

強磁性金属平板に対向したコイルの実効インピーダンス の周波数特性の研究について (第1報)

戸田 圭一*・長島 弘修**・藤本 和雄***

A Study of Frequency Characteristics of Effective Impedance of a
Coil in front of a Thick Ferromagnetic Metal Plate (1st Report)

Keiichi TODA, Hironobu NAGASHIMA and Kazuo FUJIMOTO

Abstract

The effective impedance of a coil in front of a metal plate varies with the applied frequency. From a physical mathematical standpoint, analysis of the characteristics was already completed by deciding the Green's function. But the effect of the method generally can not be adaptable to the experimental phenomenon, for the reason that the function contains some integrals with an infinite integration of Bessel functions, and then can not be integrable without a larger digital computer.

The authors integrated the function by approximation under the some assumptions. This report was described about the approximated integration when a coil faced a thick ferromagnetic metal plate and the calculations of the specific permeability by the experimental measurements.

1. 緒 言

コイルに交流電流を流しておき、これに金属導体を近づければ、導体中へうず電流を生じてそのコイルの実効インピーダンスが変化する。

この現象は計測の分野では広く利用されているが、利用できる基本的な数式はない。また、強磁性体の比透磁率の測定には特殊な場合を除けば、測定対象より円環体を作成し、これにコイルを巻く方法がとられているが、非常に手間を要する。もし、非破壊でこれを測定できれば、強磁性体の周波数依存性の問題に貢献できるし、新しい計測の分野も開ける。本論文はこのような目的をもつ研究の第一報である。

いま、任意の円形コイルを用いるものとすれば、その導体に対する配置と形状によってコイル定数は一定のものになる。そのコイルを金属導体に近づけた場合、コイルの実効インピーダンス変化は導体の形状、配置に依存する。すなわち導体がどんな形をしていて、それがコイルに対してどういう位置におかれているかということが問題になる。このうち、最も簡単化された状態はコイルに共軸におかれた無限長丸棒と、

無限に厚く、広い平板導体の表面がコイルの軸に直角におかれた場合とである。前者は導体がコイルを貫通する場合の基礎となり、F. Förster¹⁾、北村²⁾³⁾等によって解析されている。後者は貫通しない場合の基礎となるが、実効インピーダンスの変化特性は両者の間ではかなり違った様相を呈する。これについては尾上⁴⁾によって総括的によくまとめられた報告がある。この報告ではマクスウェルの電磁方程式を出発点として、フーリエ変換あるいはハンケル変換を用いて厳密にグリーン関数を導出している。しかし、その結果は特殊関数の無限積分の形になるので、電子計算機によって数値積分を行なう以外に積分を解く方法が見当らない。また計算機を用いるとしても、コイルの形状や配置に関する定数のわずかな誤差によって計算結果が、実験結果とかなり異なることも予想されるが、それをチェックする方法もない。一方実験を行なう立場では電子計算機を使用しないですめばそれだけ便利である。この事からグリーン関数に附随する積分を適当な条件のもとに展開して近似積分し、コイルおよび導体の配置に関して定数となる項を実験的な測定、あるいは初等数式の計算によって求め、実用的な範囲についての実効インピーダンスの変化の特性を知ることが

* 電気工学教室

** 大学院工学研究科電気工学専攻

*** 電気工学教室 (現東京芝浦電気株式会社)

できれば便利である。

このような主旨に沿って非磁性平板良導体については十分な成果が得られ、導体の導電率をこのような方法で測定することも可能になった⁵⁾。しかし、導体が磁性の場合には実効インピーダンスの変化は全く異ってくる。本論文では、無限に厚く広い磁性導体についての近似計算とそれに基づく実験結果から比透磁率の一致ということで近似の妥当性を表現している。

ここであらかじめことわっておかねばならないことは対象が磁性体であるので、その周波数特性がいまだによく解明されていないことである。すなわち導電率にしても直流的なものや交流的なものでは、少くとも後者はヒステリシス損失の混入が考えられ、周波数によって変化する可能性がある。また比透磁率についても同様なことが言える。本論文では、これらのものが周波数あるいは測定電流の大きさによって変化しないものとしている。測定電流については実験の範囲内では電流の大小によって、測定値が影響を受けないということを確認している。従って得られた比透磁率は初透磁率にあたるものと考えられる。

2. 強磁性平板における鏡像法

コイルおよび平板導体が与えられ、かつその配置が定まった場合、コイルの実効インピーダンスの変化は導電率、比透磁率および周波数によって変化するが、その極限状態の値を求めておくことは重要で、配置によって定まる定数として計算に用いることができる。

