

非線形最適制御における共変系の一解法

岡 本 孝 之*・沖 田 豪**

A Solution of Covariant System for Nonlinear Optimal Control System

Takayuki OKAMOTO and Tsuyoshi OKITA

Abstract

This paper is concerned with the solution of the optimal control for the nonlinear systems described by the functional expansions.

When we solve the optimal control problem by means of Maximal Principle, the problem is reduced to the two point boundary value problem. As we remark that covariant vector is considered as the function of state vector, we expand covariant vector as state vector to solve the two point boundary value problem. Then, using of analytic continuation, We try to extend the applicable region of this method. When the control time is infinity, the optimal control law is timeinvariant, and can be obtained easily in this case.

Finally, we verify the validity of this method by the numerical examples.

1. 緒 言

実在する数多くのシステムは多かれ少なかれ非線形性を示す。また、近年科学技術の発展に伴い、現実に対象とするシステムはより広範囲に及び、非線形システムを取り扱う機会は多くなっている。従って、非線形システムの制御に関する研究はますます重要になっている。

非線形システムの最適制御については、これまで、動的計画法、最大原理等を用いて考察されている。¹⁾ 非線形システムに動的計画法を用いる場合、計算量、記憶容量に問題がある。最大原理を用いて非線形システムの最適制御を解く場合、問題は非線形二点境界値問題に帰着される。この問題の解法としては、打ち込み法、準線形化法²⁾、不変埋め込み法³⁾などが提案されている。打ち込み法、準線形化法は繰り返し計算法なので、先験値の精度が良くないと解は発散してしまう。また、不変埋め込み法では非線形偏微分方程式を解く必要があるため、その数値計算法に問題がある。このように、非線形システムの最適制御の解法は、その必要性にも

かわらず、現在でも十分に解明されているとはいえない。そこで本論文では、これらの点を考慮し、最大原理を用いて、汎関数展開形非線形システム⁴⁾を対象とした最適制御の一解法を考えよう。

本方法では、共変ベクトルが状態変数の関数とみなせることに注目し、共変ベクトルを状態変数で展開表現することにより二点境界値問題を解いている。さらに、解析接続を用いることにより、適用領域の拡張を試みる。本手法は制御時間が無限大(無限過程)のとき展開係数は定数となり計算が容易となる。そこで、制御時間が有限(有限過程)のときの最適解は、本手法で求めた無限過程での最適解をもとに、繰り返し計算法を用いて推定することも考えられる。そこで次に、この方法について考察する。

2. 問題の設定

次の汎関数展開形線形システム⁴⁾を対象としよう。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{NA} \mathbf{A}_i[\mathbf{x}(t)]^i \quad (2)$$

但し、 $\mathbf{x}(t)$ は n 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は m 次元制御

* 大学院 電子工学専攻

** 電子工学科

入力ベクトル, B は $n \times m$ 次元定数行列である. また, A_i は次の項目を満足する n^{i+1} 次元テンソルである.

- ① A_i の 2 番目から $i+1$ 番目の次元はそれぞれ対称である.
 - ② A_i の 1 番目の次元と 2 番目の次元を入れ替えたテンソルを A_i^T で表す.
- ①, ②より(2)式の i 次の項は, 例えば $n=2$ のとき次のように整理できる.

$$A_i(\mathbf{x})^i = \begin{bmatrix} a_{i1}^1 x_1^i + a_{i2}^1 x_1^{i-1} x_2 + \dots + a_{i1}^i x_1^{i-j+1} x_2^{j-1} \dots \dots \dots \\ \dots + a_{i1+i}^1 x_2^i \\ a_{i1}^2 x_1^i + \dots \dots \dots + a_{i1+i}^2 x_2^i \end{bmatrix}$$

また, A_i の 1 番目の次元は $ff(\mathbf{x})$ の次元に, 2 番目から $i+1$ 番目の次元は $[\mathbf{x}]^i$ に対応している. さらに, A_i, B_j は次の演算が可能である.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad (A_{i+1}[\mathbf{x}]^i)(B_j[\mathbf{x}]^j) &= A_{i+1} B_j [\mathbf{x}]^{i+j} \quad (3-a) \\ (A_{i+1}[\mathbf{x}]^i)^T (B_j[\mathbf{x}]^j) &= A_{i+1}^T B_j [\mathbf{x}]^{i+j} \quad (3-b) \end{aligned}$$

また, テンソルの微分は次のように定義される.

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial^k}{\partial \mathbf{x}^k} (A_i[\mathbf{x}]^i) = \frac{i!}{(i-k)!} A_i[\mathbf{x}]^{i-k} \quad (4)$$

(1), (2)で表わされるシステムは, 実際のシステムでもよく見受けられ, Duffing形システム, Van der Polシステム, Rayleighシステムなどが含まれる⁵⁾

ここでは, 状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ を原点に近づく制御を考え, 評価関数として次のような状態ベクトルと制御入力の二乗規範を用いよう.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t) \right\} dt \quad (5)$$

但し, Q は $n \times n$ 次元準正定値行列, R は $m \times m$ 次元正定値行列である.

