.18	0.76	0.10	0.60	0.10	0.16	0.28	0.36	0.23	0.10	0.48	0.58	0.26	0.33
	f_1	3.13	2.50	5.56	1.32	10.00	1.67	10.00	6.25	3.57	2.78	4.35	10.00	2.08	1.72	3.85	4.59
	n	3	3	2	6	1	6	1	1	3	3	2	1	4	4	2	2.80
	T_2	0.11	0.14	0.09	0.13	0.10	0.10	0.10	0.16	0.09	0.12	0.12	0.10	0.12	0.15	0.13	0.12
	f_2	9.09	7.14	11.11	7.69	10.00	10.00	10.00	6.25	11.11	8.33	8.33	10.00	8.33	6.67	7.69	8.78
18.0	T_1	0.18	0.28	0.12	0.10	0.14	0.20	0.20	0.22	0.18	0.16	0.14	0.24	0.34	0.32	0.14	0.20
	f_1	5.56	3.57	8.33	10.00	7.14	5.00	5.00	4.55	5.56	6.25	7.14	4.17	2.94	3.13	7.14	5.70
	n	1	2	1	1	1	2	2	3	2	1	1	2	2	3	1	1.67
	T_2	0.18	0.14	0.12	0.10	0.14	0.10	0.10	0.07	0.09	0.16	0.14	0.12	0.17	0.11	0.14	0.13
	f_2	5.56	7.14	8.33	10.00	7.14	10.00	10.00	14.29	11.11	6.25	7.14	8.33	5.88	9.09	7.14	8.49

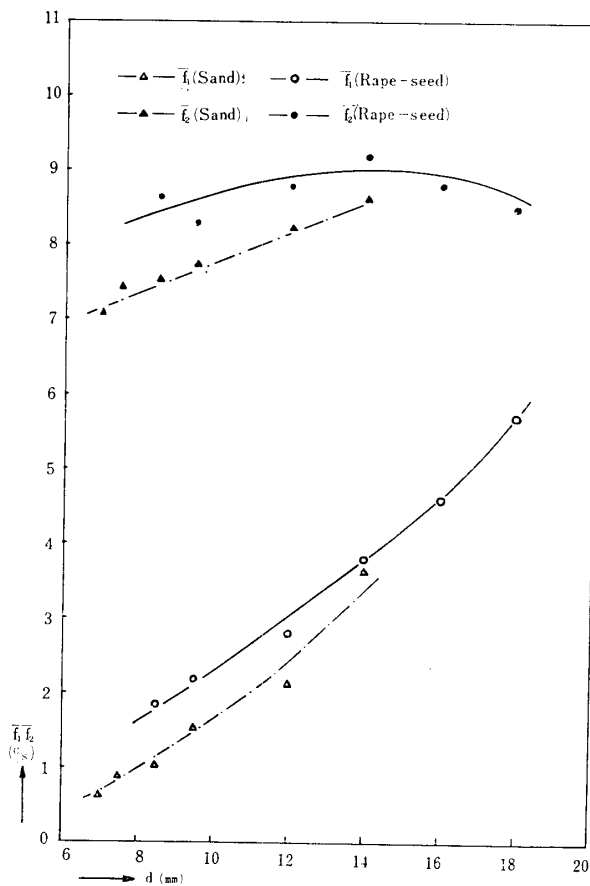


Fig.6 Existence of the two kind of collapsing frequencies f_1 and f_2

5. 実験波形とその解釈 (II)

—— コレログラム (Correlogram) ——

一般的に粉や粒の集団が全体として示す各種の動力学的な性質 (Bulk property) に対しては因果論的または決定論的なモデル、乃至は、記述の方法では述べつくせない現象が多いように思われる。われわれの対象である流出量の変動の現象に対しても Fig. 4 (a) ~ (f), 及び Fig. 5 (a) ~ (f) に見られる観測された包絡波形には、なお、かなりのばらつきが見受けられる。本節では、このような見方から流出量の変動現象を一つの定常不規則過程と見なして、データーの処理を行なうことにする。

具体的には、Fig. 4, Fig. 5 よりこれらの波形の特徴を表わす典型的な波形として Fig. 7. (砂) 及び Fig. 8. (なたね) を抽出し、データーの処理については、Fig. 8. の4つの D (8.5, 9.5, 12.0及び14.0mm ϕ) について、夫々、自己相関係数を計算し、不規則定常過程と考えられるものの中から、周期成分を引き出すことを試みている。

5.1 自己相関係数の一般的性質

ある不規則信号を表わす時間関数 $x(t)$ があつた時に、これから、次式によって新しい関数 $x_\tau(t)$ を定義する。

$$x_\tau(t) = x(t + \tau) \quad (5.1)$$

すべての $x(t)$ について、上記の操作を行った時、その結果得られた $x_\tau(t)$ は一つの集合、すなわち、確率過程を形成するが、この新しい集合がもとの信号の集合に関するすべての確率が上記操作によって変化しない時、これらの確率過程は定常であると言ひ、 $x(t)$ を、不規則定常信号 (Irregular stationary signal) という。換言すれば、不規則定常信号とは、時間軸の移動に対しても、その信号の確率的な性質が変らないことを意味している。このような性質をもとにして、 $x(t)$ と時間差で τ だけ異なる時間での関数値 $x(t + \tau)$ との関連の度合を次式を用いて求め、これを自己相関関数と呼んでいる。

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T x(t), x(t + \tau) dt \quad (5.2)$$

代表的ないくつかの時間関数に対する、 $R(\tau)$ の例が、附録の Fig. A-1 ~ Fig. A-8 に示されている。

$R(\tau)$ の主要な性質の2, 3を述べると

i) $x(t)$ の平均値 $\bar{x} = 0$ であると $\tau \rightarrow \infty$ では相関は殆んど無くなると考えられるので

$$R(\infty) = 0 \quad (5.3)$$

となる。

ii) 定義より

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \{x(t)\}^2 dt = \sigma_x^2 \quad (5.4)$$

となり、原点での、自己相関関数の値は変動の分散に等しくなる。

$$\begin{aligned} \text{iii) また、} \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T [x(t) - x(t + \tau)]^2 dt \\ = (R(0) - 2R(\tau) + R(0)) \\ = 2\{R(0) - R(\tau)\} \geq 0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$R(0) \geq R(\tau) \quad (5.5)$$

なる性質が成立する。すなわち、自己相関関数は $\tau = 0$ で最大値を取る。

iv) $x(t)$ の平均値が零でないとき、すなわち、データーに Centering が施されていないときには

$$\overline{x(t)} \neq 0 \quad x(t) = \bar{x} + \xi(t)$$

とおけば、 $\xi(t)$ は平均値からのばらつきであるから

$$\overline{\xi(t)} = 0 \text{ となる。}$$

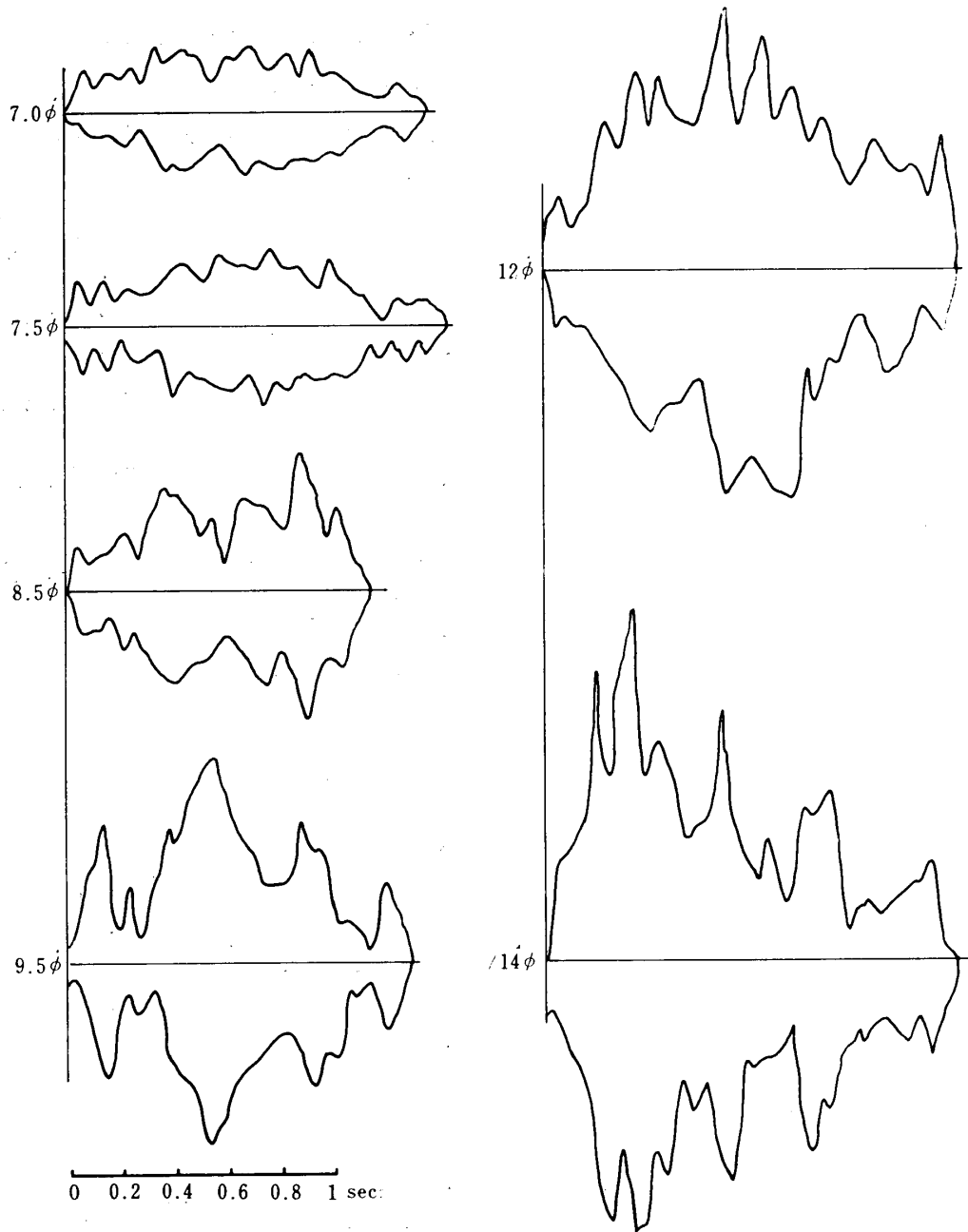


Fig.7 Representative wave shape of irregular vibration of sand

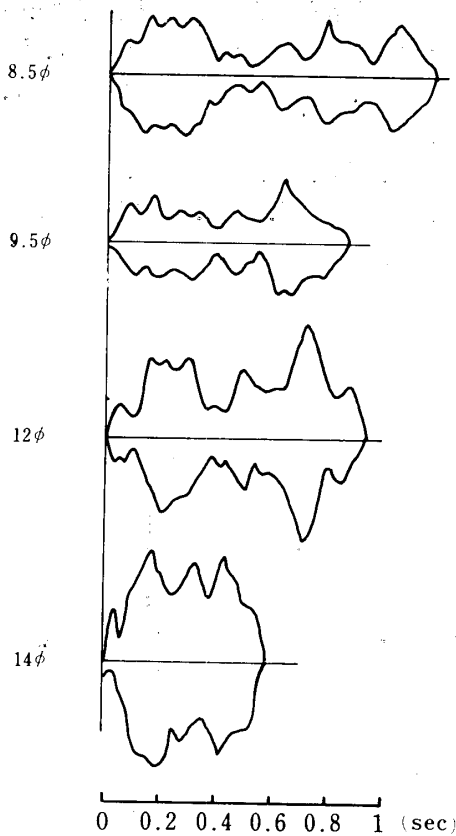


Fig.8 Representative wave shape of irregular vibration of rape-seed

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \{\bar{x} + \xi(t)\} \times \{\bar{x} + \xi(t+\tau)\} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \left[\bar{x}^2 + \bar{x}\{\xi(t) + \xi(t+\tau)\} \right. \\
 &\quad \left. + \xi(t)\xi(t+\tau) \right] dt \\
 &= \bar{x}^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt \\
 &= \bar{x}^2 + R_\xi(\tau) \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