その一つの極限は完全導体の場合であって、電磁界

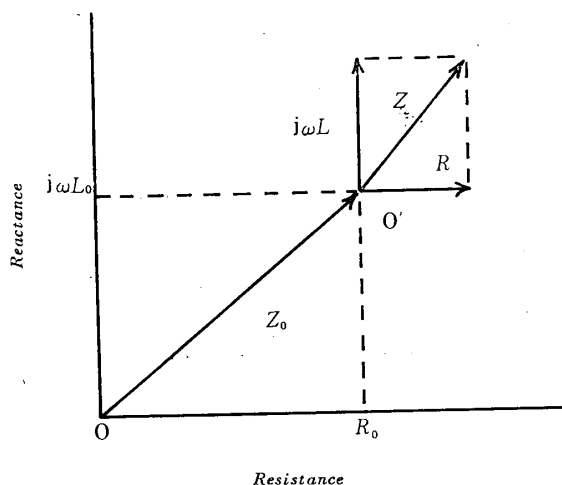


Fig. 1a An example of variation of impedance of a coil approached to a high permeability conductor

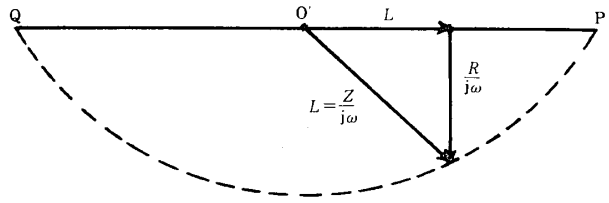


Fig. 1b Frequency characteristics of the normalized effective impedance of Fig. 1a, where the transversal axis is inductance

は境界面で完全反射することになり、磁性体、非磁性体の区別はなくなる。この時は鏡像コイルの概念を導入することができ、コイルと鏡像コイルの間の相互誘導係数を導体とコイルの間の距離で決まる定数として用いることができる⁶⁾。

いま導体がない時のコイルのインピーダンスを

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 \tag{1}$$

とし、導体が近接したことによってコイルの実効インピーダンスはつぎのように変化するものとする。

$$Z_0 + Z = R_0 + R + j\omega(L_0 + L) \tag{2}$$

ここに、 Z 、 L 、 R は導体の近接によって生じた導体がない時からの実効インピーダンス、インダクタンス、抵抗の変化分、 $Z = R + j\omega L$ である。ただし、 L は L_0 の増加の方向を正にとる。したがって、Fig. 1a のようなインピーダンスのベクトル関係がえられる。完全導体ではそのインピーダンス変化 Z は抵抗の変化分 R/ω が 0 となるので

$$Z = -j\omega M_I \tag{3}$$

ここで M_I はコイルとその鏡像コイル間の相互インダクタンスである。すなわち、導電率有限な磁性導体でも周波数を無限大にした極限では、実効インピーダンスの変化分は $-j\omega M_I$ なることを意味している。この M_I は計算によって算出することもできる。 M_I を実験的に求めるには、高周波数における良導体平板において導体中では表面に平行な磁界だけが存在すると考えられるので、文献 6 に示したようにジュール損失と境界面を透過する磁気エネルギーは等しいと近似できる。すなわち

$$M_I = |L| + \frac{R}{\omega} \tag{4}$$

つぎに、もう一つの極限として周波数が零になった場合には、非磁性体では L および R は零になるが、磁

性体では R のみ零になり, L は零にならない. この時には, 鏡像コイルにはコイル電流の $[(K_m - 1)/(K_m + 1)]$ 倍の電流を想定すればよい¹⁾. $K_m \gg 1$ ならば鏡像コイルの電流はコイル電流に等しいと近似してよい. ただし, 向きはコイル電流と同じ方向で完全反射時の鏡像電流とは逆向きである.

したがって, K_m が大きい磁性体では Fig. 1 b の点線に示すようなインピーダンス変化の周波数特性がえられることが推定される. ただし, $O'P$, $O'Q$ は $\omega = 0$, $\omega = \infty$ の時のインピーダンスベクトルを示すものであり O' 点は Fig. 1a に示すようなインピーダンス複素平面上で Z_0 をあらわす点である⁵⁾. ここで