問題は(5)式を最小にする最適制御入力 $\mathbf{u}^*(t)$ を求めることである.

3. 最適制御における共変系の解法

最大原理によれば, 共変ベクトル $\lambda(t)$ を導入することにより, 最適制御入力 $\mathbf{u}^*(t)$ は次式で与えられる.

$$\mathbf{u}^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (6)$$

従って, 問題は次の二点境界値問題を解くことに帰着される.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = ff(\mathbf{x}(t)) - BR^{-1} B^T \lambda(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7-a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -Q \mathbf{x}(t) - \left[\frac{\partial ff(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \lambda(t), \quad \lambda(T) = \Phi \quad (7-b)$$

3.1 共変系の展開表現

(7)式は二点境界値問題になっており, これを解析的に解くことは困難である. 本節では(7)式の解法について考察する.

(7-a,b)式の連立性より, 共変ベクトル $\lambda(t)$ は, 時間 t と状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の関数とみなすことができる. 従って, いま一般的に次のようにおくことができる.

$$\lambda(t) \triangleq \lambda(t, \mathbf{x}(t)) \quad (8)$$

(8)式のように一般的に考えると, (7)式より次のベクトル偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial \lambda(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \{ ff(\mathbf{x}) - BR^{-1} B^T \lambda(t, \mathbf{x}) \} \\ = -Q \mathbf{x} - \left[\frac{\partial ff(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \lambda(t, \mathbf{x}), \quad \lambda(T, \mathbf{x}) = \Phi \quad (9) \end{aligned}$$

不変埋め込み法では(9)式を解いて共変ベクトルの初期値 $\lambda(0) \triangleq \lambda(0, \mathbf{x}_0)$ を解いている. 但し, (9)式の偏微分方程式の解法は数値解法に依らざるを得ない. また, この方法では $\lambda(t) \triangleq \lambda(t, \mathbf{x})$ の関数形は得られない.

(8)式の関数形は未知なので, ここでは次のように展開表現して与えよう.

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t) [\mathbf{x}(t)]^i \quad (10)$$

いま, (2)式の $ff(\mathbf{x}(t))$ は $\mathbf{x}(t)$ の汎関数であり, $\lambda(t) \triangleq \lambda(t, \mathbf{x}(t))$ は $\mathbf{x}(t)$ について正則とみなせるので(10)式の展開表現は可能であると考えられる⁶⁾ 但し, $S_i(t)$ は A_i と同様に定義される時間関数のテンソルである. また, 因果律を考えて $i=0$ の項は省略した.

(10)式を(9)式に代入し, $\mathbf{x}(t)$ を消去することにより $S_i(t)$ について次の式を得る. (式の導出は付録.1で行っている.)

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) + S_i(t) A_i + A_i^T S_i(t) - S_i(t) BR^{-1} B^T S_i(t) + Q \\ = 0, \quad (i=1) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) + i S_i(t) (A_i - BR^{-1} B^T S_i(t)) \\ + (A_i - BR^{-1} B^T S_i(t))^T S_i(t) + S_i(t) A_i + i A_i^T S_i(t) \\ + \sum_{j=2}^{i-1} i_j \{ S_j(t) \times (A_{i-j+1} - BR^{-1} B^T S_{i-j+1}(t)) \\ + A_{i-j+1}^T S_{i-j+1}(t) \} = 0, \quad i=2, 3, \dots \quad (12) \end{aligned}$$

但し, $K < 1$ のとき $\sum_{i=K}^1 = 0$ である. また, また, $S_i(t)$ には次の関係がある.

$$S_i^T(t) = S_i(t) \quad (13)$$

$S_i(t)$ の境界条件は、共変ベクトルの終端条件と $\boldsymbol{x}(T)$ の任意性より次式で与えられる。

$$S_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

(11)式は $S_1(t)$ についてのRiccatiの微分方程式であり、(12)式は $S_i(t)$ ($i = 2, 3, \dots$) についての線形の微分方程式である。従って、 $S_i(t)$ は(14)式の終端条件のもとに低次より順に求めることができる。

特に、システムが線形のときは、共変ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(t)$ と状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ は線形関係となり、(11)式のRiccatiの微分方程式を解けば、共変ベクトルは $\boldsymbol{\lambda}(t) = S_i(t)\boldsymbol{x}(t)$ と求まり、(5)式の二点境界値問題は簡単に解ける。