となり、 $R_x(\tau)$ と $R_\xi(\tau)$ とは \bar{x}^2 だけ異なる。

v) 時系列の定常性から

$$R(\tau) = R(-\tau) \tag{5.7}$$

となる。すなわち、自己相関関数は、 τ について偶関数である。

vi) 孤立波形の自己相関関数の定義については当然 \lim 演算は不要で単に

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t+\tau) dt \tag{5.8} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt &\leq M \text{ (有限値)}
 \end{aligned}$$

とすれば良い。

vii) また、周期波形の場合についても、 \lim 演算は不要で、 $R(\tau)$ の形は周期を T とすれば

$$R(\tau) = 1/T \int_0^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt \tag{5.9}$$

となる。例として、 $x(t)$ を複素フーリエ級数に展開した場合を考えると

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{in\omega t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)| e^{i(n\omega t + \theta_n)}
 \end{aligned}$$

となるので、これを (5.9) 式に代入すれば

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{in\omega(t+\tau)} \right] dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{in\omega\tau} \cdot 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{in\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{in\omega\tau} F(n) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^2 e^{in\omega\tau} \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\tau = 0$ とすると

$$R(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^2 \tag{5.11}$$

が得られる。式 (5.10) から云えることは2つの周期波形の位相が異っていても (5.10) 式中には、位相に関するパラメーター θ_n が入らないので、振幅さえ同じならば、上記の2つの波形の $R(\tau)$ はじになることである。また、式 (5.10) を逆変換すると

$$|F(n)|^2 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} R(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau \tag{5.12}$$

が得られる。 $|F(n)|^2$ は不規則信号のパワー、スペクトルに相当する量である。また、(5.10) 式の

$F(n)$ を、 $x(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ ($\omega = 2\pi/T$) なる表示との対応をつけると、

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^2 e^{in\omega\tau} \\
 &= 1/4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n^2) e^{in\omega\tau} \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

$$(\because |F(n)| = 1/2\sqrt{a_n^2 + b_n^2})$$

となるので、 $R(\tau)$ が偶関数という条件を用いれば $e^{in\omega\tau} \rightarrow \cos n\omega\tau$ となり

$$R(\tau) = a_0^2/4 + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n\omega\tau \tag{5.14}$$

が得られる。 $\tau = 0$ とすると

$$R(0) = a_0^2/4 + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{5.15}$$

となる

5・2 自己相関係数の計算法

ここで具体的に自己相関関数を求めるためには、標本波形よりNケの等間隔のデータをサンプルし、次式で定義される量を計算すれば良い。

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i x_{i+k} - \bar{x}) / s^2 \quad (5 \cdot 10)$$

この r_k は系列相関係数または自己相関係数と呼ばれている。デジタル化されたデータのケ数 N と前記の τ に相当する量 k との間には $N \gg k$ であれば良いとされているが、具体的には $k=N/5$ 程度までが許されているようである。今 $m, \sigma^2, R(\tau)$ などを母集団の平均値、分散、自己関数とするとサンプルされた時系列

Table 4 Calculation of autocorrelation coefficients (r_k)

i ↓	k →		0	1	2	3	4'
	x_i'	x_i	x_i^2	$x_i x_{i+1}$	$x_i x_{i+2}$	$x_i x_{i+3}$	$x_i x_{i+4}'$
1	x_1'	x_1	x_1^2	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_1 x_4$	$x_1 x_5'$
2	x_2'	x_2	x_2^2	$x_2 x_3$	$x_2 x_4$	$x_2 x_5$	$x_2 x_6'$
3	x_3'	x_3	x_3^2	$x_3 x_4$	$x_3 x_5$	$x_3 x_6$	$x_3 x_7'$
4	x_4'	x_4	x_4^2	⋮	⋮	⋮	⋮
5	x_5'	x_5	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N-1	x_{N-1}'	x_{N-1}	x_{N-1}^2	$x_{N-1} x_N$	—	—	—
N	x_N'	x_N	x_N^2	—	—	—	—
Sum	—	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i x_{i+1}$	$\sum x_i x_{i+2}$	$\sum x_i x_{i+3}$	$\sum x_i x_{i+4}'$
Average	—	\bar{x}	$\frac{\sum x_i^2}{N}$	$\frac{\sum x_i x_{i+1}}{N-1}$	$\frac{\sum x_i x_{i+2}}{N-2}$	$\frac{\sum x_i x_{i+3}}{N-3}$	—
$-\bar{x}^2$	—	\bar{x}^2	S^2	$\frac{1}{N-k} \sum x_i x_{i+k} - \bar{x}^2$			—
$-S^2$	—	—	—	r_1	r_2	r_3	—

Table 5 Sampled values (x_i) and calculated autocorrelation coefficients (r_k). (stationary flow, rape-seed). (a) $D=8.5\text{mm}$, (b) $D=9.0\text{mm}$, (c) $D=12.0\text{mm}$, (d) $D=14.0\text{mm}$,

Table 5 (a)

N	x_i	N	x_i	N	x_i
1	1.5	31	2.5	61	9.5
2	3.5	32	4.0	62	5.5
3	5.5	33	5.0	63	4.0
4	7.0	34	3.5	64	9.0
5	9.0	35	2.5	65	3.0
6	9.0	36	3.0	66	0.5
7	8.5	37	9.5	67	1.0
8	9.5	38	10.5	68	2.0
9	8.5	39	5.0	69	4.5
10	5.0	40	2.0	70	4.0
11	4.0	41	3.5	71	2.0
12	3.0	42	1.5	72	2.0
13	2.0	43	2.0	73	2.0
14	2.0	44	1.5	74	2.0
15	4.0	45	4.0	75	2.5
16	5.5	46	6.5	76	4.0
17	5.5	47	7.0	77	2.0
18	3.0	48	3.5		
19	4.0	49	0		
20	9.0	50	5.5		
21	7.0	51	5.5		
22	5.0	52	5.0		
23	5.0	53	4.5		
24	1.5	54	2.5		
25	3.5	55	3.0		
26	8.0	56	4.5		
27	9.5	57	5.5		
28	5.5	58	4.0		
29	3.0	59	2.5		
30	0.5	60	7.5		

Table 5 (b)

N	x_i	N	x_i	N	x_i	k	r_k
1	36.0	31	18.0	51	33.0	1	0.59
2	24.5	32	13.0	62	36.5	2	0.10
3	25.0	33	19.5	63	40.6	3	0.01
4	26.0	34	8.0	64	31.8	4	0.04
5	15.0	35	12.9	65	32.0	5	0.03
6	23.0	36	15.8	66	33.9	6	-0.03
7	16.5	37	18.2	67	28.7	7	-0.16
8	23.5	38	20.0	68	22.5	8	-0.22
9	12.2	39	12.4	69	21.2	9	-0.12
10	22.0	40	16.7	70	26.0	10	0.01
11	23.4	41	13.9	71	19.0		
12	29.4	42	12.0	72	22.5		
13	32.9	43	11.0	73	19.5		
14	33.6	44	12.5	74	17.6		
15	29.4	45	19.6	75	19.5		
16	22.0	46	18.5	76	24.7		
17	14.8	47	13.9	77	23.0		
18	18.5	48	12.6	78	26.0		
19	21.0	49	18.8	79	30.5		
20	16.5	50	18.4	80	28.5		
21	16.5	51	16.3	81	22.2		
22	11.7	52	19.9	82	21.0		
23	12.3	53	15.0	83	18.4		
24	18.5	54	21.7	84	16.6		
25	16.5	55	25.5	85	18.3		
26	15.0	56	20.0	86	14.0		
27	10.0	57	26.0	87	22.3		
28	7.4	58	23.0	88	27.0		
29	10.0	59	26.5	89	32.0		
30	11.0	60	28.0	90	38.0		

Table 5 (c)

<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>k</i>	<i>r_k</i>
1	4.0	31	7.5	61	11.0	1	0.56
2	8.0	32	19.0	62	9.0	2	0.22
3	5.5	33	23.5	63	7.5	3	0
4	2.0	34	20.0	64	8.5	4	0.02
5	9.0	35	14.0	65	14.0	5	0.09
6	4.0	36	7.5	66	19.5	9	0.17
7	10.0	37	11.0	67	16.0	7	0.17
8	9.0	38	16.5	68	10.0	8	0.34
9	7.5	39	11.0	69	7.0	9	0.34
10	8.5	40	3.5	70	9.0	10	0.27
11	7.5	41	6.0	71	3.0		
12	1.5	42	7.0	72	6.0		
13	8.0	43	8.5	73	16.0		
14	12.5	44	8.5	74	18.0		
15	12.5	45	5.5	75	14.0		
16	12.0	46	6.0	76	6.0		
17	13.5	47	7.0	77	5.5		
18	8.5	48	10.5	78	2.0		
19	7.0	49	3.0	79	3.0		
20	3.0	50	6.0	80	2.0		
21	7.0	51	3.5				
22	17.0	52	13.0				
23	10.0	53	14.0				
24	16.0	54	13.5				
25	11.0	55	11.5				
26	11.5	56	15.5				
27	10.0	57	6.5				
28	5.0	58	5.0				
29	7.0	59	5.0				
30	6.0	60	10.0				

Table 5 (d)

<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>k</i>	<i>r_k</i>
1	4.0	31	25.0	61	12.0	1	0.65
2	8.0	32	17.0	62	22.0	2	0.31
3	6.0	33	23.0	63	17.0	3	0.11
4	9.5	34	16.5	64	4.0	4	0.02
5	10.5	35	10.0	65	10.0	5	0.02
6	16.5	36	4.0	66	11.5	6	0.10
7	26.5	37	10.0	67	12.5	7	0.30
8	27.5	38	15.0	68	6.0	8	0.39
9	23.0	39	12.0	69	10.0	9	0.31
10	11.0	40	20.0	70	10.0	10	0.12
11	6.0	41	18.5			11	0.04
12	6.0	42	18.0			12	-0.02
13	19.5	43	8.5				
14	18.5	44	8.0				
15	20.5	45	14.0				
16	30.0	46	11.5				
17	23.4	47	4.0				
18	22.0	48	6.0				
19	15.5	49	7.5				
20	13.0	50	6.5				
21	12.0	51	9.5				
22	6.5	52	9.5				
23	12.0	53	5.0				
24	19.0	54	14.0				
25	20.0	55	11.0				
26	10.0	56	11.0				
27	7.0	57	17.5				
28	7.5	58	17.0				
29	13.0	59	13.0				
30	15.0	60	13.5				

Table 6 Sampled values(*x_i*) and calculated autocorrelation coefficients. (*D*=9.5mmφ non-stationary flow, rape-seed).