$$|O'P| = M_I = |O'Q| \quad (5)$$

3. グリーン関数によって求められた実効インピーダンス表示

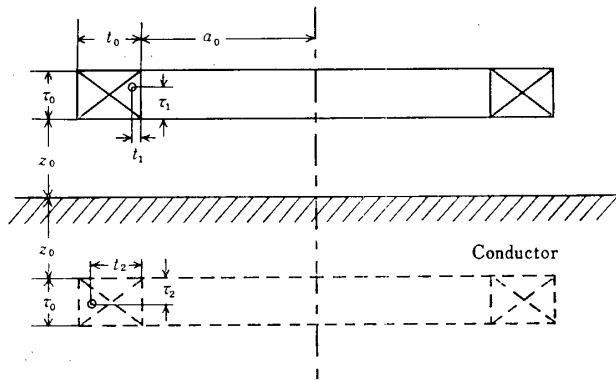


Fig. 2 Configurations of a measuring coil and a ferromagnetic metal plate, and the image coil illustrated by the dashed lines

Fig. 2 に示すように矩形断面円形コイルを厚い磁性金属平板に対向させてコイルに交流電流を流した時, この平板がない場合に比べて実効インピーダンスが Z だけ変化したとすれば, Z はハンケル変換されたグリーン関数を用いてつぎのようにあらわせる⁵⁾.

$$U = Z/(j\omega) = L - jR/\omega$$

$$= -\mu_0\pi \left(\frac{n_1 n_2}{t_0 \tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} d\tau_2 \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_0} dt_2$$

$$\times \int_0^{\infty} (a_0 + t_1)(a_0 + t_2) J_1(a_0\zeta + t_1\zeta) J_1(a_0\zeta + t_2\zeta) e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\zeta} \lambda d\zeta \quad (6)$$

ただし, U は基準化された実効インピーダンスの変化, λ は反射率で

$$\lambda = \frac{\sqrt{j\omega\sigma\mu_0 K_m + \zeta^2} - K_m \zeta}{\sqrt{j\omega\sigma\mu_0 K_m + \zeta^2} + K_m \zeta} \quad (7)$$

$J_1(a_0\zeta + t_1\zeta)$, $J_1(a_0\zeta + t_2\zeta)$ は第1種1次のベッセル関数. その他の記号は

- a_0 : コイルの半径
- t_1, t_2 : a_0 からの半径方向の距離変数
- t_0 : コイル断面の半径方向の長さ
- z_0 : 平板平面とコイル下面との距離
- τ_1, τ_2 : z_0 からの軸方向の距離変数
- n_1, n_2 : コイル断面についての半径方向および軸方向の巻線数
- ζ : ハンケル変換のための変数
- σ : 導体の導電率
- μ_0 : 真空の透磁率
- K_m : 比透磁率
- ω : コイル電流の角周波数

ここで完全反射すなわち $\sigma = \infty$ の時には(7)式は

$$\lambda = 1 \quad (7')$$

また $\omega = 0$ の時には $K_m \gg 1$ ならば

$$\lambda = -1 \quad (7'')$$

これを(6)式に代入すれば(5)式がなりたっていることがわかる. すなわち

$$M_I = \mu_0\pi \left(\frac{n_1 n_2}{t_0 \tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} d\tau_2 \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_0} dt_2$$

$$\times \int_0^{\infty} (a_0 + t_1)(a_0 + t_2) J_1(a_0\zeta + t_1\zeta) J_1(a_0\zeta + t_2\zeta) e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\zeta} d\zeta \quad (8)$$

ここで, コイルが単層ソレノイドコイルか, あるいは $a_0 \gg t_0$ で単層ソレノイドコイルに近似できる時に(8)式は, n をコイルの全巻数とすれば,

$$M_I = \mu_0\pi \left(\frac{na_0}{\tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} d\tau_2$$

$$\times \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\zeta} d\zeta \quad (9)$$

(8)式あるいは(9)式を計算機を用いないで解くことは困難であるが, M_I^2 はコイルの形状や導体の距離が一定であれば導体の材質に無関係な定数となる. これに対し, λ はコイルの形状や配置に無関係で導体の材質および使用周波数だけに依存している.