これまでの、評価関数(5)式の制御時間を T として考察してきた。ここでは特に、制御時間 $T \rightarrow \infty$ なる無限過程を考えよう。このとき $S_i(t)$ は定数となり、その物理的実現が容易となる。すなわち、 S_i はRiccatiの定常行列方程式で、 S_i ($i = 2, 3, \dots$) は連立方程式で表せる。

$$S_1 A_1 + A_1^T S_1 - S_1 B R^{-1} B^T S_1 + Q = 0, \quad (i = 1) \quad (15)$$

$$i S_i (A_i - B R^{-1} B^T S_i) + (A_i - B R^{-1} B^T S_i)^T S_i + S_i A_i + i A_i^T S_i + \sum_{j=2}^{i-1} i_j S_{ij} (A_{i-j+1} - B R^{-1} B^T S_{i-j+1}) + A_{i-1}^T S_{i-1+1} \} 0, \quad i = 2, 3, \dots \quad (16)$$

以降からは、無限過程に限定して考察しよう。また、有限過程での共変系の解法は 4 節で新たに考察することにする。

3.2 解析接続を用いた適用領域の拡張

3.1 節では、共変ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(t)$ を $\boldsymbol{x}(t)$ で展開表現することを考えた。従って $\boldsymbol{\lambda}(t)$ は $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ を囲むある領域でしか展開表現可能でない。この節では、 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ をさらに広範囲な領域で展開表現することを考えよう。

ここでは、説明をわかり易くするために、1次元 ($n = m = 1$) の場合について考えよう。さらに、関数論の立場に立って、 x を実数から複素数に拡張しよう⁶⁾

(2)式より、 $f(\boldsymbol{x})$ は解析関数であることがわかる。従って、(5)式の \boldsymbol{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ の連立性より、 $\boldsymbol{\lambda} \triangleq \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ も解析関数であることがわかる。そこで、解析接続によって $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ の展開領域の拡張を試みる。

いま、ベキ級数 $\sum_{i=0}^{\infty} S_i x^i$ の収束領域を C としよう。すると、それは C 内で正則な関数 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ を表す。この関数の解析的延長を試みるために、 \boldsymbol{x}' を C 内の一点とすれば、 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は \boldsymbol{x}' においてベキ級数 $\sum_{i=0}^{\infty} S_i' (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^i$ に展開され、それは少くとも \boldsymbol{x}' を中心として C に内接する

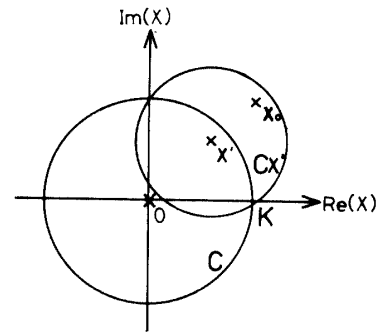


Fig. 1 Analytic continuation

円内では収束するが、その収束円 $C_{x'}$ はそれよりも大きいことはあろう。その場合、 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は C と $C_{x'}$ を合併した領域 K に延長される。このような接続を何回も繰り返すことによって展開領域を拡張していくことができる。

一般に、 n 次元の場合でも同様に考えることができる。このとき、点 \boldsymbol{x}' での展開係数 S_i' は次のように求めることができる。点 \boldsymbol{x}' では $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ はベキ級数 $\sum_{i=0}^{\infty} S_i [\boldsymbol{x}]^i$ でも $\sum_{i=0}^{\infty} S_i' [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^i]$ でも表現可能である。

そこで、 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ の \boldsymbol{x} での i 回微分も次の様に二通りの表現が可能である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^i} &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{(i+i_1)!}{i_1!} S_{i+i_1} [\boldsymbol{x}]^{i+i_1} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{(i+i_1)!}{i_1!} S_{i+i_1}' [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^{i+i_1}] \end{aligned}$$

上式で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ とおくことにより S_i' は求まる。

$$S_i' = \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{(i+i_1)!}{i_1! i_1!} S_{i+i_1} [\boldsymbol{x}]^{i+i_1} \quad (17)$$

次に、展開の中心 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ の決定法について考察しよう。線形システムについては、その最適解は解析的に求めることができる。そこで、対象としている非線形システムの線形化システムの最適解をもとに、展開の中心を決定しよう。まず、非線形システム(1)の非線形部分に定数 ϵ ($0 \leq \epsilon \leq 1$) をかけたシステムを考えよう。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_1 \boldsymbol{x} + \epsilon \left(\sum_{i=2}^{NA} A_i [\boldsymbol{x}]^i \right) + B \boldsymbol{u} \quad (18)$$

上式は $\epsilon = 1$ とすれば対象とするシステム(1)、(2)となり、 $\epsilon = 0$ とすればその線形化システムが得られる。 ϵ が小さいときはその最適軌道は線形システムの最適軌道に隣接することが予想される。そこで、展開の中心を線形化システムの軌道の上に複数個とり、 \boldsymbol{x} の変化

に応じてその展開点を切り換えてゆくことにより、 ϵ が小さいときの共変系の展開表現が \mathbf{x} の最適軌道上で可能となり、最適解を得ることができる。 ϵ を1まで少しずつ増加して行きながら、この方法を繰り返して行けば、対象とする非線形システム(1), (2)における共変系の展開の中心を決定することができる。