<i>N</i>	<i>x</i>	<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>N</i>	<i>x_i</i>	<i>k</i>	<i>r_k</i>
1	25.2	31	24.9	61	26.2	1	0.74
2	27.2	32	32.8	62	21.8	2	0.41
3	37.0	33	35.8	63	27.4	3	0.04
4	35.0	34	28.0	64	19.0	4	-0.18
5	30.8	35	19.3	65	19.7	5	-0.28
6	23.6	36	16.5	66	18.5	6	-0.23
7	19.6	37	15.0	67	19.2	7	-0.15
8	19.0	38	13.0	68	25.5	8	-0.09
9	19.8	39	17.5	69	28.5	9	-0.01
10	25.5	40	16.0	70	24.0	10	0.04
11	25.3	41	12.0	71	16.0	11	0.03
12	20.0	42	18.5	72	15.0	12	0.16
13	16.0	43	14.7	73	29.0	13	0.22
14	17.5	44	14.0	74	36.2	14	0.21
15	16.5	45	20.3	75	31.5	15	0.14
16	16.0	46	30.0	76	36.2	16	0.08
17	15.0	47	27.0	77	29.0	17	-0.02
18	14.8	48	20.0	78	17.8	18	-0.15
19	21.0	49	22.4	79	12.5	19	-0.21
20	24.4	50	18.0	80	10.4	20	-0.26
21	24.0	51	16.3	81	10.5		
22	21.0	52	21.0	82	14.0		
23	27.5	53	19.3	83	13.9		
24	22.5	54	15.3	84	14.5		
25	19.0	55	13.0	85	17.5		
26	17.9	56	13.8	86	16.0		
27	15.3	57	19.8	87	11.5		
28	12.2	58	26.7	88	19.0		
29	14.2	59	32.0	89	9.0		
30	16.4	60	26.5	90	11.5		

の対応する量 \bar{x} , S^2 , r_k との間にはエルゴード性によって次式が成立する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = m \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S^2 = \sigma^2$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r_k = R(\tau)$$

(5・17)

具体的に r_1, r_2, r_3, \dots などを計算するにはTable 4 によるのが便利である。この表では検算が自動的に行なわれるようになっている。なたねに対するサンプル値と r_k の値が夫々 Table 5 (a) (b) (c) (d) に示されている。この表中のサンプル値のケ数 N は前記の Fig. 8 で示した代表的な Cluster を 3~5 ケ程度含んでいる。また各 D に対する $r_k \leftrightarrow k$ のグラフ (コレログラム) が Fig. 9 (a)~(d) である。

結果のコレログラムはかなり複雑で、潜在している周期成分は 2 つ以上考えられる。コレログラム中に周期が 2 つ以上含まれている場合には、これらを分離するのに一般にペリオドグラム (Periodgram) なるものを計算し、2 つないしそれ以上の周期成分を分離することが行なわれている。次節では、Fig. 9 (a)~(d) よりペリオドグラム (連続変数の場合のスペクトル密度に当る) を計算し、周期成分の分離を試みる。

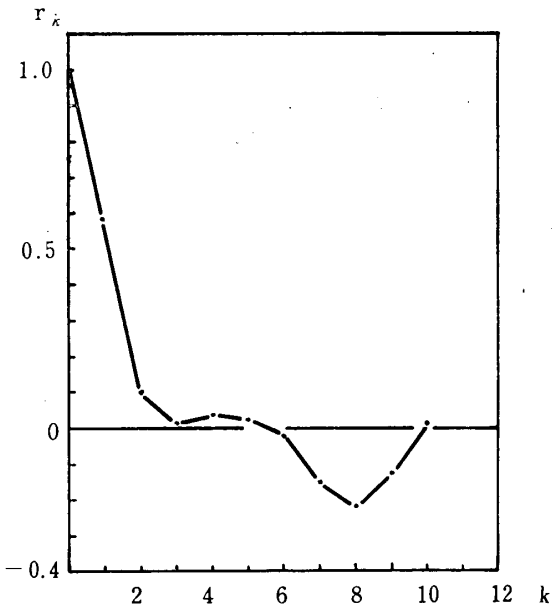


Fig.9a Correlogram of rape-seed, $D=8.5\text{mm}\phi$

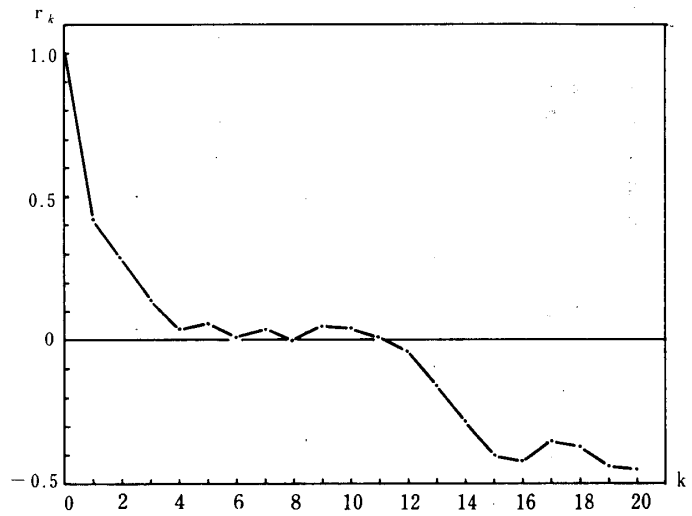


Fig.9b Correlogram of rape-seed, $D=9.5\text{mm}\phi$

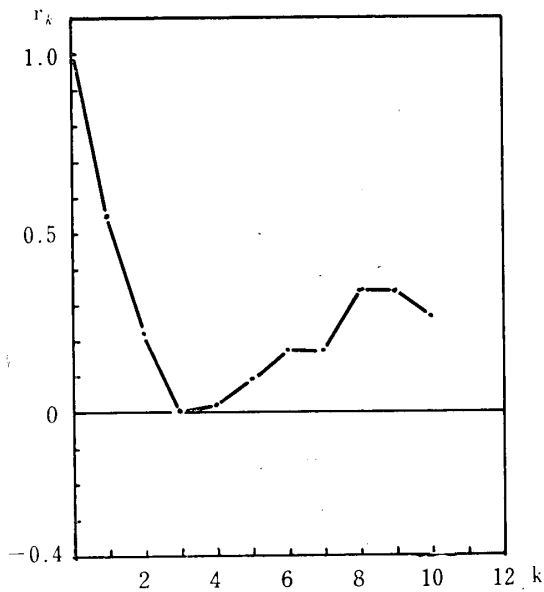


Fig.9c Correlogram of rape-seed, $D=12.0\text{mm}\phi$

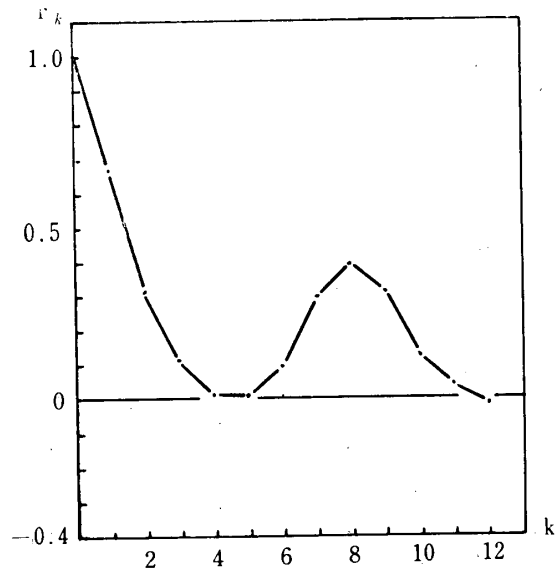


Fig.9d Correlogram of rape-seed, $D=14.0\text{mm}\phi$

6. 実験結果の解釈 III

—ペリオドグラム (調和常数) の作製—

前節で示された自己相関関数 $R(\tau)$ と、本節で扱うスペクトル密度 $v(\lambda)$ とは、変動現象 (Fluctuation phenomena) を定量的に表示するのに極めて重要である。系列相関係数 r_k とペリオドグラム $w(\lambda)$ の関係を求める前に $R(\tau)$, $v(\lambda)$ 及び重み関数 $g(t)$ なる量との間の関係について二、三記述する。いま $e(t)$ を入力信号, $f(t)$ を出力信号とすれば、系が線型性及び定常性を持つ場合には、 $e(t)$ と $f(t)$ とは次式で関係づけ

られる。

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t')e(t')dt' \quad (6 \cdot 1)$$

ここで、 $g(t)$ は重み関数 (Weighting function) と呼ばれるもので、これはその系にインパルス入力 $\delta(t)$ を与えた時の応答 (インパルス応答 = Impulse response) でもある。ここで $g(t)$ は系の特性を表わすものであり、そのフーリエ変換を $G(\omega)$ と書くと $g(t)$ と $G(\omega)$ とは

$$\begin{aligned} G(\omega) &= |G(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6 \cdot 2) \end{aligned}$$

の関係で結ばれており、この意味で $G(\omega)$ はシステム関数または周波数レスポンス関数と呼ばれている。

また (6・1) によれば出力信号 $f(t)$ とインパルス応答 $g(t)$ とのたたみ込み積分 (Convolution integral) でもあるのでこれは周波数領域では

$$F[g(t) * e(t)] = G(\omega) \cdot E(\omega) = F(\omega) \quad (6 \cdot 3)$$

のように夫々の Fourier 変換の積で与えられる。いま (6・1) 中の入力 $e(t)$ が $e^{i\omega t}$ の形のものであったとすると式 $\int_{-\infty}^t g(t-t')e^{i\omega t'} dt'$ で $t-t'=\tau$ と置きかえると (6・1) 式は

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^t g(t-t')e^{i\omega t'} dt' \\ &= \int_0^{\infty} g(\tau)e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{i\omega t} \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= G(\omega) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6 \cdot 4)$$

となる。ここで $G(\omega)$ は

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \quad (6 \cdot 5)$$

で表わされる。(6・5) 式から $g(\tau)$ を求めれば

$$g(\tau) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6 \cdot 6)$$

で与えられる。上式で左辺の $g(\tau)$ は実数であるが、右辺の $G(\omega)$ は一般に複素数である。

次に自己相関関数 $R(\tau)$ とスペクトル密度との関係であるが、定義により

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)x_T(t+\tau) dt \end{aligned}$$

である。いま $R_T(\tau)$ の Fourier 変換を考えると

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1/T \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t+\tau) dt \right\} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 1/T \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t+\tau)e^{i\omega t} e^{-i\omega(t+\tau)} dt \right\} d\tau \\ &= 1/T \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)e^{-i\omega(t+\tau)} d(t+\tau) \\ &= 1/TF(if) \cdot F(if) \\ &= 1/T |F(if)|^2 \end{aligned} \quad (6 \cdot 7)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T |F(if)|^2 \end{aligned} \quad (6 \cdot 8)$$

と書ける。一方 Parseval の定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 2/T \int_0^{\infty} |F_T(if)|^2 df \quad (6 \cdot 9)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \{2/T |F_T(if)|^2\} df \\ &= \int_0^{\infty} S(f) df \end{aligned} \quad (6 \cdot 10)$$

と書けるので、この $S(f)$ はスペクトル密度を示すものである。

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \{2/T |F_T(if)|^2\} \quad (6 \cdot 11)$$

(6・7) 式と (6・11) 式を用いれば、スペクトル密度と自己相関関数との関係は次式で与えられる。

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (6 \cdot 12)$$

また (6・12) を逆変換すれば

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/2 S(f)e^{i\omega\tau} df \quad (6 \cdot 13)$$

となる。さらに $R(\tau)$ 及び $S(f)$ が偶関数であることを使えば (6・12), (6・13) は次式のように書き直すことができる。

$$S(f) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (6 \cdot 14)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cos \omega\tau df \quad (6 \cdot 15)$$

〔注〕：代表的な関数の Fourier 変換は附録の Fig. A—9~20 (パルス波形), Fig. A—21~30 (特異関数) 及び Fig. A—31~33 (周期波形) に示されている。

次にデジタル化された時系列に対するスペクトル密度は、ペリオドグラムと呼ばれ以下のようにして求められる。今定常確率過程 $\{X_t\}$ の実現値 $(x_1 \dots x_N)$ が与えられた時

$$\left. \begin{aligned} a(\omega) &= 2/N \sum_{t=1}^N x_t \cos \omega t \\ b(\omega) &= 2/N \sum_{t=1}^N x_t \sin \omega t \\ c(\omega) &= N/4 \{a^2(\omega) + b^2(\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 16)$$

とおけば、この $[a(\omega), c(\omega)]$ の軌跡はペリオドグラムと呼ばれている。(6・16) 式を用いて $c(\omega)$ の期待値を求めると、

$$\begin{aligned} E\{c(\omega)\} &= 1/N E\left\{ \left(\sum_{t=1}^N X_t \cos \omega t \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{t=1}^N X_t \sin \omega t \right)^2 \right\} \\ &= 1/N E\left\{ \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N X_t X_u (\cos \omega t \cos \omega u + \right. \\ &\quad \left. \sin \omega t \sin \omega u) \right\} \\ &= \sigma^2 / N \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_{t-u} \cos\{\omega(t-u)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma^2 / N \sum_{k=-N+1}^{N-1} (N - |k|) r_k \cos k\omega \\
 &= \sigma^2 / N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=-m}^m r_k \cos k\omega \quad (6 \cdot 17)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで極限移行を行い $N \rightarrow \infty$ とした時