結局, コイル及びコイル配置に関するものと, 材質および使用周波数に関するものが(6)式の積分で結合されて実効インピーダンスの変化をあらわすことになる. したがって(6)式が近似的にでも解けるためには, (6)式中の $d\zeta$ に関する積分

$$F_1 = \int_0^{\infty} J_1(a_0\zeta + t_1\zeta) J_1(a_0\zeta + t_2\zeta) e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\lambda d\zeta} \quad (10)$$

および, (8)式が近似的に解けなければならない. その

中で、最も簡単なコイル形状は単巻コイルであるが、 z_0 に比較して τ_0 を十分小さいとすることは實際上無理なので単層ソレノイドコイルに近似できる場合を考えてみよう。この時は(8)式は(9)式のようになり、(10)式も次式のようにやや簡単になる。

$$F_2 = \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\zeta} \lambda d\zeta \quad (11)$$

一方(9)式中の $d\zeta$ に関する積分関数を F_3 とすれば、これは(11)式において $\lambda=1$ とした場合に相当し、完全楕円積分であらわされる⁸⁾。

$$F_3 = \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\zeta} d\zeta \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\pi a_0} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \quad (13)$$

ただし

$$k^2 = \frac{4a_0^2}{4a_0^2 + (2z_0 + \tau_1 + \tau_2)^2} \quad (14)$$

ここで、 $K(k)$ 、 $E(k)$ は k を母数とする第1種および第2種完全楕円積分である。

4. 単層ソレノイドコイルについての近似解

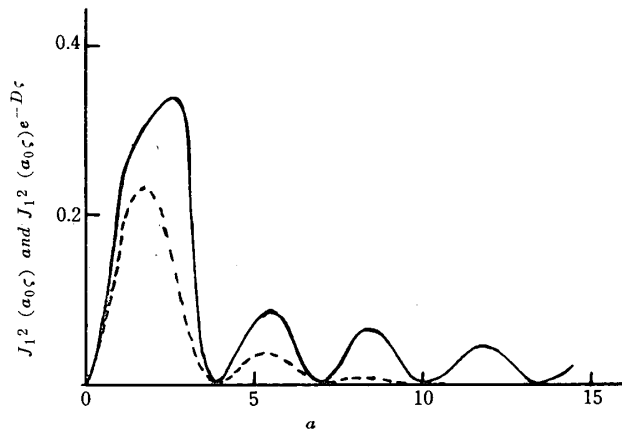


Fig. 3 Curves of $J_1^2(a_0\zeta)$ versus $a_0\zeta$ illustrated by a solid line, and $J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta}$ versus $a_0\zeta$ by the dashed line

単層ソレノイドコイルの場合あるいはそれに近似できるような、半径に比べて十分薄い多層ソレノイドコイルの場合には(6)式はやや簡単になる。この時の U を U_s であわせば

$$U_s = -\mu_0\pi \left(\frac{na_0}{\tau_0} \right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} F_2 d\tau_2 \quad (15)$$

したがって、この式を計算可能な式に近似することが必要になる。

そこで、まづ(7)式であらわされる λ について考察してみよう。そのためには(11)式中の $d\zeta$ に関する被積

分関数について考える必要がある。すなわち λ は強磁性体の材質による定数 σ 、 K_m および使用角周波数 ω をパラメータにしているのに対し、残りの部分はコイルの形状、配置をあらわす a_0 、 z_0 、 τ_1 、 τ_2 をパラメータにしている。ここで

$$2z_0 + \tau_1 + \tau_2 = D \quad (16)$$

とおくことにすれば(11)式の被積分項は $J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta}$ となる。これは半径 a_0 をパラメータとする $J_1^2(a_0\zeta)$ と D をパラメータとする単純な指数関数 $e^{-D\zeta}$ にわけられる。 $J_1^2(a_0\zeta)$ はFig. 3の実線に示すように $\zeta=0$ で零より出発し、極値をとりながら次第に零に近づく関数である。これに指数関数がかかり $J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta}$ となっているので、この関数は $\zeta \rightarrow \infty$ で零になることは明瞭であるが $0 < \zeta < \infty$ の間における $J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta}$ の値は a_0 および D の値によって、かなり変化すると考えられ、たとえばFig. 3の破線のような形になるだろう。したがって、 ζ が十分大きい処では(11)式の被積分関数はほとんど0に近くなって、それらを零に近似してもあまり大きな誤差は生じないと考えられる。このことは(7)式の λ の近似の方法を与える。いま、

$$\omega\sigma\mu_0 K_m = q^2 \quad (17)$$

とおけば

$$\lambda = \frac{\sqrt{jq^2 + \zeta^2} - K_m\zeta}{\sqrt{jq^2 + \zeta^2} + K_m\zeta}$$