3.3 起動時における最適制御

これまで、システムの状態ベクトルをある初期値から原点に近ずける最適制御について考察してきた。しかし、実際の制御問題では状態ベクトルを原点に近ずける問題以外にも、起動時の制御のように状態ベクトルをある目標値に近ずける問題も存在する。そこで本節では、起動時における最適制御について考察しよう。

この場合、評価関数は(5)式に対応して次式を用いよう。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d)^T Q (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d) + \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t)\} dt \tag{19}$$

但し、 \mathbf{x}_d は目標値である。また、システムと共変系の方程式は(7)式に対応して次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - BR^{-1}B^T \boldsymbol{\lambda}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{20-a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -Q(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d) - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \boldsymbol{\lambda}(t) \tag{20-b}$$

目標値が原点($\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$)のとき、(5), (7)式はそれぞれ(19), (20)式に一致しており、状態ベクトルを原点に近ずける最適制御は、起動時における最適制御の特例とみなすことができる。

この場合の共変系の解法も、前節と同様に進めて行こう。まず、共変ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(t)$ を \mathbf{x}_d の回りで展開表現する。

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d)]^i \tag{21}$$

但し、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d$ のとき $\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0}$ より、上式は定数項 S_0 ($=\boldsymbol{\lambda}(t) | \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d$) を含んでいる。

3.1節のときと同様にして、 S_i の満足する式を導出する次式となる。(式の導出は付録.2で行った。)

$$S_1(A_{d0} - BR^{-1}B^T S_0) - Q\mathbf{x}_d + A_{d1}^T S_0 = \mathbf{0}, \quad (i=0) \tag{22}$$

$$S_1 A_{d1} + A_{d1}^T S_1 - S_1 B R^{-1} B^T S_1 + Q \\ + 2 S_2 (A_{d0} - BR^{-1}B^T S_1) + 2 A_{d2}^T S_0 = 0, \quad (i=1) \tag{23}$$

$$i S_i (A_{d1} - BR^{-1}B^T S_1) + (A_{d1} - BR^{-1}B^T S_1)^T S_i \\ + S_i A_{di} + i A_{di}^T S_i + \sum_{i_1=2}^{i-1} i_{i_1} \{S_{i_1} (A_{d(i-i_1+1)} - BR^{-1} \\ B^T S_{i-i_1+1}) + A_{d(i-i_1+1)}^T S_{i-i_1+1}\} + (i+1) \{S_{i+1} (A_{d0} \\ - BR^{-1}B^T S_0) + A_{d(i+1)}^T S_0\} = 0, \quad i=2, 3, \dots \tag{24}$$

但し、 A_{di} は $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d$ の回りで展開したときの展開係数であり次式で与えられる。

$$A_{di} = \sum_{i_1=0}^{N_A} \frac{(i+i_1)!}{i! i_1!} A_{i+i_1}(\mathbf{x}_d)^{i_1}, \quad i=0, 1, \dots, N_A \tag{25}$$

(23), (24)式はそれぞれ目標値が零のときの S_i の関係式(15), (16)式に対応しており、それらの式に S_{i+1} を含む項が加わった形になっている。これは、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ と $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}(t))$ の展開表現(付-6), (21)式に定数項が加わったことから来ている。(22), (23), (24)式は全て未知数 2^{i+2} に対し式の数 2^{i+1} であり、これらの式から S_i を一意に求めることは不可能である。そこでここでは次のような近似解法を考えよう。

次数 i が大きくなるに従って、 S_i の絶対値は小さくなってゆくことが期待される。そこで、 $M+1$ 次以降の S_i を零とおこう。すると $i=0$ から M までの全ての式で考えれば、式の数も未知数の数も $\sum_{i=1}^M 2^i$ となり一致する。従って、 $\{S_0, S_1, \dots, S_M\}$ は $\sum_{i=1}^M 2^i$ 次元の非線形連立方程式を解くことにより求まる。

ここで再び目標値が原点なる最適制御について考察しよう。 $\mathbf{x}(t)$ の値が大きいたまは共変ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(t)$ は原点で展開不可能である。そこで、 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'$ の回りで展開することを考えた。この場合も $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'$ での展開係数 S_i' も(22), (23), (24)式を満足する。これらの式からは S_i' は一意に求めることはできないので、3.2節では解析接続によって S_i' を求めることを考えた。しかし、本節で述べたように $M+1$ 次以降の S_i' を零とおくことによって近似解を求めることも考えられる。

4. 最適制御における共変系の修正

3節では、共変ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(t)$ を状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ で展開表現することを考えた。このとき $S_i(t)$ は(11), (12)式の連立微分方程式を解くことによって得られる。

特に、無限過程のとき、展開係数は定数 S_i となり、(15), (16)式の連立方程式の解として得られ、計算が容易となる。

また、制御時間 T が十分長いときの最適解は、無限過程の最適解にほとんど一致するものと考えられる。そこで、有限過程のときは、3.2節の方法で直接最適解を求めるより、まずこの方法で無限過程の最適解を求め、この解を修正することにより有限過程での最適解を求める方が容易であろう。

