

薄肉閉断面曲線ばりの断面変形理論とPC箱桁解析への適用

高海 克彦・上高 克弘・浜田 純夫

Modified Beam Theory Considering Cross-Sectional Distortion of Thin-Walled Closed Section Beam and Its Application to Analysis of PC box Girders

Katsuhiko TAKAMI, Katsuhiko UEKOU and Sumio HAMADA

Abstract

The governing equation of distortional behavior of a curved beam with thin-walled closed section is herein derived assuming the strain field based on the modification of the conventional beam theory.

This equation is used to analyze additional stresses due to distortion of PC curved box girders. It is shown that the radius of curvature, the shape of cross-section and loading conditions affect the additional axial stress of the girders.

1. 緒言

近年の高強度材料の開発および施工技術の革新に伴って、土木構造物の薄肉化、軽量化が図られ、この傾向は益々進んで行くと思われる。

鋼橋に限らず、プレストレストコンクリート(PC)橋においても、アウターケーブルの採用等によりウェブ厚の減少が図られるなど薄肉化が促進され、また道路橋ランプ部やループ橋など曲率の大きな桁も、PC箱桁橋として設計されている。この様な、PC曲線箱桁も薄肉断面として扱うので、当然断面変形の発生が予想される。PC桁ではひびわれ制御のため、発生する引張応力は低く抑えられねばならないが、断面変形が生じれば付加的引張応力が発生する。しかし、断面変形については、現行の道路橋示方書にも規定されておらず、従来ほとんど問題にされなかった。

既に箱桁などの薄肉ばりについては、断面剛の仮定に基づく曲げねじり理論が完成されており、設計実務に広く用いられていることを考慮すれば、断面変形を考慮するPC箱桁についても、既往の曲げねじり理論による変位と応力を、それぞれ初期変位、初期応力と

して求めた後、断面変形にともなう付加変位と付加応力を算定して初期値を補正するのが実用的であり、また断面変形挙動の特性を明らかにすることができる。

本報告は、文献¹⁾の直線ばりに対する理論を拡張して、薄肉閉断面曲線ばりの一次元断面変形支配方程式の明確な誘導をし、PC曲線箱桁の断面変形解析を行い、その挙動について考察するものである。

2. 基本仮定と断面変形の定義

Fig. 1のようにN枚の薄板からなる多角形薄肉閉断面曲線ばりを考える。このばりを扱う上で次の仮定を設ける。

- 1) はりの挙動は線形微小理論にしたがう。
- 2) 材料の構成則は、Hookeの法則にしたがう。
- 3) 薄板要素の板厚は、他の断面寸法に比べて小さく、また板厚中心線のはり軸直角方向伸縮は無視する。
- 4) 薄肉ばりのSt. Venantのねじりに伴う、せん断ひずみ以外のすべてのせん断ひずみは無視する。

この曲線ばりの曲率中心線上の点Oを原点とする円柱座標 (ρ, α, ξ) を定める。はりの中立点をO、せん断中心をS、各断面の中立点およびせん断中心を連ねた軸線の曲率半径を、それぞれ R_0, R_s とする。中立点Oを原点として、曲率面に平行および垂直な直交

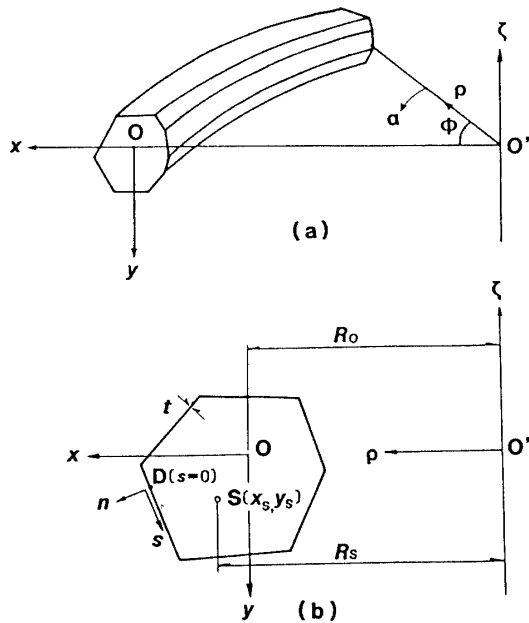


Fig. 1 (a) General view and coordinate system. (b) Geometry of a thin-walled closed section of curved beam.