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{c(\omega)\}$$

を、 ω の代わりに λ を用い、さらに σ^2 で割ったものを $\omega(\lambda)$ と書けば

$$\begin{aligned}
 \omega(\lambda) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \cos k\lambda \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} r_k \cos k\lambda \quad (6 \cdot 18)
 \end{aligned}$$

を得る。(6・18)式を用いてFig. 9(a)~(d)に対応するペリオドグラムの表示が、Fig. 11(a)~(d)に示されている。これらの図のうちFig. 11(a), (c)及び(d)については、サンプリングの間隔は0.04秒(最小変動の半周期)及び、Fig. 11(b)については0.2秒(最小変動の半周期)となっているので夫々対応する周波数は、

$$f = 1/2 \times 0.04 = 12.5 \text{ c/s}$$

及び

$$f = 1/2 \times 0.2 = 2.5 \text{ c/s}$$

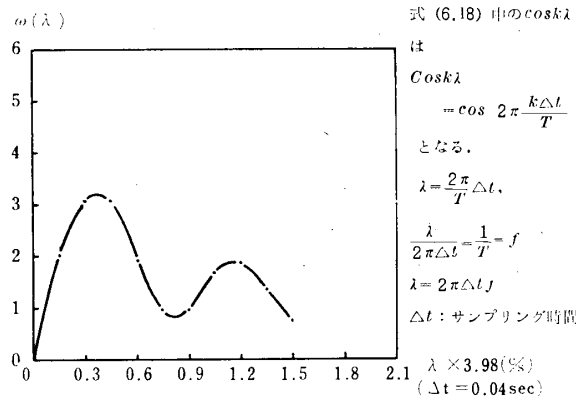


Fig. 11a Periodogram of rape-seed, $D=8.5\text{mm}\phi$

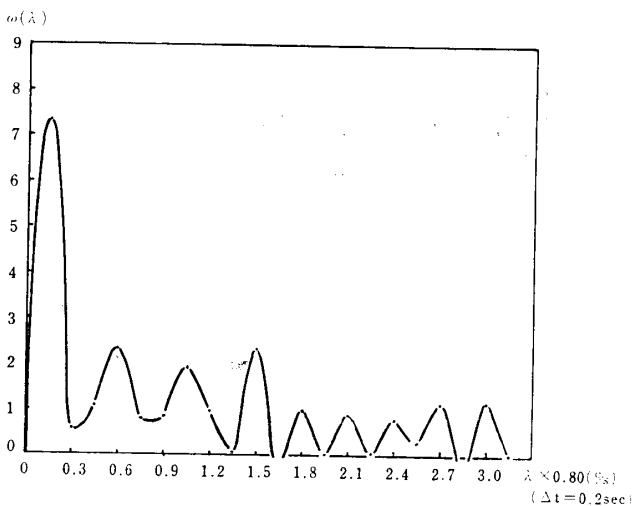


Fig. 11b Periodogram of rape-seed, $D=9.5\text{mm}\phi$

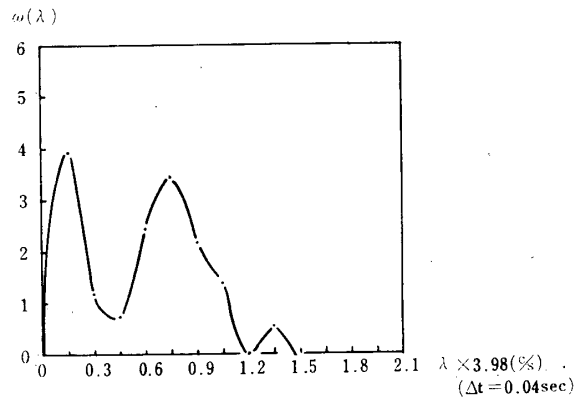


Fig. 11c Periodogram of rape-seed, $D=12.0\text{mm}\phi$

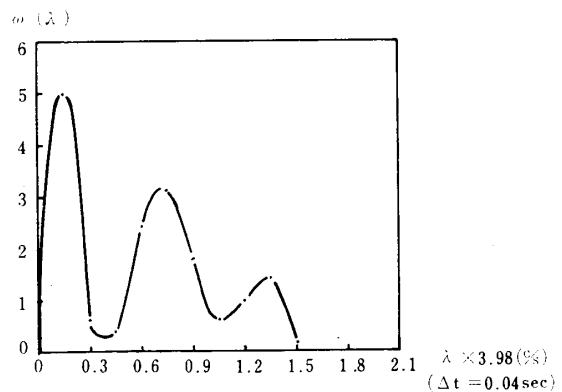


Fig. 11d Periodogram of rape-seed, $D=14.0\text{mm}\phi$

となっている。

Fig. 11(a)~(d)より λ に関する第1及び第2のピークと D の関係は、Fig. 6の f_1, f_2 の傾向と大体において一致している。

[注] なお、ホッパー上部より粒子を補給しない非定常流動の場合のコレログラム及びペリオドグラムがなたねの $D=9.0\text{mm}\phi$ について、それぞれ Fig. 10及Fig. 12に示されている。

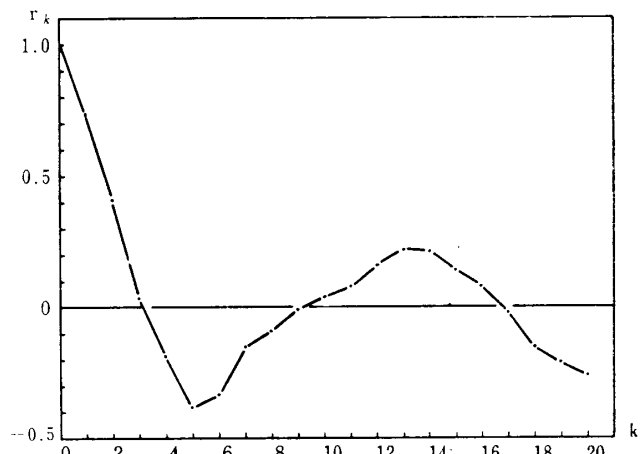


Fig. 10 Correlogram of the non-stationary flow of rape-seed

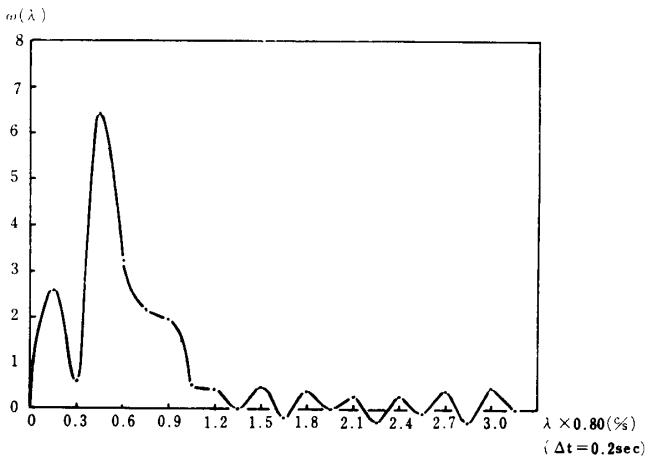


Fig. 12 Periodogram of the non-stationary flow of rapeseed, $D=9.0\text{mm}\phi$

7. 結 言

ホッパーより流出する粉粒体層の瞬時流出量を計測することにより、次の事項が明らかになった。

(i) 瞬時流出量の記録波形の解析から流出量には周期性が存在する。

(ii) 変動の大局的構造として2種類の振動数 f_1 及び f_2 が存在する。

(iii) f_1 の方は流出口径 D の増加と共に急激に増加するが f_2 の方は D によって大きくは変わらない。

(iv) ペリオドグラムによる解析の結果からも上述の性質 (ii) 及び (iii) の結果と定性的に一致することが認められる。

今後の問題としては、コレログラム並びにペリオドグラムの解析の精度を向上するためにサンプリング時間を長くすることが必要と考えられる。また系を外部より強制的に振動させ、強制自励系とした時の瞬時流出量の変動などの研究より最適流出条件を調べるなどが考えられる。尚、本研究に対して京都大学工学部井伊谷鋼一教授、吉岡直哉教授ならびに九州工業大学上滝具貞教授にご指導賜わったことを感謝致します。また本学大学院学生藤原義也氏には計算の一部を受持って頂いたことを感謝致します。