本章では、繰り返し計算により共変ベクトルの初期値 $\lambda(0)$ を推定することを考えよう。すなわち、次の評価関数 $I(\lambda(0))$ を $\lambda(0)$ に関して最小化することにより、共変ベクトルの初期値 $\lambda^*(0)$ を推定しよう。

$$I(\lambda(0)) = \alpha J(T) + (1 - \alpha) \cdot \lambda(T)^T \lambda(T) \quad (26)$$

$$I(\lambda^*(0)) = \text{Min}_{\lambda(0)} I(\lambda(0))$$

但し、ここでは(5)式の評価関数 J を制御時間 T の関数とみなして $J(T)$ と書いた。また、 $0 \leq \alpha \leq 1$ である。

(26)式の最小化には非線形最適化手法を用いるので、評価関数 $I(\lambda(0))$ の $\lambda(0)$ についての偏微分を求めておく必要がある。

$$\frac{\partial I(\lambda(0))}{\partial \lambda(0)} = \alpha \frac{\partial J(T)}{\partial \lambda(0)} + (1 - \alpha) \lambda^T(T) \frac{\partial \lambda(T)}{\partial \lambda(0)} \quad (27)$$

上式右辺第1項は(5)式より次のように与えられる。

$$\frac{\partial J(T)}{\partial \lambda(0)} = \int_0^T \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \lambda(0)} + \lambda^T(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial \lambda(t)}{\partial \lambda(0)} \right\} dt \quad (28)$$

従って、(26)、(27)式を求めるためには、次の微分方程式を解かなくてはならない。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (29-a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \lambda(t), \quad \lambda(0) = \hat{\lambda}_0 \quad (29-b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \lambda(0)} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \lambda(0)} \right) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \left(\frac{\partial \lambda(t)}{\partial \lambda(0)}, \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \lambda(0)} \right) = 0 \quad (29-c)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda(t)}{\partial \lambda(0)} \right) = -\mathbf{Q} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \lambda(0)} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \lambda(0)} \right) \lambda(t) - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \left(\frac{\partial \lambda(t)}{\partial \lambda(0)} \right), \quad \frac{\partial \lambda(0)}{\partial \lambda(0)} = \mathbf{I} \quad (29-d)$$

但し、共変ベクトルの初期条件 $\hat{\lambda}_0$ は初期設定値として無限過程で求めた解を用いればよい。

5. 数値例

本手法の有効性を確認するため、実際によく見受けられる代表的な3つの汎関数展開形非線形システムを対象として数値計算を行った⁵⁾。但し、微分方程式の数値解法は4次のRunge-Kuttaの公式を、評価関数の数値積分は4次のNewton-Coetsの公式を、サンプリングタイム 10^{-2} として用いた。

非線形システムと評価関数を以下に示す。

(a) Duffing形システム

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + \epsilon(x_1^2 + x_1^3) + u \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right\} dt \end{aligned}$$

(b) Van der Pol システム

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \epsilon(1 - x_2^2)x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right\} dt \end{aligned}$$

(c) Rayleighシステム

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 1.4(1 - 0.1x_2^2)x_2 + 4u \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right\} dt \end{aligned}$$

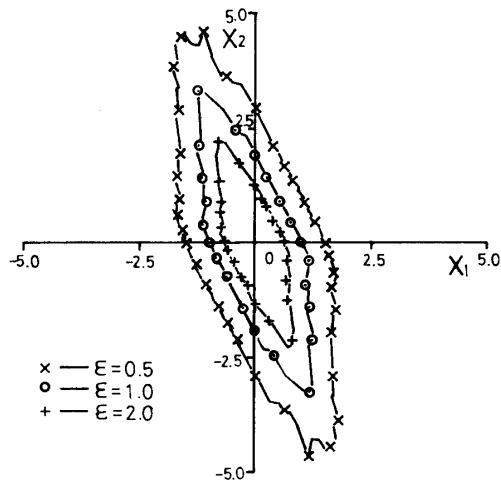
但し、無限過程 ($T \rightarrow \infty$) での最適解は3節で提案した方法より求め、次に有限過程での最適解は4節で提案した方法より求めた。

5.1 無限過程

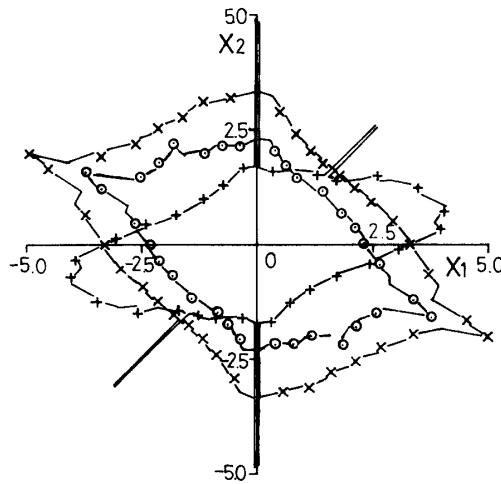
共変ベクトル λ は状態ベクトル \mathbf{x} で展開して求める。Fig. 2 に λ を \mathbf{x} の原点の回りで展開したときの、その展開領域を示す。但し、計算上の精度と計算時間を考慮し、展開項数を最大80とし、 λ が3ケタ以上収束する領域として展開領域を定義した。