座標 (x, y) を設ければ、中立点の定義から次式が成り立つ。

$$\int_A \frac{x}{\rho} dA = 0, \quad \int_A \frac{y}{\rho} dA = 0 \quad (1)$$

ここに、 A ははりの断面積である。
 さらに、はり断面内の任意点 D を原点とする流動直交座標 (n, s) を設け、板厚 t は s の関数とする。
 薄板の接合点を節点とよび、Fig. 2 のようにこの節点の $x-y$ 面内変位を伴う板要素の横方向面外曲げを断面変形と定義し、これを隣接する薄板の反時計回り

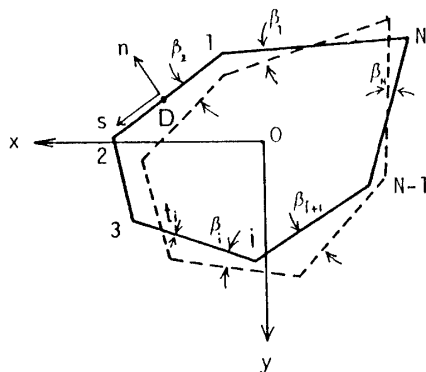


Fig. 2 Distortion of a closed section beam.

の回転角 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の差により次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \beta_i - \beta_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \\ \theta_N &= \beta_N - \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

θ_i は板要素 i の板要素 $i+1$ に対する反時計回りの相対回転角を表す。本理論では、基本仮定および変形後の断面の閉合条件から N 個の断面変形 θ_i は互いに独立ではなく、次の関係を満たさなければならない。

$$\sum_{i=1}^{N-1} \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_N) \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - y_N) \theta_i = 0 \quad (3)$$

ここに、 $(x_i, y_i), (x_N, y_N)$ はそれぞれ節点 i および N の x, y 座標である。

したがって、 N 個の相対回転角は 3 個の条件を有するゆえ、断面変形の自由度は $N-3$ となる。

3. 断面変形の変位場とひずみ場

3.1 初期変位と初期応力

曲線ばりに関する既往の断面剛を仮定する曲げねじり理論から得られる、せん断中心 $S(x_s, y_s)$ の x, y 方向変位 $u_s^{(0)}, v_s^{(0)}$ 、回転角 $\psi^{(0)}$ および軸方向変位 w_s を、本題における初期変位とよぶ。この初期変位に対応するひずみは、軸方向垂直ひずみ $\epsilon_\alpha^{(0)}$ と、St. Venant のねじりによるせん断ひずみ $\gamma_{s\alpha}^{(0)}$ であり、ひずみに対応する初期応力が次式によって与えられる。

$$\sigma_\alpha^{(0)} = E \epsilon_\alpha^{(0)}, \quad \tau_{s\alpha}^{(0)} = G \gamma_{s\alpha}^{(0)}$$

ここに、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数である。

3.2 断面変形に伴う付加変位と付加ひずみ

はりが、2. で定義した N 個の相対回転角 θ_i を生じる断面変形状態で、初期変位もそれぞれ $u_s^{(0)} + u_s, v_s^{(0)} + v_s, w_s^{(0)} + w_s, \psi^{(0)} + \psi$ に変化するものとし、未知量 u_s, v_s, w_s, ψ を断面変形に伴う付加変位とよぶ。 N 個の相対回転角のうち 1 個は式 (3) の第 1 式から除去できるので、断面内任意点の x, y 方向付加変位 u, v は $N-1$ 個の断面変形 θ_i を用いて次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \psi - \sum_{i=1}^{N-1} (y - y_i) \mu_i \theta_i \\ v &= v_s + (x - x_s) \psi + \sum_{i=1}^{N-1} (x - x_i) \mu_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし,

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & (s \leq s_i) \\ 0 & (s > s_i) \end{cases}$$

ここに, s_i は節点 i の s 座標である.