附 録

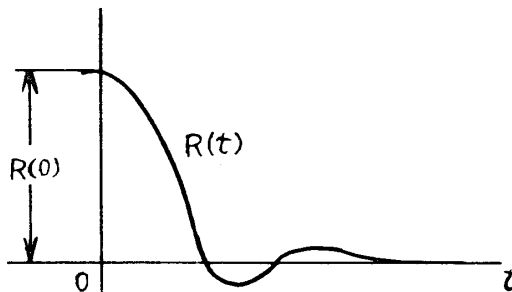


Fig. A-1 General trend of autocorrelation function

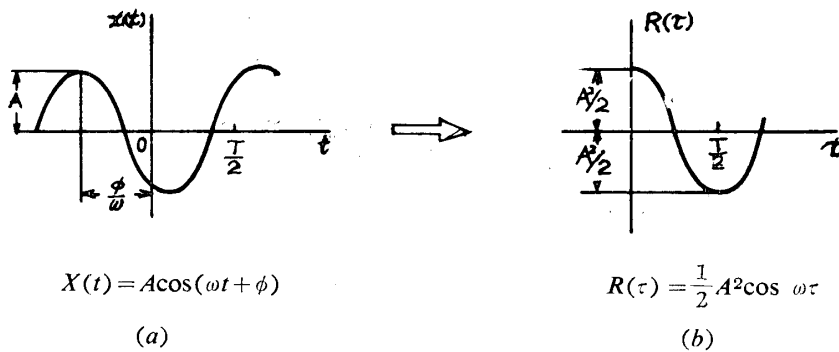


Fig. A-2 Autocorrelation function of sinusoidal wave

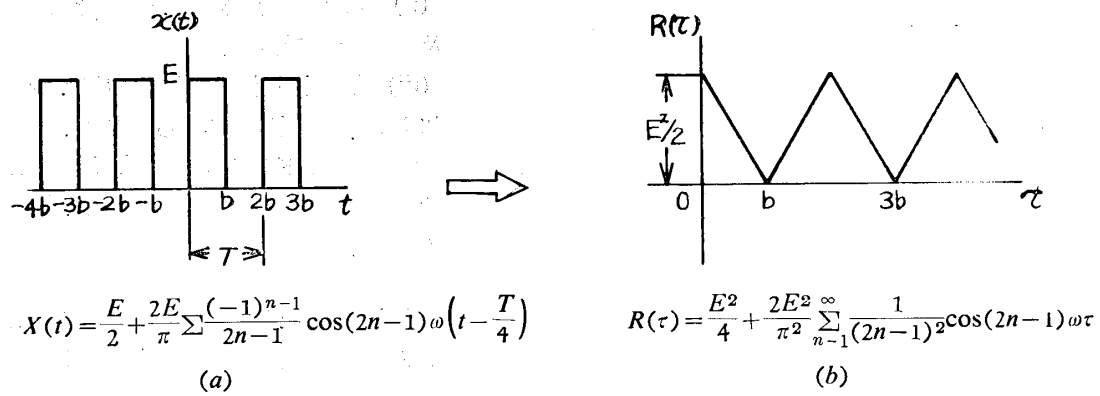


Fig. A-3 Autocorrelation function of periodic square pulse

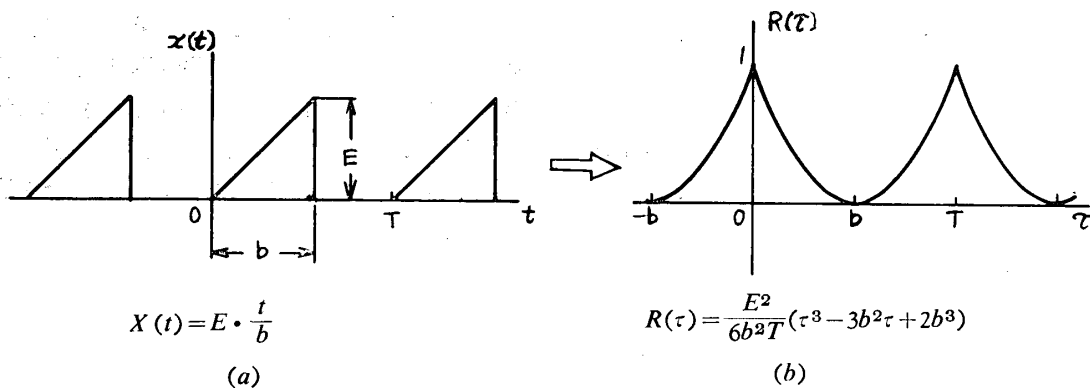


Fig. A-4 Autocorrelation function of periodic saw tooth wave

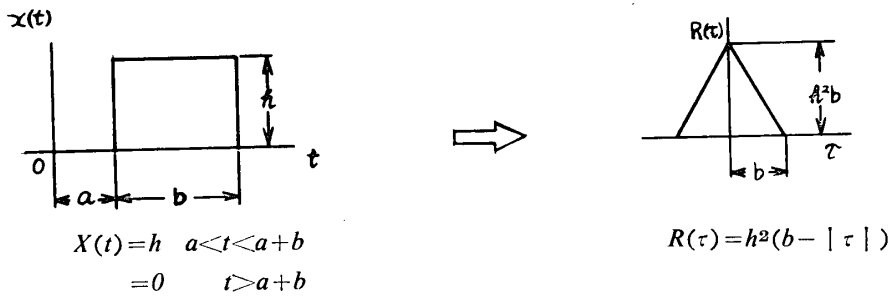


Fig. A-5 Autocorrelation function of the square pulse

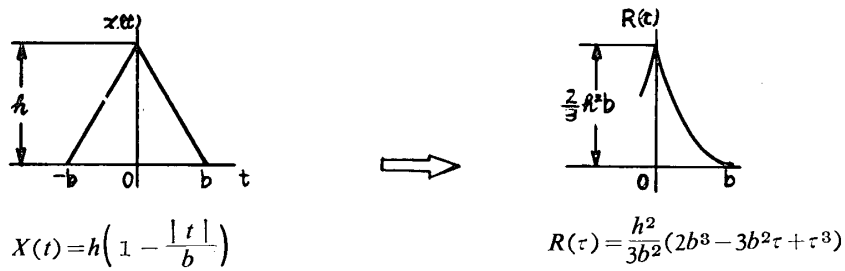


Fig. A-6 Autocorrelation function of the triangular pulse

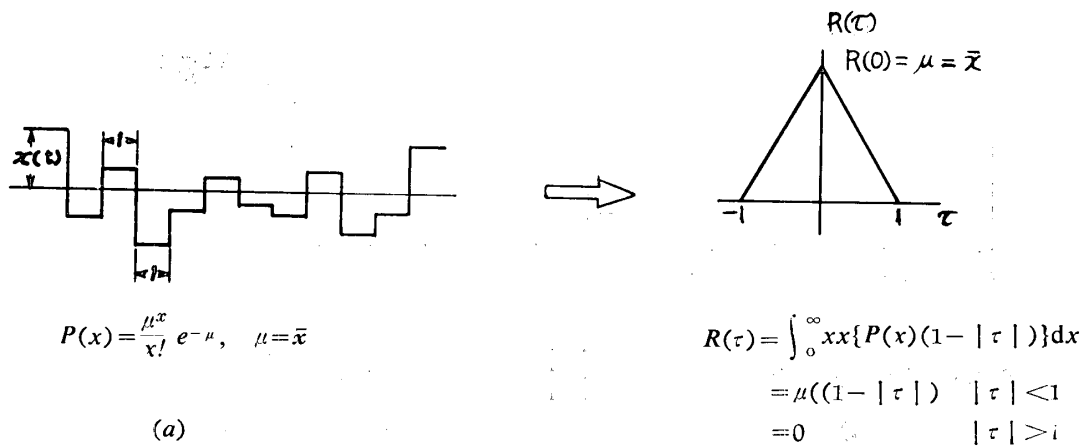


Fig. A-7 Autocorrelation function of the randomstep function

(a) Random function that the pulse height distribution follows with the Poisson process $P(x)$

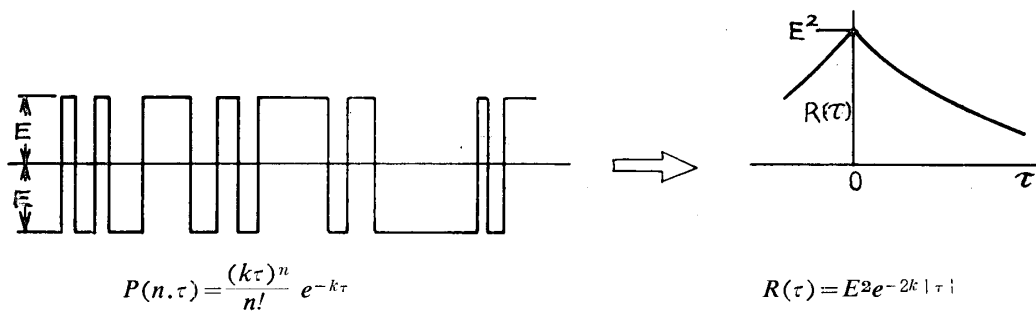


Fig. A-8 Autocorrelation function of the random square pulse

(a) The case that the pulse width distribution follows with Poisson distribution $P(n, \tau)$
 (b) Autocorrelation function of (a)

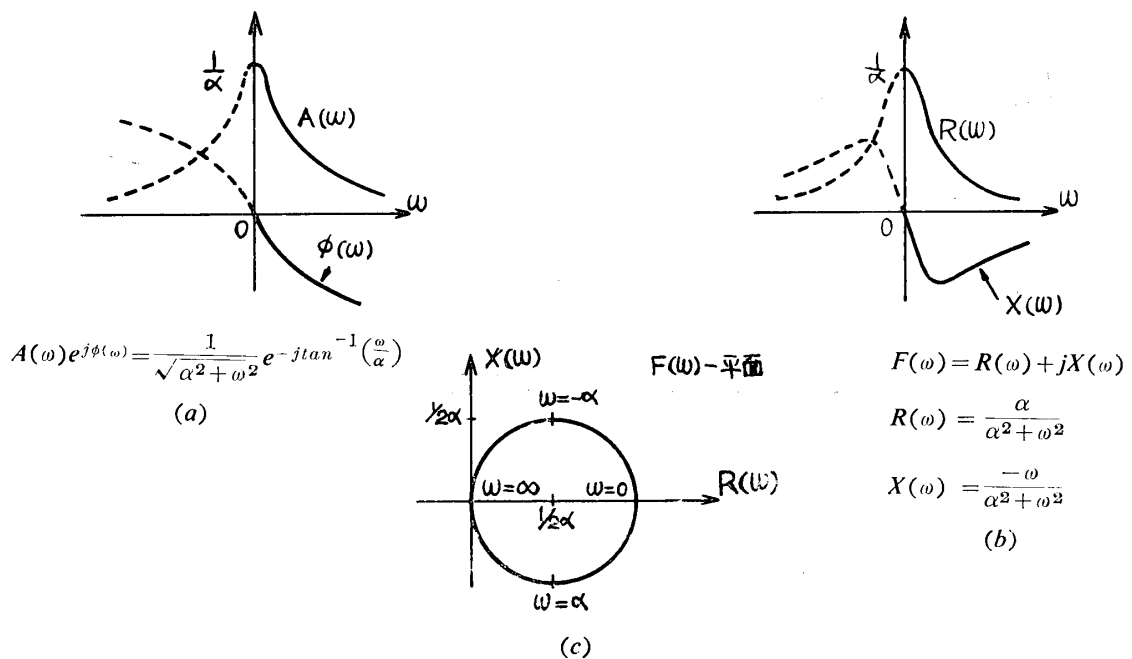
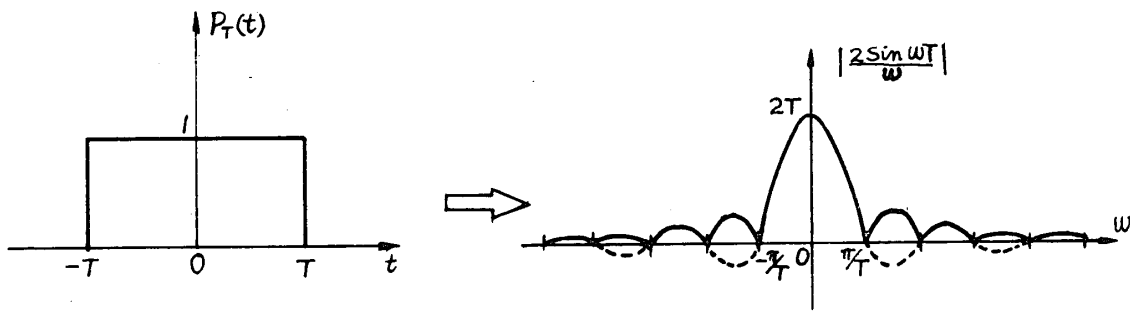


Fig. A-9 Several types of the representation of Fourier transform $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$



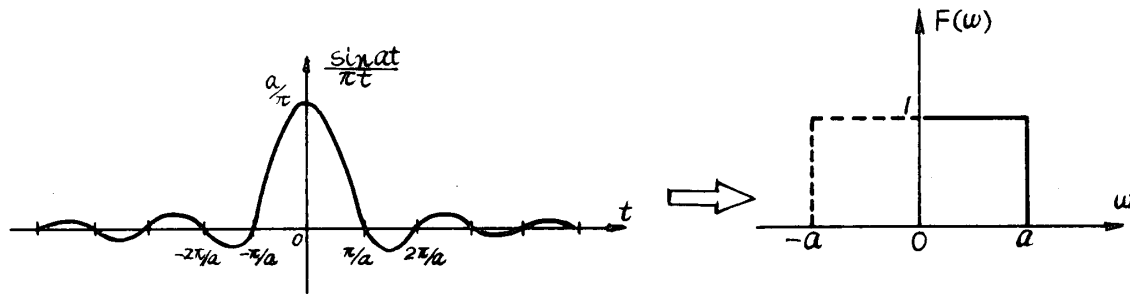
$$P_T(t) = U(t+T) - U(t-T) = \begin{cases} 0 & |t| > T \\ 1 & |t| < T \end{cases}$$

(a)

$$F(\omega) = 2 \frac{\sin \omega T}{\omega}$$

(b)

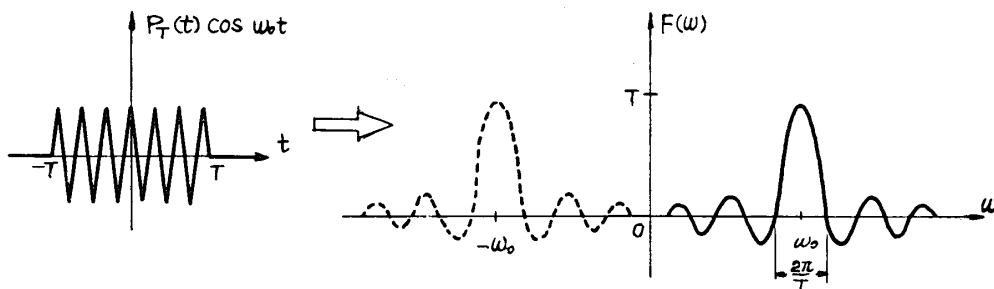
Fig. A-10 Fourier transform of the square pulse



$$f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

$$F(\omega) = P_a(\omega)$$

Fig. A-11 Fourier transform of Fourier kernel $\frac{\sin t}{t}$



$$f(t) = P_T(t) \cos \omega_0 t$$

(a)

$$F(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0}$$

(b)