ここで、 ζ が q と同程度あるいはそれより大きい範囲では(11)式の被積分関数はほとんど零に等しくなっていると仮定する。この仮定は材質的には σK_m が大きくなるほど近似度が良いことを意味する⁵⁾。ここでは(11)式の積分に有効な ζ の範囲を簡単に $\zeta \ll q$ と仮定する。この仮定は物理的には導体中では表面に垂直な成分を無視することを意味し、浸透の深さ $\delta = \sqrt{2}/q$ が浅い程よい近似といえる。この仮定のもとで(7)式は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sqrt{j}q - K_m\zeta}{\sqrt{j}q + K_m\zeta} \\ &= -1 + \left[\frac{2\sqrt{j}q}{K_m\zeta} / \left(1 + \frac{\sqrt{j}q}{K_m\zeta} \right) \right] \\ &= -1 + \left[\frac{2\sqrt{j}}{P\zeta} / \left(1 + \frac{\sqrt{j}}{P\zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$P = K_m/q = \sqrt{K_m}/\sqrt{\omega\mu_0\sigma} \quad (19)$$

ここで、(19)式を用いれば $\zeta \ll q$ は次式であらわせる。

$$\zeta \ll K_m/P \quad (20)$$

一方、(18)式において

$$P\zeta \gg 1 \quad (21)$$

として展開することにより

$$\left(1 + \frac{\sqrt{j}}{P\zeta}\right)^{-1} \doteq 1 - \frac{\sqrt{j}}{P\zeta} + \left(\frac{\sqrt{j}}{P\zeta}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{j}}{P\zeta}\right)^3$$

したがって

$$\begin{aligned} \lambda &\doteq \left\{ -1 + \frac{\sqrt{2}}{P\zeta} - \frac{\sqrt{2}}{(P\zeta)^2} + \frac{2}{(P\zeta)^3} - \dots \right\} \\ &+ j \left\{ \frac{\sqrt{2}}{P\zeta} - \frac{2}{(P\zeta)^2} + \frac{\sqrt{2}}{(P\zeta)^3} - \dots \right\} \\ &\doteq \left\{ -1 + \frac{\sqrt{2}}{P\zeta} \right\} + j \left\{ \frac{\sqrt{2}}{P\zeta} - \frac{2}{(P\zeta)^2} \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

(21)式の仮定は(11)式の積分の ζ の有効な範囲についての下限を与えるもので、 ζ が P^{-1} 程度以下の範囲で Fig. 3の原点に極めて近いということを仮定している。すなわち(20), (21)式から(13)式の積分の ζ の有効な範囲が

$$\frac{1}{P} \ll \zeta \ll \frac{K_m}{P} \quad (23)$$

の間に存在することが λ を(22)式で近似しうるための条件で、これからの逸脱の程度によって近似の誤差が決ってくる。そのためには(23)式からわかるように K_m はできるだけ大きいことが望ましい。

以上の仮定のもとで(6)式から単層ソレノイドコイルの実効インピーダンスの変化の大きさは

$$L \doteq \mu_0 \pi \left(\frac{na_0}{\tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} F_{2L} d\tau_2 \quad (24)$$

$$\frac{R}{\omega} \doteq \mu_0 \pi \left(\frac{na_0}{\tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} F_{2R} d\tau_2 \quad (25)$$

ただし

$$F_{2L} \doteq \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{P\zeta} \right\} d\zeta \quad (26)$$

$$F_{2R} \doteq \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{P\zeta} - \frac{2}{(P\zeta)^2} \right\} d\zeta \quad (27)$$

さて(24)式または(25)式から、あるいは両式を用いて K_m を求めることが考えられるが、ここでは実験技術上の都合から抵抗分すなわち(25)式のみから K_m をもとめる。そのためには(27)式の積分を求めなければならない。(27)式を解くためにはつぎのような2つの積分が実行できればよいことになる。

$$\begin{aligned} F_{2R} &= \frac{\sqrt{2}}{P} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta} e^{-D\zeta} d\zeta \\ &\quad - \frac{2}{P^2} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta^2} e^{-D\zeta} d\zeta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{P} I_1(a_0, D) - \frac{2}{P^2} I_2(a_0, D) \quad (28) \end{aligned}$$

I_1, I_2 を求めるにはつぎのようにすればよい。 $z_0 + \tau_1$ の位置にある単巻コイルと $-(z_0 + \tau_2)$ の位置にある鏡像単巻コイルとの間の相互誘導係数を m_I とすれば(13)式を利用して

$$m_I = a_0^2 \pi \mu_0 \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta} d\zeta = a_0^2 \pi \mu_0 F_3 \quad (29)$$

ここで使用するソレノイドは半径が大きく τ_0 は小さいものとし、かつ導体に接近して用いるものとする。この仮定は実際に使用するコイルに対して適用し難い仮定ではない。この条件が満たされるならば(13)式中の完全楕円積分は初等関数であらわされるので

$$\int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta} d\zeta \doteq \frac{1}{\pi a_0} \left(\ln \frac{8a_0}{D} - 2 \right) \quad (30)$$