付加変位 u, v を n, s 方向変位 ξ, η に座標変換すると, 次式になる.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u_s \ell + v_s m - h_s \psi - \sum_{i=1}^{N-1} r_{si} \mu_i \theta_i \\ \eta &= -u_s m + v_s \ell + h_n \psi + \sum_{i=1}^{N-1} r_{ni} \mu_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに, h_n, h_s, r_{ni}, r_{si} は, せん断中心 S および節点 i から任意点に引いた位置ベクトルの n および s 方向成分, ℓ, m は方向余弦である.

さて, 薄板中央面内の付加せん断ひずみ γ_{sa}^* を次のように仮定する.

$$\gamma_{sa}^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{W}{\rho} \right) = \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^2 \frac{\bar{q}}{Gt} \quad (7)$$

ここに, \bar{q} は α のみの関数, t は板厚である.

式 (7) に式 (6) を代入して積分すると, 閉断面の軸方向変位 w の連続条件から, \bar{q} は次式で表される.

$$\bar{q} = G \left\{ k \left(\frac{\psi'}{R_s} - \frac{v'_s}{R_s^2} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} k_i \frac{\theta'_i}{R_s} \right\} \quad (8)$$

ここに, ()' は α に関する微係数を表す. また,

$$k = \frac{2\Omega}{R_s^3 \int \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds}, \quad k_i = \frac{2\Omega_i}{R_s^3 \int \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds}$$

ただし,

$$2\Omega = R_s^2 \int \frac{1}{\rho^2} h_n ds, \quad 2\Omega_i = R_s^2 \int \frac{1}{\rho^2} r_{ni} \mu_i ds$$

式 (8) を式 (7) に代入して更に整理すれば, 軸方向付加変位 w は次式で表される.

$$w = w_s - (x - x_s) \left(\frac{u'_s}{R_s} - \frac{w'_s}{R_s} \right) - (y - y_s) \frac{v'_s}{R_s}$$

$$+ \omega \left(\frac{\psi'}{R_s} - \frac{v'_s}{R_s^2} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\rho}{R_s} (\psi_i - \psi_{is}) \frac{\theta'_i}{R_s} \quad (9)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \omega &= R_s \rho \int \frac{1}{s \rho^2} \left(\frac{k}{t} - h_m \right) ds, \\ \psi_i &= R_s^2 \int_s^{s_i} \frac{1}{\rho^2} (r_{ni} \mu_i - \frac{R_s}{\rho} \frac{k_i}{t}) ds \end{aligned}$$

ψ はせん断中心 S における, ψ_i の値である.

せん断中心 S の位置および s 座標の原点 D の位置は, ねじりの単位そり関数が次式を満たすように決められている.

$$\begin{aligned} \int_A \frac{R_s}{\rho} \omega dA &= 0, \quad \int_A \frac{R_s}{\rho} \omega x dA = 0, \\ \int_A \frac{R_s}{\rho} \omega y dA &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

断面変形に伴う付加軸方向ひずみ ϵ_α は次のように表される.

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \alpha} + u \right\} \\ &= \bar{\epsilon}_\alpha + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (\psi_i - \psi_{is}) \frac{\theta'_i}{R_s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_s}{\rho} (y - y_i) \mu_i \frac{\theta_i}{R_s} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに, $\bar{\epsilon}_\alpha$ は付加軸方向ひずみに含まれる剛体ひずみ成分であり, 次式で表される.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_\alpha &= \frac{R_s}{\rho} \left\{ \epsilon - (x - x_s) \kappa_y - (y - y_s) \kappa_x + \omega v \right\} \\ \epsilon &= \frac{1}{R_s} (w'_s + u_s), \quad \kappa_y = \frac{1}{R_s^2} (u''_s - w'_s) \\ \kappa_x &= \frac{1}{R_s^2} (v''_s + R_s \psi), \quad v = \frac{1}{R_s^2} \left(\psi'' - \frac{v''_s}{R_s} \right) \end{aligned}$$