Fig. A-12 Fourier transform of the pulse modified signal

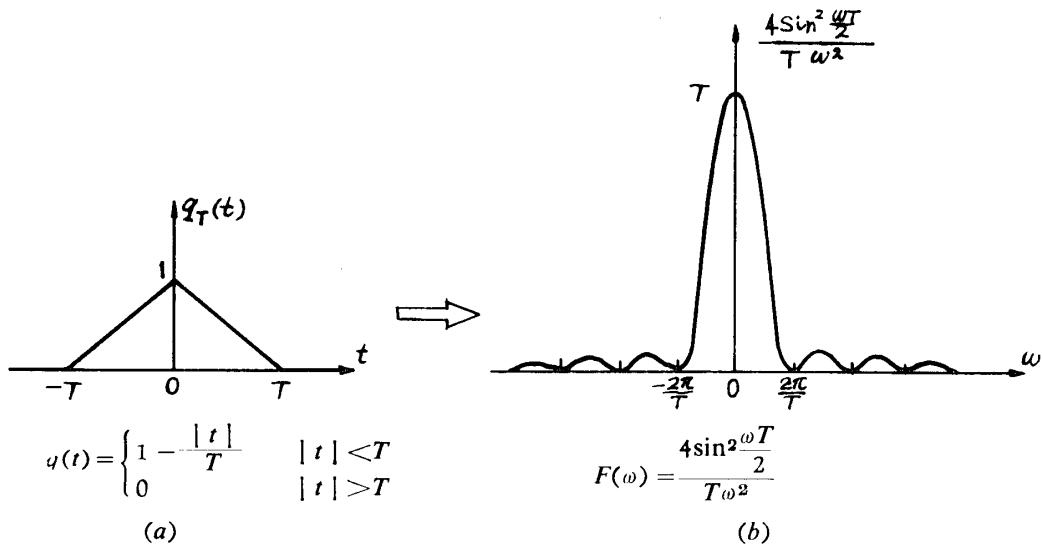


Fig. A-13 Fourier transform of the triangular pulse

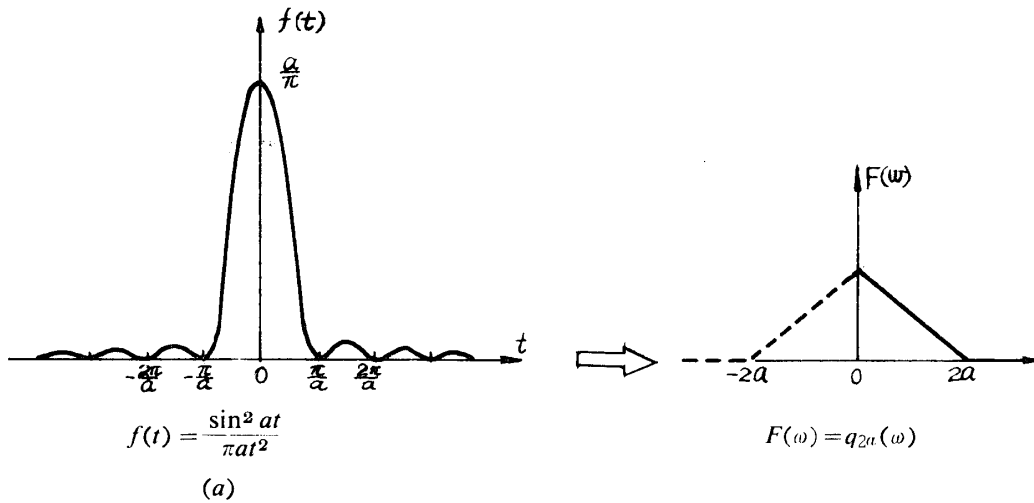


Fig. A-14 Fourier transform of the Fejer kernel $\frac{\sin^2 at}{\pi a t^2}$

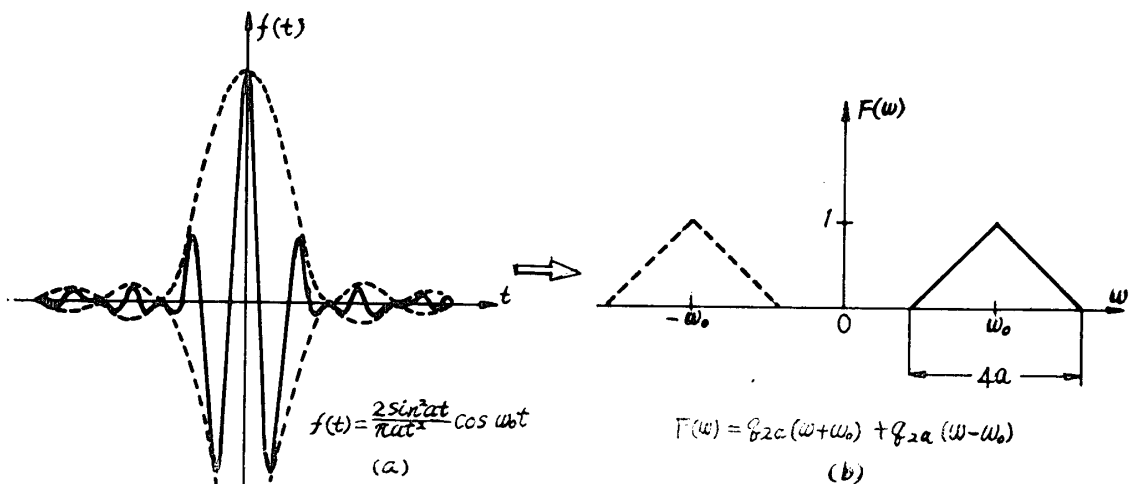


Fig. A-15 Fourier transform of $\cos \omega_0 t$ modified by Fejer kernel

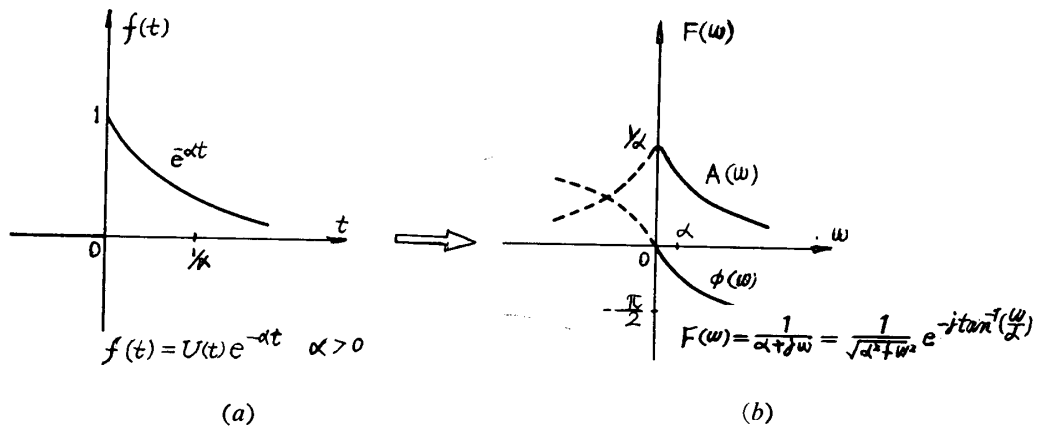


Fig. A-16 Fourier transform of monotonic decreasing function

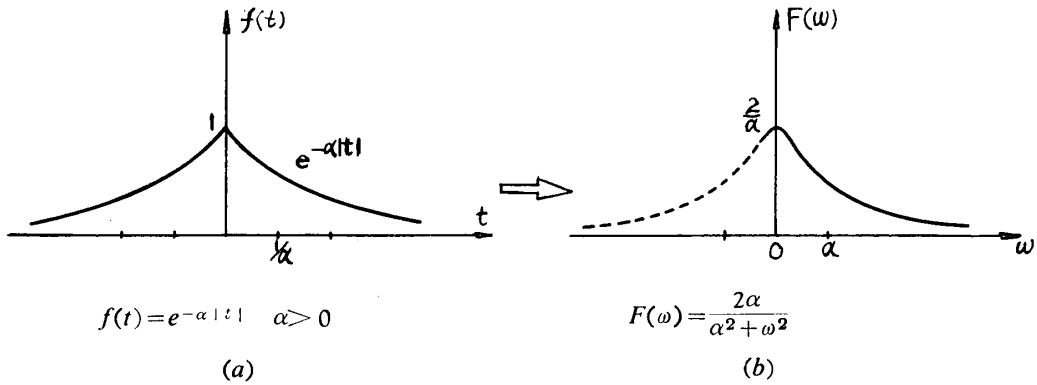


Fig. A-17 Fourier transform of $e^{-\alpha|t|}$

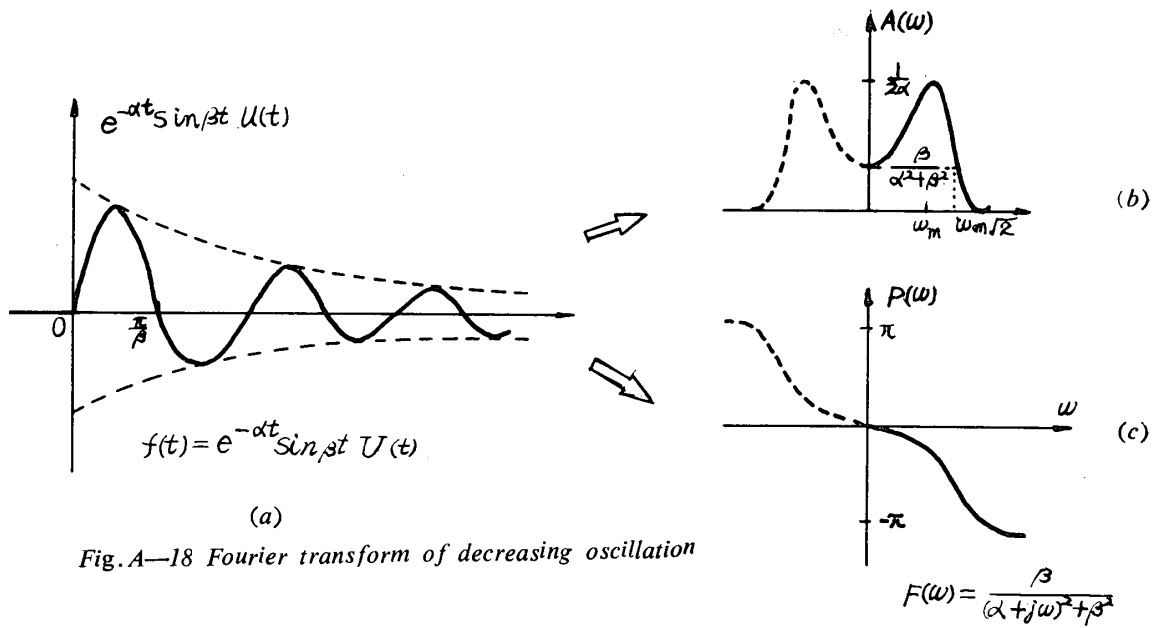


Fig. A-18 Fourier transform of decreasing oscillation