Duffing形システムでは非線形の部分にかかる係数 ϵ が大きくなるほど、展開領域は小さくなっている。一般にシステムの非線形性が強いほど、展開領域は狭いようである。このことは、システムの非線形性が強いほど、線形近似の有効な領域が狭くなることから推測される。

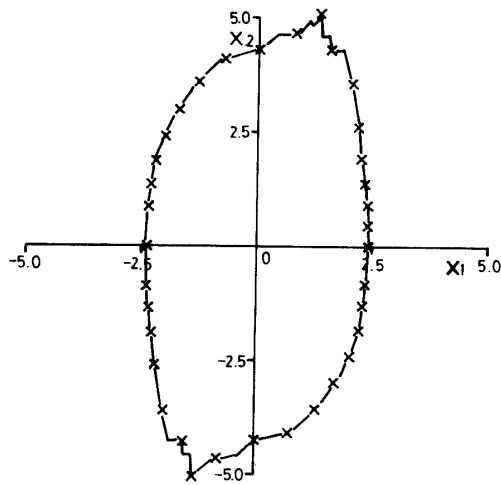
次に、展開表現した共変ベクトルを用い、実際に最適解を求めた。



(a) Duffing type system



(b) Van der Pol system



(c) Rayleigh system

Fig. 2 Convergence region of covariant vector

Table. 1 Relation number of expansion and criterion

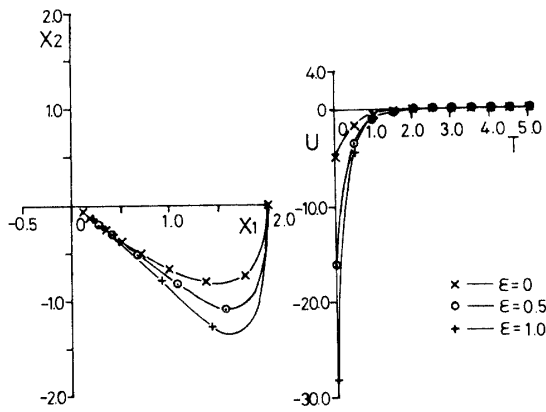
System	Criterion		
	Duffing type ststem $\epsilon=1 \quad \mathbf{x}(0)=(1,0)^T$	Van Del Pol ststem $\epsilon=1 \quad \mathbf{x}(0)=(0,1)^T$	Rayleigh system $\mathbf{x}(0)=(-2,-2)^T$
1	∞	1.457973840394507	2.814774502591159
3	3.869943252313368	1.435687469238336	2.732213809069096
5	3.857540765846936	1.435480690781273	2.731406100176484
7	3.856865262031767	1.435480855697429	2.731054052663907
9	3.856826281451928	1.435480846111391	2.731021621598963
11	3.856818421573135	1.435480846849642	2.731038785582181
13	3.856816507355375	1.435480847168556	2.731036963522368
15	3.856815124149783	1.435480847098531	2.731036320662099
17	3.856814941456900	1.435480847109374	2.731018821780298
19	3.856814591985213	1.435480847107823	2.731016073237352

まず、共変ベクトル λ が原点で展開可能となる領域に \mathbf{x} がある場合について最適解を求めた。Table. 1にそれぞれのシステムの展開項数と評価関数の関係を示す。

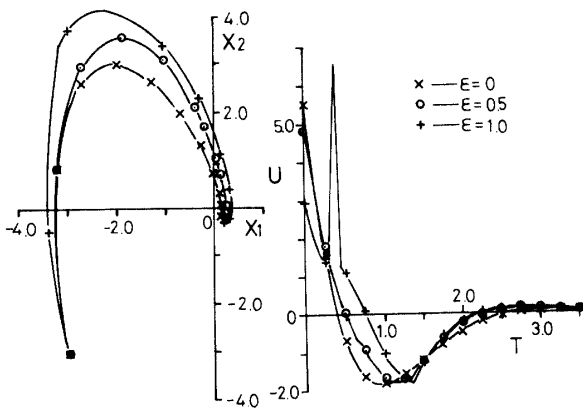
本方法では共変ベクトルは常に \mathbf{x} の関数として与えられており、近似誤差が増大してゆくことなく、解は安定である。ここで取り上げたシステムでは、全て展開項数を数項とれば十分最適に近い解が得られた。例えば、展開項数5のとき、評価関数の値はDuffing形システムで4ケタ、Van der Polシステムで10ケタRayleighシステムで5ケタ収束している。