両辺を D で積分すれば

$$\begin{aligned} &\int_0^D \left\{ \int_0^{\infty} J_1^2(a_0\zeta) e^{-D\zeta} d\zeta \right\} dD \\ &= \frac{1}{\pi a_0} \int_0^D \left(\ln \frac{8a_0}{D} - 2 \right) dD \quad (31) \end{aligned}$$

(30)式より

$$\begin{aligned} &-\int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta} e^{-D\zeta} d\zeta + \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi a_0} \left\{ D(\ln 8a_0 - 1) - D \ln D \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \quad (33)$$

となるので(32)式より

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta} e^{-D\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi a_0} \left\{ D(\ln 8a_0 - 1) - D \ln D \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

(34)式を D に関してもう一度0から D まで積分すれば

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta^2} e^{-D\zeta} d\zeta = \frac{4a_0}{3\pi} - \frac{D}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a_0} \left\{ D^2 \left(\ln 8a_0 - \frac{1}{2} \right) - D^2 \ln D \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

ただし

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1^2(a_0\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = \frac{4a_0}{3\pi} \quad (36)$$

(34)式, (35)式を(28)式に代入すれば(28)式より

$$\frac{R}{\omega} = \frac{\varphi_1}{\delta K_m} - \frac{\varphi_2}{\delta^2 K_m^2} \quad (37)$$

ただし

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2 \mu_0 \pi \left(\frac{na_0}{\tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} \left\{ \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi a_0} \left\{ D(\ln 8a_0 - 1) - D \ln D \right\} \right\} d\tau_1 \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 4 \mu_0 \pi \left(\frac{na_0}{\tau_0}\right)^2 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_0} \left\{ \frac{4a_0}{3\pi} - \frac{D}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi a_0} \left\{ D^2 \left(\ln 8a_0 - \frac{1}{2} \right) - D^2 \ln D \right\} \right\} d\tau_1 \quad (39) \end{aligned}$$

(38)式, (39)式から明らかなように φ_1, φ_2 はコイル形状と配置のみによって定まり ω, σ, K_m を含まない。(38), (39)式の積分を実行することにより φ_1, φ_2 は

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \mu_0 \pi (na_0)^2 - 4 \mu_0 a_0 \left(\frac{n}{\tau_0}\right)^2 \left\{ \tau^2 (\ln 8 a_0 - 1) (2z_0 + \tau_0) \right. \\ & - \left. \left\{ \frac{4}{3} (z_0 + \tau_0)^3 \ln 2 (z_0 + \tau_0) - \frac{10}{9} (z_0 + \tau_0)^3 \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{1}{3} (2z_0 + \tau_0)^3 \ln (2z_0 + \tau_0) + \frac{5}{18} (2z_0 + \tau_0)^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{3} z_0^3 \ln 2 z_0 - \frac{10}{9} z_0^3 \right\} \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & 4 \pi \mu_0 (a_0 n)^2 \left\{ \frac{2 a_0}{3 \pi} - \frac{1}{2} (2z_0 + \tau_0) \right\} \\ & + 2 \mu_0 a_0 \left(\frac{n}{\tau_0}\right)^2 \left\{ \left(n 8 a_0 - \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{4}{3} (z_0 + \tau_0)^4 \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{1}{6} (2z_0 + \tau_0)^4 + \frac{4}{3} z_0^4 \right\} \right. \\ & - \left. \left\{ \frac{4}{3} (z_0 + \tau_0)^4 \ln 2 (z_0 + \tau_0) - \frac{7}{9} (z_0 + \tau_0)^4 \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{1}{6} (2z_0 + \tau_0)^4 \ln (2z_0 + \tau_0) + \frac{7}{72} (2z_0 + \tau_0)^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{3} z_0^4 \ln 2 z_0 - \frac{7}{9} z_0^4 \right\} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

5. K_m の具体的な算出方法

これまでに述べた近似式がどの程度実際のものに一致しているかは電子計算機の計算結果と比較すれば最も明確であるが、当教室の計算機 FACOM 231 ALGOL では龐大な計算時間がかかるのでこれについては改めて報告することにする。ここでは、これらの近似式から演えきできる比透磁率 K_m の一致ということで近似式の妥当性を類推することにする。それと同時にここへの計算方法は上述の仮定に適合するコイルを用いた場合、非破壊的にかつ比較的手軽に強磁性体の初期透磁率にあたる比透磁率を測定する方法になる。また、その方法としては、誘導分のみまたは抵