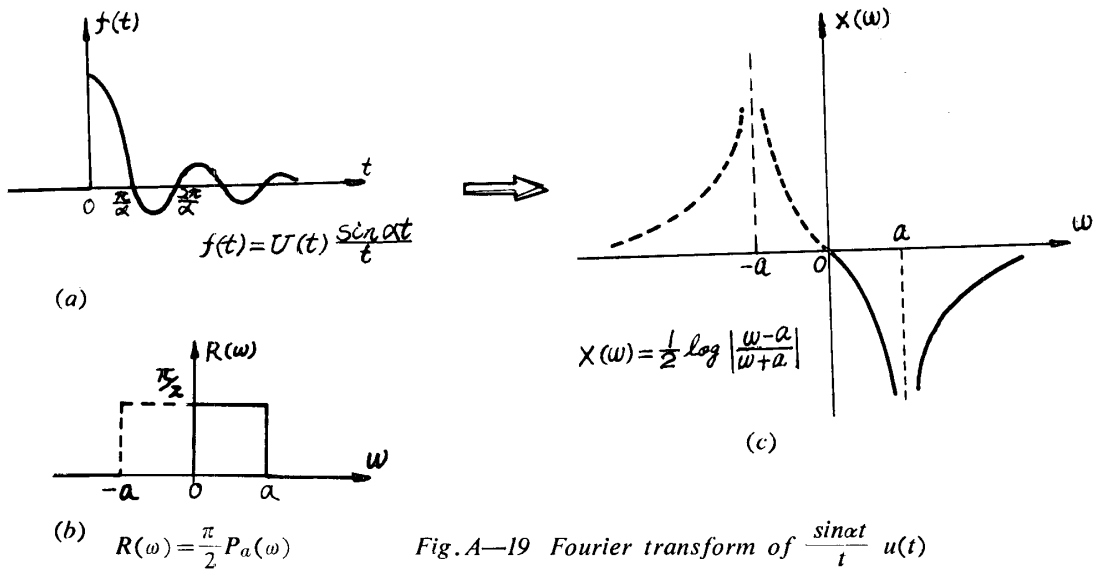


Fig.A-19 Fourier transform of $\frac{\sin \alpha t}{t} u(t)$

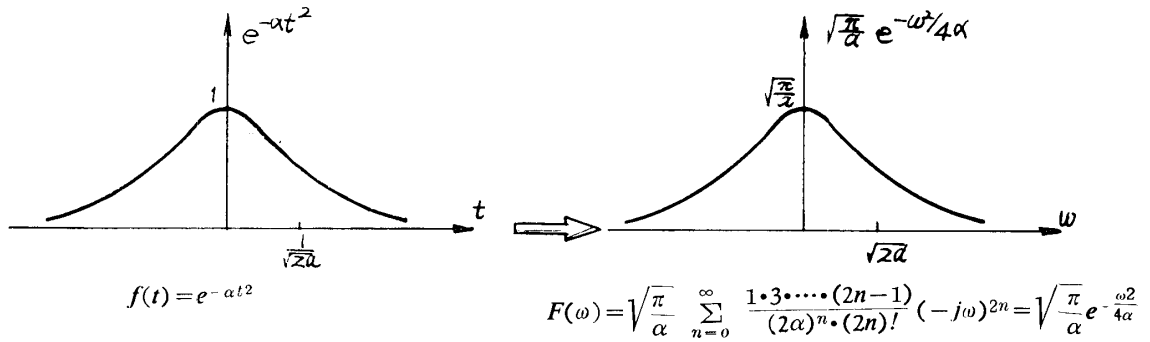


Fig.A-20 Fourier transform of Gauss function

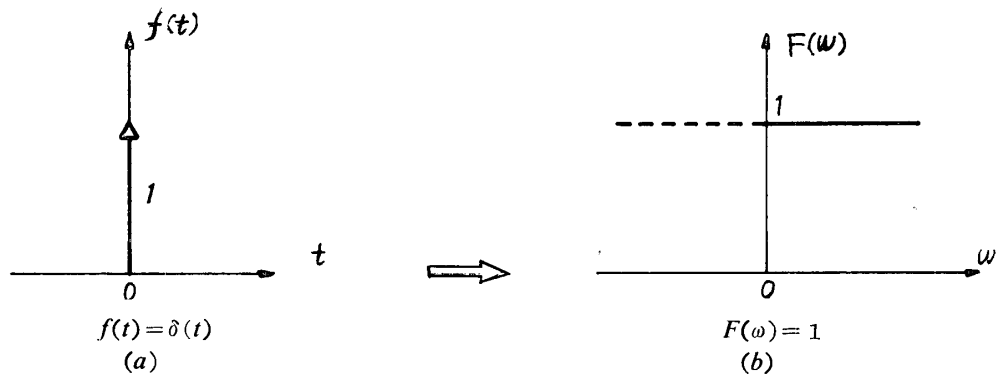
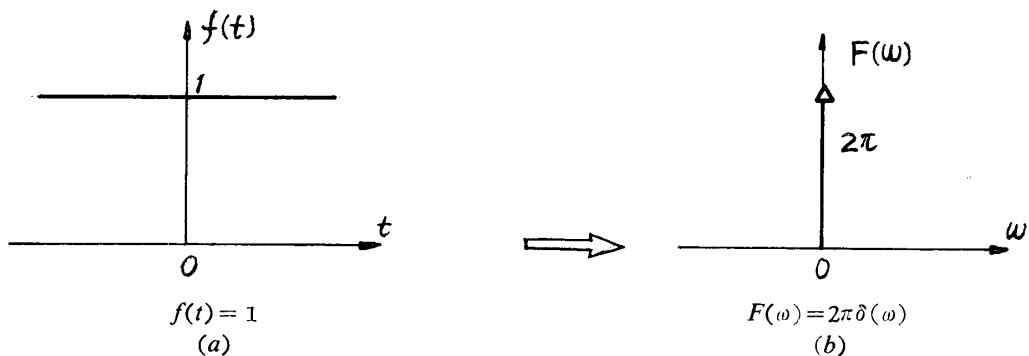


Fig.A-21 Fourier transform of delta function



g.A-22 Fourier transform of constant

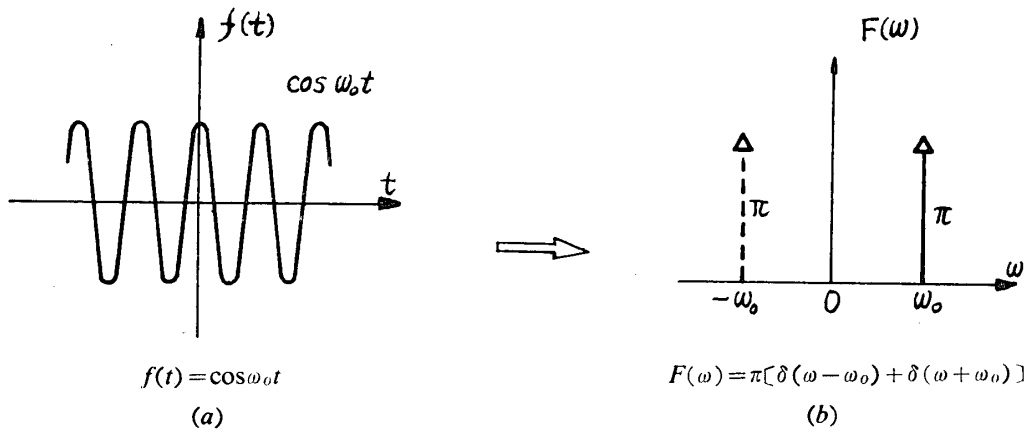


Fig. A-23 Fourier transform of $\cos \omega_0 t$

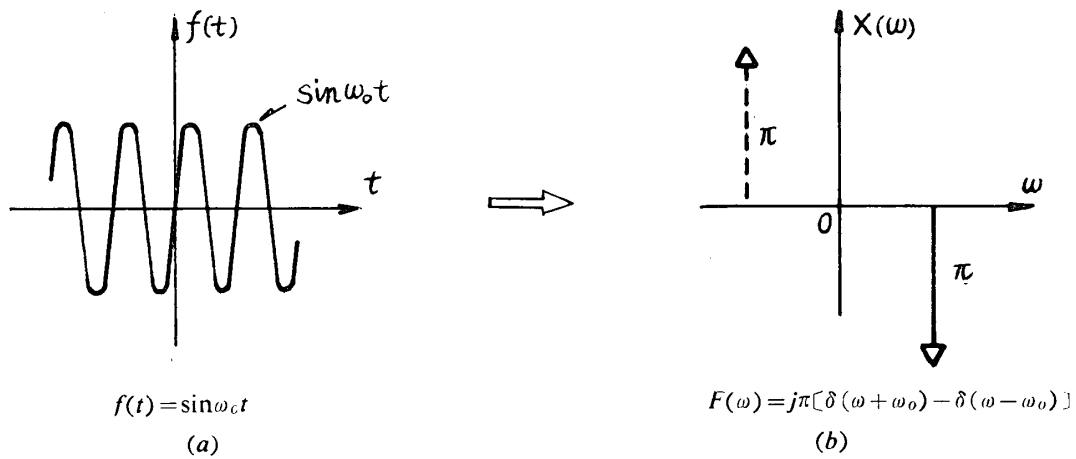


Fig. A-24 Fourier transform of the periodic sinusoidal function

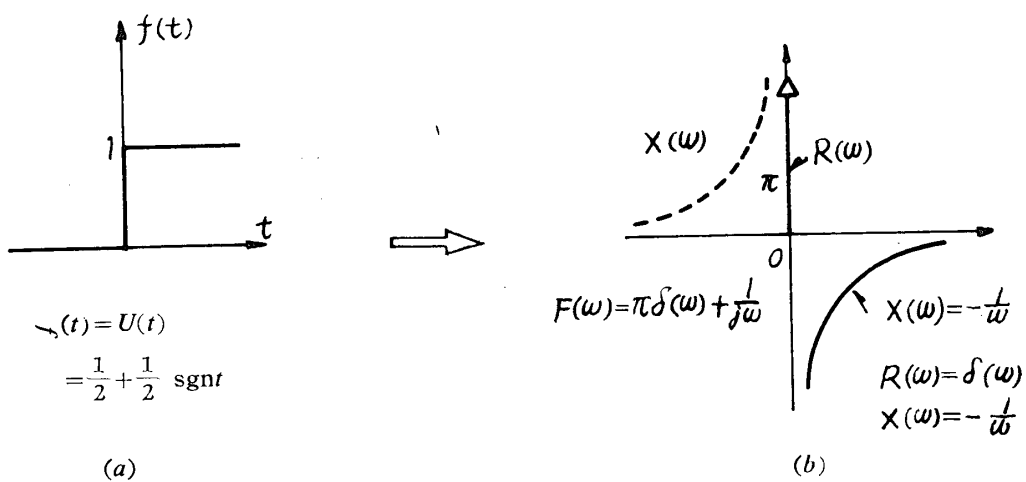
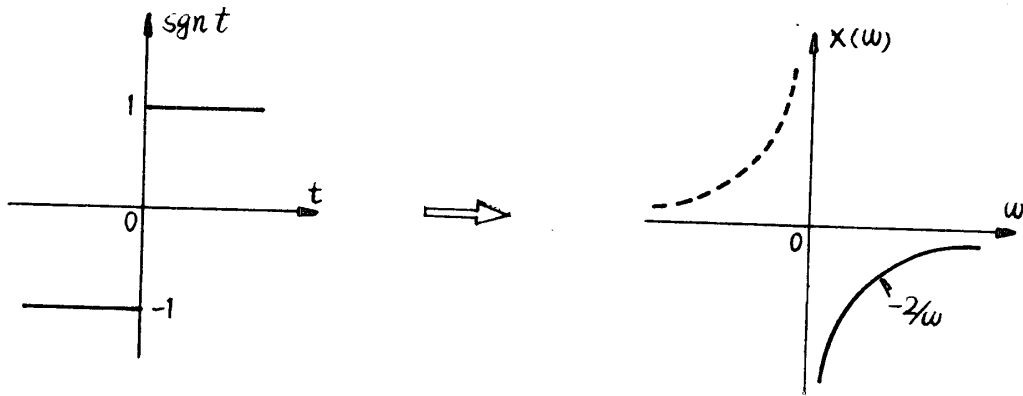