次に、共変ベクトルが原点で展開不可能な領域に \mathbf{x} がある場合について最適解を求めた。この場合、解析接続を用いて、軌道近傍の点で共変ベクトルを展開表現し、軌道の推移に応じて展開の中心を切り換えて行けばよい。Fig. 3-(a)に $\mathbf{x}(0)=(2,0)^T$ 、 $\epsilon=1$ のときのDuffing形システムの解軌跡と制御入力を示す。但し、展開の中心は3.2節で説明した通り、線形解から非線形度を増して行くことにより求めた。この場合、展開の中心は線形化システムの最適軌道近傍に4点 $(2,0)^T$ 、 $(1.2,-0.8)^T$ 、 $(0.7,-0.5)^T$ 、 $(0,0)^T$ 、ととれば、非線形度を少しずつ上げてゆくことなく、直接対象とするシステムの最適解が求まった。Fig. 3-(a)には参考のため非線形度 $\epsilon=0,0.5$ の解軌跡も示した。また、Fig. 3-(b)には $\mathbf{x}(0)=(-3,-3)^T$ 、のときのRayleighシステムの解軌跡と制御入力を示す。この場合、非線形度 $\epsilon=0.5$ の解軌跡近傍に4点 $(-3,-1.5)^T$ 、 $(-3,1.5)^T$ 、 $(-1.2,2.8)^T$ 、 $(0,0)^T$ 、と展開の中心をとれば対象とするシステムの解が求まった。

解析接続を用いる場合、(17式)を用いて、ある点の共



(a) Duffing type system



(b) Rayleigh system

Fig. 3 Trajectory of $x(t), u(t)$

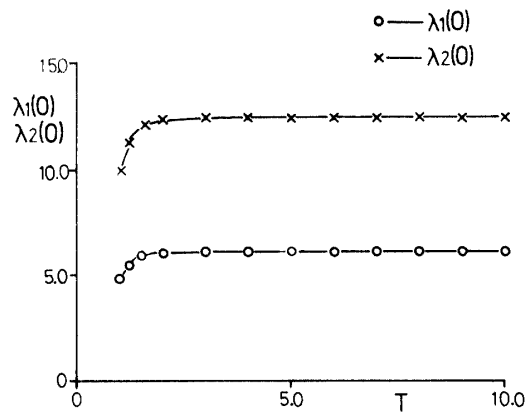
変ベクトルの展開係数より、別の点の展開係数を展開表現して求める。(17式を見ればわかるように、高次の展の展開係数ほど収束が悪いことがわかる。さらに、計算の都合上、展開項数は有限項で近似せざるを得ない。例えば、80次まで展開項を用いるとすると、それより別の点での展開係数を(17式で展開表現する場合、展開係数の次数が i のとき展開項数は $80 - i$ となり、高次の展開係数ほど精度が悪くなる。このことは、接続を何回も繰り返すことによりさらに増大する。従って、 x の動作範囲がより広範になると、原点の回りで展開したときの展開係数をより高次まで求めておかななくては精度のよい解は得られない。この問題については、解析接続の手法の改良(例えば、3.3節で考察した方法など)を行うことにより解決したい。

5.2 有限過程

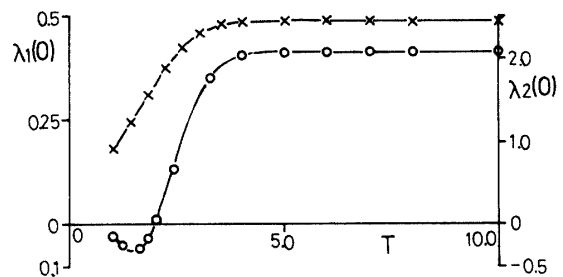
4節で考察した手法による無限過程での最適解をも

とに、5節で考察した手法により有限過程での最適解を求めた。Fig. 4にそれぞれのシステムの制御時間 T と共変ベクトルの初期値 $\lambda(0)$ の関係を示す。但し、(26式)の評価の最適化にはFletcher-Powell法を用いた。また、その収束判定は共変ベクトルの終端 $\lambda(T)$ が 10^{-10} 以下になることを基準とした。

共変ベクトルの初期値 $\lambda(0)$ は、制御時間が長くなるに従い、無限過程の $\lambda(0)$ に収束していることがわかる。例えば、 $T = 8$ では、Duffing形システムで6ケタ、Van der Polシステムで5ケタ収束している。



(a) Duffing type system ($\epsilon = 1$)



(b) Van der Pol system ($\epsilon = 1$)

Fig. 4 Relation of control time T and initial value of covariant vector $\lambda(0)$

6. 結 言

本論では、非線形システムの最適制御について考察した。最大原理を用いて、最適制御を解く場合、問題はシステムの状態変数とその共変系の二点境界値問題に帰着される。そこで、共変ベクトルを状態ベクトルの関数とみなし、状態ベクトルで展開表現することを考えた。そして、その展開係数が満足する式を導出し、それらの式から展開係数を一意に求めた。この方法は状態ベクトルの動作範囲が広範になると適用が困難に