抗分のみあるいはその両者より算出する方法が考えられるが、ここでは実験の手軽さより抵抗分だけから算出する方法を取り扱う。ただし、いづれも σ/K_m の形で算出されるので σ はあらかじめわかっているものとする。ここで用いた資料は、直流測定の結果 $\sigma = 6.67 \times 10^6$ [σ/m] であった。

(i) φ_1 および φ_2 を用いる方法

Table 1 Calculations by the method (i)

$z_0 = 4$ [mm]
 $\varphi_1 = 9.37 \times 10^{-4}$ [Hm]
 $\varphi_2 = 4.50 \times 10^{-5}$ [Hm²]

Frequency f [Hz]	Specific permeability K_m
500	369
700	409
1000	465

φ_1, φ_2 が算出できれば(40)式から直ちに K_m がえられるが、(41)式の計算からわかるように、コイルの形状や配置に関する定数の測定精度が φ_2 の値に大きく影響してくるので推奨される計算方法ではない。計算の一例を示すと Table 1 のようになる。

(ii) 2つの異った周波数の測定値より φ_2 を消去する方法

φ_2 は計算誤差が大きいので異った2つの周波数 f_1, f_2 を用い、その時の抵抗の変化分を R_1 および R_2 とし、うず電流の浸透の深さを δ_1, δ_2 であらわせば(40)式より

Table 2 Calculations by the method (ii)

z_0 [mm]	$\varphi_1 \times 10^{-4}$ [Hm]	f_1 [Hz]	R_1 [Ω]	f_2 [Hz]	R_2 [Ω]	K_m
4.0	9.373	500	12.5	700	18.7	314
				1000	28.2	331
5.0	8.903	500	11.8	700	17.6	313
				1000	26.4	328
6.0	8.473	500	11.1	700	16.6	325
				1000	24.8	335
7.0	8.080	500	10.5	700	15.6	313
				1000	23.6	345
8.0	7.380	500	9.4	700	14.0	335
				1000	20.9	350

$$\frac{R_1}{2\pi f_1} = \frac{\varphi_1}{\delta_1} - \frac{\varphi_2}{\delta_1^2} \quad (42)$$

$$\frac{R_2}{2\pi f_2} = \frac{\varphi_1}{\delta_2} - \frac{\varphi_2}{\delta_2^2} \quad (43)$$

ここで, $f_2 = pf_1$ とおけば

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

となるから, (43)式は

$$\frac{R_2}{2\pi pf_1} = \frac{\varphi_1\sqrt{p}}{\delta_1} - \frac{\varphi_2 p}{\delta_1^2} \quad (44)$$

(42)式, (44)式より φ_2 を消去して整理すれば

$$\frac{\sigma}{K_m} = \frac{1}{4\pi^3\mu_0 f_1^3 \varphi_1^2} \left[\frac{R_1 - R_2/p^2}{1 - 1/\sqrt{p}} \right]^2 \quad (45)$$

σ を既知としているので

$$K_m = 4\pi^3\mu_0\sigma f_1^3 \varphi_1^2 \left[\frac{1 - 1/\sqrt{p}}{R_1 - R_2/p^2} \right]^2 \quad (46)$$

これを実測値に適用した結果を Table 2 に示す. 但し $\sigma = 6.67 \times 10^6$ [σ/m]

(iii) 外挿法

Table 3 Calculations by the method (iii)

z_0 [mm]	$\varphi_1 / (\delta K_m) \times 10^{-2}$ [H]	$\varphi_1 \times 10^{-4}$ [Hm]	$\sqrt{\sigma/K_m} [\sigma^{1/2}] \times 10^2$	K_m
4.0	1.08	9.373	1.451	317
5.0	1.03	8.903	1.460	313
6.0	0.975	8.473	1.452	316
7.0	0.900	8.080	1.405	338
9.0	0.805	7.380	1.376	352

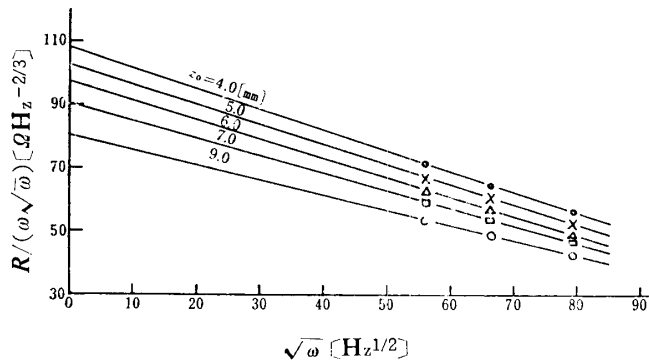


Fig. 4 A graph for the extrapolation method (iii)