Fig. A-25 Fourier transform of the step function



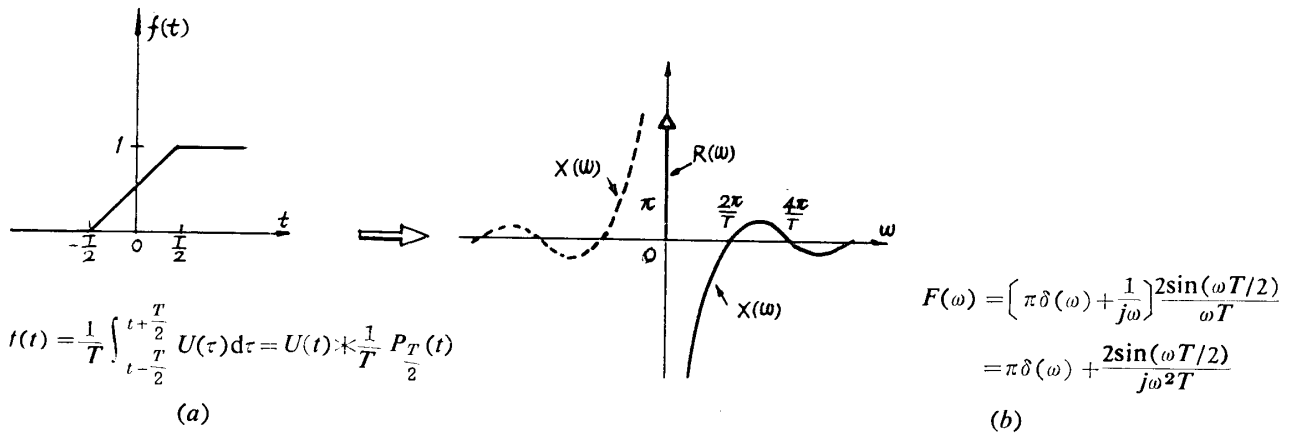
$f(t) = \text{sgn } t$

(a)

$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}, \quad X(\omega) = -\frac{2}{\omega}$

(b)

Fig. A-26 Fourier transform of the sgn function



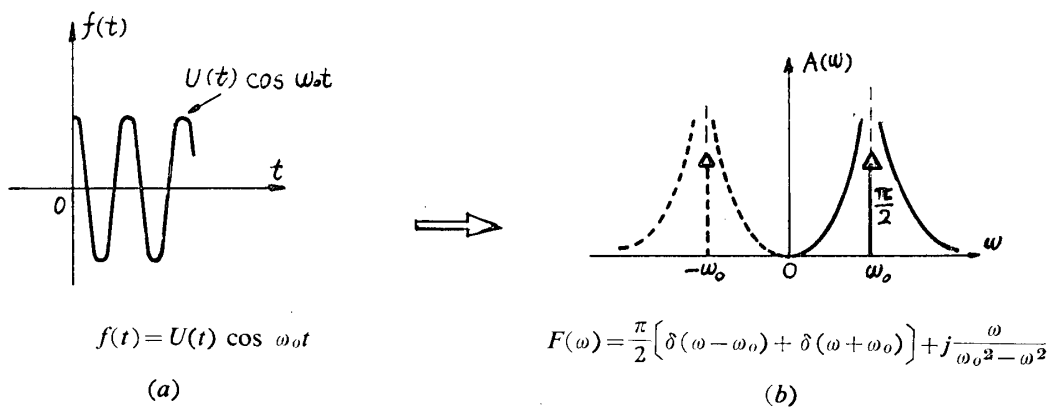
$f(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} U(\tau) d\tau = U(t) * \frac{1}{T} P_{\frac{T}{2}}(t)$

(a)

$F(\omega) = \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega T}$
 $= \pi \delta(\omega) + \frac{2\sin(\omega T/2)}{j\omega^2 T}$

(b)

Fig. A-27 Fourier transform of the inclined function



$f(t) = U(t) \cos \omega_0 t$

(a)

$F(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right] + j \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

(b)

Fig. A-28 Fourier transform of the step modified signal (I)

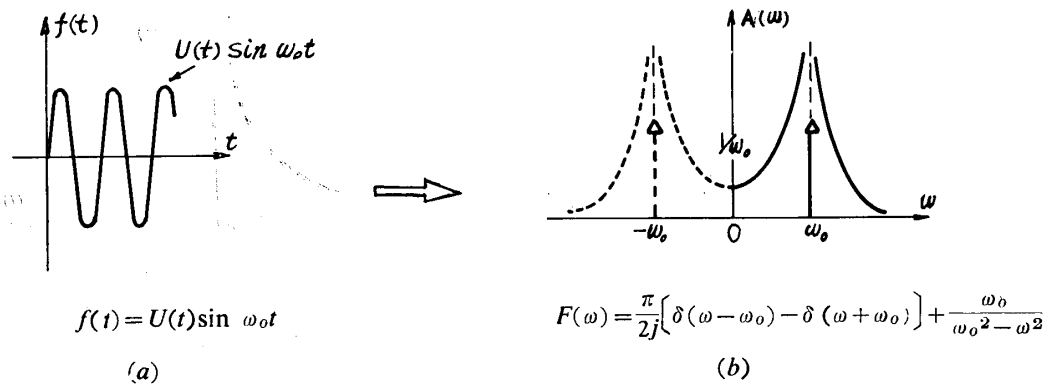


Fig. A-29 Fourier transform of the step modified signal (II)

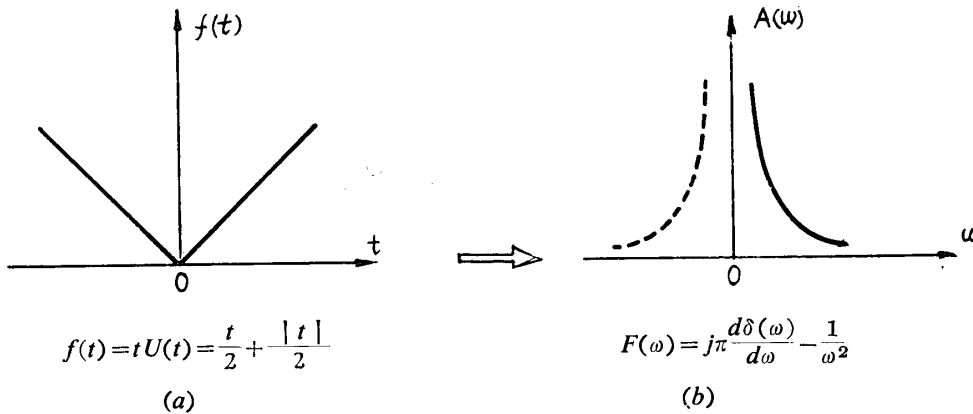


Fig. A-30 Fourier transform of the ramp function

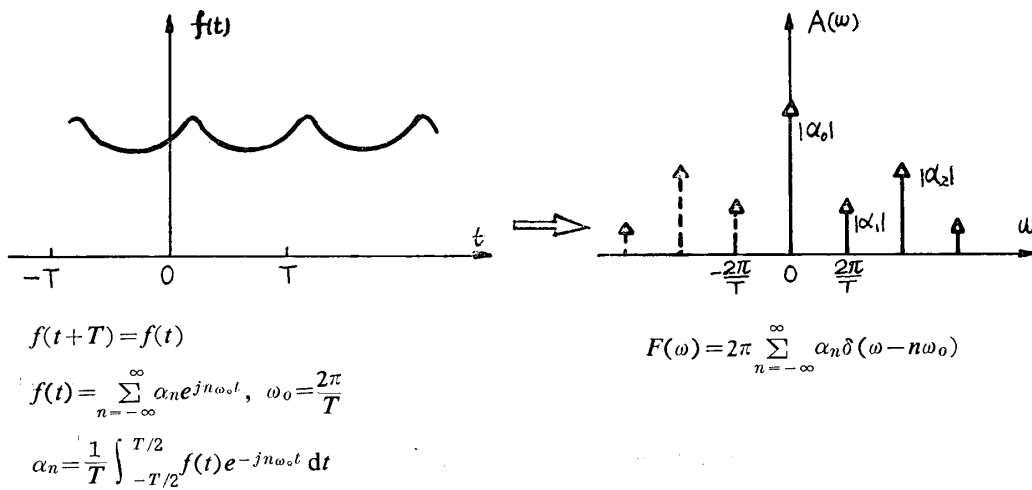


Fig. A-31. Fourier transform of periodic function

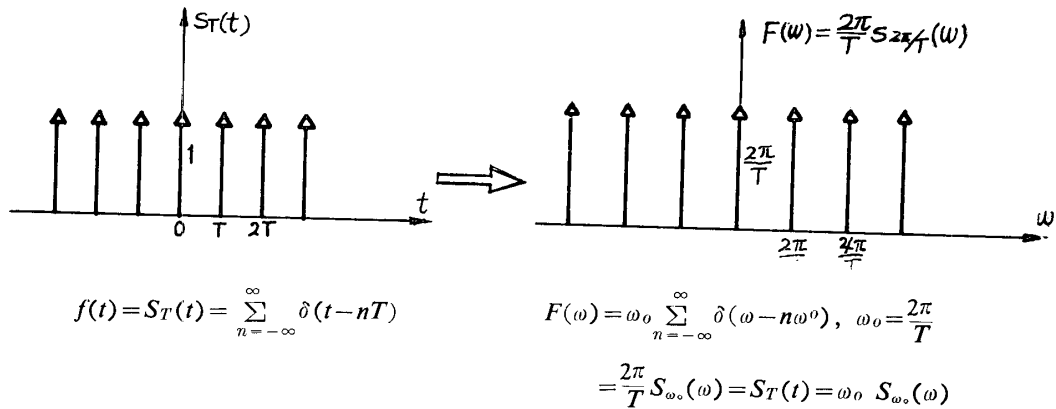


Fig. A-32 Fourier transform of equidistant pulse train

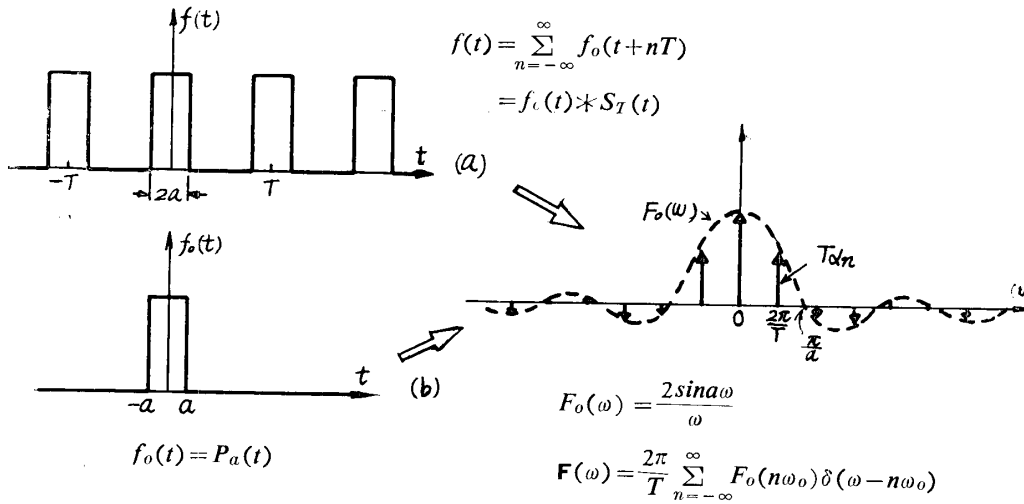


Fig. A-33 Fourier transform of square pulse train with the width $2a$ and isolated pulse with the same width

文 献

- 1) Reisner : Powder Tech. 1 (1967/1968) 257~264.
- 2) 粉体工学研究会誌 (粉体容器的閉塞現象特集号) 4, 1, 昭和42年2月17日.
- 3) Brown & Richards : Trans. Inst. Chem. Engrs., 37 (1959), 108~119.
- 4) 上滝, 早野, 本松, 新納 : 日本機械学会論文集, 28, 195

(昭3-11).

- 5) 上滝, 早野 : 日本機械学会論文集, 32, 242 (1966).
- 6) 早野, 沢田, 森山 : 福岡学芸大学紀要, No.15 (1965), No.16 (1965).
- 7) 松井, 白木 : 岐阜大学報告, No.1 (1958).

(昭和44年4月18日受理)