付加せん断ひずみとしては, 式 (7) から導かれる次式で表される St. Venant のねじりによる γ_{sa} が考えられるが, 簡易化のため無視できると考える.

$$\begin{aligned} \gamma_{sa} &= \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^2 \frac{\bar{q}}{Gt} = \frac{R_s^2}{\rho^2 t} \cdot \\ &\quad \left\{ k \left(\frac{\psi'}{R_s} - \frac{v'_s}{R_s^2} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} k_i \frac{\theta'_i}{R_s} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

4. 断面変形に伴う付加応力

4.1 付加垂直応力および付加せん断応力

断面変形に伴う軸方向付加垂直応力が次式で表され

る。

$$\sigma_\alpha = E \epsilon_\alpha \tag{14}$$

付加せん断応力 $\tau_{s\alpha}$ は、式 (14) の付加垂直応力との次式のつりあいから求められる。

$$\left(\frac{R_s}{\rho}\right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \tau_{s\alpha} t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma_\alpha t = 0 \tag{15}$$

しかるに式 (4) の初期応力 $\sigma_\alpha^{(0)}$ 、 $\tau_{s\alpha}^{(0)}$ が既に外力とのつりあい条件を満たしているゆえ、付加応力は自己平衡でなければならない。すなわち次式が成り立つ。

$$\int_A \sigma_\alpha dA = 0, \int_A \sigma_\alpha x dA = 0, \int_A \sigma_\alpha y dA = 0, \int_A \tau_{s\alpha} h_n dA = 0 \tag{16}$$

式 (13) の $\gamma_{s\alpha} = 0$ から得られる関係と、式 (14) を式 (16) に代入し演算を行うと、断面変形に伴う軸方向付加垂直応力が次のように得られる。

$$\sigma_\alpha = E \frac{R_s}{\rho} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \Psi_i \frac{\theta_i''}{R_s} - \Phi_i \frac{\theta_i}{R_s} \right\} \tag{17}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i &= \frac{\rho}{R_s} (\psi_i - \psi_{is}) - C_{i0} - x C_{iy} - y C_{ix} - \omega C_{i\omega} \\ \Phi_i &= (y - y_i) \mu_i - D_{i0} - x D_{iy} - y D_{ix} \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

ただし、

7つの係数 C_{i0} 、 C_{iy} 、 \dots 、 D_{ix} は断面形によって決まる定数。

4.2 横方向曲げモーメント

曲線ばりの軸方向単位幅で切り出される多角形閉フレームをラーメンと考え、断面変形に伴う横方向曲げモーメントを次式で与える。

$$M_s = \sum_{i=1}^{N-1} M_i \theta_i \tag{19}$$

ただし、 M_i は単位の断面変形 $\theta_i = 1$ のときにラーメンに生ずる曲げモーメント。

薄板の断面二次モーメントを I_s とすれば、軸直角方向付加垂直応力は次のように表される。

$$\sigma_s = \frac{M_s}{I_s} n \tag{20}$$

5. つりあい方程式と境界条件

5.1 仮想仕事方程式

薄肉曲線ばりの単位表面積当りに作用する力の n 、 s 、 α 方向成分を \bar{p}_n 、 \bar{p}_s 、 \bar{p}_α とし、またはりの両端断

面 ($\alpha = 0$ 、 ϕ) に作用する単位面積当りの力の n 、 s 、 α 方向成分を \bar{p}_n 、 \bar{p}_s 、 \bar{p}_α とする。