(47)式をつぎのように変形する.

$$\frac{R}{\omega\sqrt{w}} = \frac{\varphi_1\sqrt{\mu_0\sigma}}{\sqrt{2K_m}} - \frac{\varphi_2\mu_0\sigma}{2K_m}\sqrt{w} \quad (47)$$

(47)式右辺第2項の \sqrt{w} の係数は定数であるので, (47)式が成立する範囲で横軸に \sqrt{w} 縦軸に $R/(\omega\sqrt{w})$ を

とればFig. 4のような直線関係が成立するはずである. そこでこの直線を縦軸まで外挿してその交点を求めれば, (47)式の第1項がその値となるので φ_1 の値を用いなくて K_m を求めることができる. この結果を Table 3 に示す.

6. 結 言

本論文においては単層ソレノイドコイルあるいは半径に比べて厚みが十分に薄く単層ソレノイドコイルに近似できるような矩形断面円形コイルを考える. そのコイルの軸が厚い強磁性平板導体の表面に垂直になるようにおかれた時のコイルの実効インピーダンス特性の近似式による表現, ひいてはその近似式が成立する時, 非破壊的に比透磁率を測定する方法について述べたが, 資料としては, 市販の建築材料の15 [mm] 厚鉄板のみを用いたので実験方面でも資料不足である. しかし, (47)式を基礎にした K_m の算出からもわかるように, Table 2, 3 にあげられている K_m の値はその計算途中で自乗されているにもかかわらず, $\pm 10\%$ 程度の範囲内に収まっている. このことは(47)式の近似式の妥当性をあらわしていると考えてよいだろう. 前述したように φ_1, φ_2 を用いて(47)式より直接 K_m を求める方法は, Table 1 のように K_m が変動するが, (ii) 又は (iii) のように φ_2 を消去すればかなり一致した K_m が得られるので, Table 1 の結果から直ちに(47)式の近似の妥当性を疑うことは間違っている. これは φ_2 を求めるには, 同程度の大きさの2量間の減算を行わなければならないので, コイル定数や配置

の測定中に混入するわずかな誤差が φ_2 の計算結果に大きく影響してくるものと考えられる. このことは Fig. 4 の直線性からも同様な推測が下される. ただ, 本論文では φ_1, φ_2 を計算によって求める方法をとっているために, (47)式の仮定に加えて(48)式の仮定も要求される. 本来, φ_1, φ_2 はコイルの形状および配置によって定まる定数, すなわち, 一種のコイル定数と考えられるものである. したがって, 比透磁率及び導電率のわかった強磁性体平板を用いてそれらを実験的に決定することも考えられる. そのためにはコイルの任意の配置についての再現性が要求される. しかし現在の段階では十分な再現性が得られないので, 本論文では割愛するが, これは将来克服されなければならない問題である. この方法が可能になれば単層ソレノイドコイルの仮定のもとに φ_1, φ_2 を知る必要はなく, 任意断面のコイルに対する φ_1 そ

してもし必要ならば ρ_2 の値を知ることできる。

また、コイルの任意配置についての再現性が可能になれば、(22)式のように λ を展開しないでもよく、(23)式の制限は $P \ll K_m$ だけになる。

最後に、本論文では近似の妥当性を K_m の一致ということで推論しているが、電子計算機による数値積分と比較することが最もよい。つぎの機会に電子計算機を用いて近似の妥当性をはじめ、コイル半径 a_0 、距離 z_0 、材質定数についての近似適用範囲などを検討する予定である。

参 考 文 献

- 1) F. Förster und K. Stambke: Zeitschrift für Metallkunde, 45, 166 (1945)
- 2) 北村覚一: 電試研究報告, No. 563 (1954)
- 3) 北村覚一: 電試研究報告, No. 588 (1960)
- 4) 尾上守夫: 電学誌, 88, 162, (1968)
- 5) 戸田圭一, 長島弘修: 山口大学工学部研究報告, 21, 517 (1970)
- 6) 戸田圭一: 非破壊検査, 17, 513 (1968)
- 7) B. Hauge: "Electromagnetic Problems in Electrical Engineering" Oxford University Press, 106 (1929)
- 8) G. N. Watson: "A. Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge University Press, (1962) p390
- 9) 森口繁一, その他: 数学公式Ⅲ, 岩波書店 (1968) p193
(昭和45年4月15日受理)