なる。そこで、解析接続を利用し、展開の中心を原点以外に複数個決定し、状態ベクトルの値に応じて展開の中心を切り換えて行くことにより問題を解決した。さらに、数値例により、展開項数を上げてゆくことにより解が最適解に収束していることを確認した。

本手法は無限過程のとき、展開係数は定数となり、最適制御則は時不変となり適用が容易となる。

今後の課題としては、解析接続の方法を改良し、さらに適用可能な領域を拡張することと、対象とする非線形システムの一般化の2点が考えられる。

最後に、御討議いただいた田中正吾助教授、小林康秀助手に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) J.T.Tou : “現代制御理論”, コロナ社, 1966
- 2) 日野幹雄: “境界値問題の解法”, 朝倉書店, 1981
- 3) G.H.Meyer : “Initial value methods for boundary value problems”, Academic Press, 1973
- 4) E.G.Gilbert : “Functional expansions for the response of nonlinear differential systems,” IEEE, Trans. Automat. Contr., AC-22, 909/921, (1977)
- 5) 清水辰二郎: “非線形振動論”, 培風館, 1965
- 6) 高木貞治: “解析概論”, 岩波書店, 1961

(昭和61年3月25日受理)

付 録

付録. 1 (11), (12), (13)式の導出

(10)式を(9)式に代入し、テンソルの演算公式③を用いて整理することにより次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{S}_i(\mathbf{x})^i + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \{i_1 S_{i_1} (A_{i_2} - BR^{-1}B^T S_{i_2}) + i_1 A_{i_1}^T S_{i_2}\} \times [\mathbf{x}]^{i_1+i_2-1} + Q\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (付-1)$$

上式第2項において $i = i_1 + i_2 - 1$ なる変数変換を行うことにより総和の部分は次のように変形できる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^i$$

従って、(付-1)式は次のように整理できる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \dot{S}_i + \sum_{i_1=1}^{i-1} i_1 \{ S_{i_1} (A_{i-i_1+1} - BR^{-1}B^T S_{i-i_1+1}) + A_{i_1}^T S_{i-i_1+1} \} \right\} [\mathbf{x}]^i + Q\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (付-2)$$

上式は \mathbf{x} についての恒等式とみなすことができる。そこで、 $[\mathbf{x}]^i$ にかかる項を零とおき、 S_i について整理す

ることにより(11)式 ($i = 1$), (12)式 ($i = 2, 3, \dots$)を得る。

次に(13)式の導出を行う。最大原理より、共変ベクトル $\dot{\lambda}$ は次式を満足する。

$$\dot{\lambda} = - \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \quad (付-3)$$

ここで、Hamiltonian H は \mathbf{x} の関数とみなせるので \mathbf{x} で展開表現できる。

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(\mathbf{x})^{i+1} \quad (付-4)$$

但し、 H_i は全ての次元が対象な ($H_i^T = H_i$), (2)式の A_i と同様なテンソルである。(付-4)式を(付-3)式に代入し、テンソルの微分公式④を用いることによって次式を得る。

$$\dot{\lambda} = - \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) H_i(\mathbf{x})^i \quad (付-5)$$

任意の \mathbf{x} について $\lambda_1 / \lambda_2 = \dot{\lambda}_1 / \dot{\lambda}_2$ が成立するが、そのためには λ と $\dot{\lambda}$ のそれぞれに対応する係数が比例しなくてはならない。いま、 $\dot{\lambda}$ の展開係数において $H_i^T = H_i$ が成立する。従って、それに対応する λ の展開係数についても $S_i^T = S_i$ ((13)式)が成立しなくてはならない。

付録. 2 (22), (23), (24)式の導出

いま、共変ベクトル λ は(21)式のように $\mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ の回りで展開されているので、(2)式の $ff(\mathbf{x})$ も対応して次の様に表わそう。

$$ff(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{NA} A_{di} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)]^i \quad (付-6)$$

但し、 A_{di} は式(25)より求まる。この場合、(21), (付-6)式に $i = 0$ の項が含まれるので、(付-2)式に対応して次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i_1=0}^i (i_1+1) \{ S_{i_1} (A_{d_{i-i_1}} - BR^{-1}B^T S_{i-i_1}) + A_{d_{i_1}}^T S_{i-i_1} \} \right\} [\mathbf{x}]^i + Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i_1=1}^i i_1 \{ S_{i_1} (A_{d_{i-i_1+1}} - BR^{-1}B^T S_{i-i_1+1}) + A_{d_{i_1}}^T S_{i-i_1+1} \} + (i+1) \{ S_{i+1} (A_{d_0} - BR^{-1}B^T S_0) + A_{d_{i+1}}^T S_0 \} \right\} [\mathbf{x}]^i + Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \mathbf{0} \quad (付-7) \end{aligned}$$

上式は \mathbf{x} についての恒等式とみなすことができるので、この式より(22)式 ($i = 0$), (23)式 ($i = 1$), (24)式 ($i = 2, 3, \dots$) が得られる。