上記の外力を受けて断面変形を生じたはりの内力は既知の初期応力と未知の付加応力の和となる。式 (13) の条件式の内後半の2式に Lagrange の未定係数 λ_1 、 λ_2 を導入すれば、断面変形時のつりあい方程式が次の仮想方程式で表される。

$$\int_c \phi \int_s \int_n \left\{ (\sigma_\alpha^{(0)} + \sigma_\alpha) \delta \epsilon_\alpha + \sigma_s \delta \epsilon_s + \tau_{s\alpha}^{(0)} \delta \gamma_{s\alpha} \right\} \rho dndsd\alpha + \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^\phi \delta \cdot \left\{ \lambda_1 (x_i - x_N) \theta_i + \lambda_2 (y_i - y_N) \theta_i \right\} R_s d\alpha - \int_0^\phi \int_s (p_n \delta \xi + p_s \delta \eta + p_\alpha \delta \omega) \rho dsd\alpha - [n_\alpha \int_A (\bar{p}_n \delta \xi + \bar{p}_s \delta \eta + \bar{p}_\alpha \delta \omega) dA] \phi_0 = 0 \tag{21}$$

$$\text{ただし、} n_\alpha = \begin{cases} -1 & (\alpha = 0) \\ 1 & (\alpha = \phi) \end{cases}$$

しかるに、式 (21) の仮想変位と仮想ひずみの内、断面剛の仮定を満足する成分を $\delta \bar{\xi}$ 、 $\delta \bar{\eta}$ 、 $\delta \bar{\omega}$ 、 $\delta \bar{\epsilon}_\alpha$ 、 $\delta \bar{\gamma}_{s\alpha}$ とすれば、初期応力と初期ひずみに関する次の仮想仕事方程式が成り立つ。

$$\int_0^\phi \int_s \int_n (\sigma_\alpha^{(0)} \delta \bar{\epsilon}_\alpha + \tau_{s\alpha}^{(0)} \delta \bar{\gamma}_{s\alpha}) \rho dndsd\alpha - \int_0^\phi \int_s (p_n \delta \bar{\xi} + p_s \delta \bar{\eta} + p_\alpha \delta \bar{\omega}) \rho dsd\alpha - [n_\alpha \int_A (\bar{p}_n \delta \bar{\xi} + \bar{p}_s \delta \bar{\eta} + \bar{p}_\alpha \delta \bar{\omega}) dA] \phi_0 = 0 \tag{22}$$

式 (21) から式 (22) を差し引けば、薄肉閉断面ばりの断面変形を支配する仮想仕事方程式が得られる。

$$\int_c \phi \int_s \int_n \left[\sigma_\alpha \delta \epsilon_\alpha + \sigma_s \delta \epsilon_s + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_\alpha^{(0)} \left\{ (\psi_i - \psi_{is}) \frac{\delta \theta_i''}{R_s} - \frac{R_s}{\rho} (y - y_i) \mu_i \frac{\delta \theta_i}{R_s} \right\} + \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^2 \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{s\alpha}^{(0)} \frac{\delta \theta_i'}{t} \right] \rho dndsd\alpha + \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^\phi \delta \cdot \left\{ \lambda_1 (x_i - x_N) \theta_i + \lambda_2 (y_i - y_N) \theta_i \right\} R_s d\alpha - \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^\phi \int_s \left\{ (p_s r_{ni} - p_n r_{si}) \mu_i \delta \theta_i + p_\alpha \frac{\rho}{R_s} (\psi_i - \psi_{is}) \frac{\delta \theta_i'}{R_s} \right\} \rho dsd\alpha$$

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ n_{\alpha} \int_A \left\{ (\bar{p}_s r_{ni} - \bar{p}_n r_{si}) \mu_i \delta \theta_i + \bar{p}_{\alpha} \frac{\rho}{R_s} \right. \right. \\ & (\psi_i - \psi_s) \\ & \left. \left. \frac{\delta \theta'_i}{R_s} \right\} dA \right\} \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式 (23) に式 (17), (20) を代入し部分積分を施して整理すれば, 薄肉閉断面曲線ばりのつりあい条件と境界条件に等価な仮想仕事方程式が結局次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} & R_s \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^{\phi} \left\{ \frac{M_{\psi_i}'}{R_s^2} - \frac{M_{\phi_i}}{R_s} + F_{si} - \frac{T_i^{(0)'}}{R_s} - \frac{M_{\chi_i}^{(0)'}}{R_s} \right. \\ & - 2\Omega_i \frac{q_{st}^{(0)'}}{R_s} - m_{\alpha i} \\ & + \lambda_1 (x_i - x_N) + \lambda_2 (y_i - y_N) \left. \right\} \delta \theta_i d\alpha \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left[(M_{\psi_i} + M_{\psi_i}^{(0)'}) - n_{\alpha} \bar{M}_{\psi_i} \right] \frac{\delta \theta'_i}{R_s} \\ & - \left(\frac{M_{\psi_i}'}{R_s} + \frac{M_{\psi_i}^{(0)'}}{R_s} - q_{st}^{(0)' } - m_{\psi_i} + n_{\alpha} \bar{T}_i \right) \delta \theta_i \left. \right\} \phi = \\ & 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここに, M_{ψ_i} , M_{ϕ_i} , F_{si} は次式で表される断面力と合力である.

$$\left. \begin{aligned} M_{\psi_i} &= \sum_{j=1}^{N-1} E \left(I_{ij} \frac{\theta_j''}{R_s^2} - J_{ij} \frac{\theta_j}{R_s} \right) \\ M_{\phi_i} &= \sum_{j=1}^{N-1} E \left(J_{ij} \frac{\theta_j''}{R_s^2} - K_{ij} \frac{\theta_j}{R_s} \right) \\ F_{si} &= \sum_{j=1}^{N-1} f_{ij} \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} I_{ij} &= \int_A \frac{R_s}{\rho} \Psi_i \Psi_j dA, \quad J_{ij} = \int_A \frac{R_s}{\rho} \Psi_i \Psi_j dA, \\ K_{ij} &= \int_A \frac{R_s}{\rho} \Phi_i \Phi_j dA, \quad f_{ij} = \int_A \frac{M_i M_j}{EI_s} ds \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

また, $M_{\psi_i}^{(0)'}$, $M_{\chi_i}^{(0)'}$ と $T_i^{(0)'}$ は初期応力 $\sigma_{\alpha}^{(0)'}$ と $\sigma_{\alpha}^{(0)'}$ につり合うせん断流 $q^{(0)'}$ に関して定義される次式の断面力である.

$$\left. \begin{aligned} M_{\psi_i}^{(0)'} &= \int_A \frac{\rho}{R_s} \sigma_{\alpha}^{(0)'} (\psi_i - \psi_s) dA \\ M_{\chi_i}^{(0)'} &= \int_A \sigma_{\alpha}^{(0)'} (y - y_i) \mu_i dA \\ T_i^{(0)'} &= \int_A \left(\frac{R_s}{\rho} \right) q^{(0)'} \left(r_{ni} - \frac{R_s}{\rho} \frac{k_i}{t} \right) dA \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$m_{\alpha i}$, m_{ψ_i} は単位表面積当りに作用する外力 P に関して単位長さ当りに, また \bar{T}_i と \bar{M}_{ψ_i} は両端断面に作用する外力 \bar{P} に関して定義される次式の合力である.

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha i} &= \int_s \frac{\rho}{R_s} (p_s r_{ni} - p_n r_{si}) \mu_i ds \\ m_{\psi_i} &= \int_s \left(\frac{\rho}{R_s} \right)^2 p_{\alpha} (\psi_i - \psi_s) ds \\ \bar{T}_i &= \int_A (\bar{p}_s r_{ni} - \bar{p}_n r_{si}) \mu_i dA \\ \bar{M}_{\psi_i} &= \int_A \frac{\rho}{R_s} \bar{p}_{\alpha} (\psi_i - \psi_s) dA \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$q_{st}^{(0)'}$ は St. Venant のねじりのみによる初期せん断流である.

5.2 支配方程式と境界条件

任意の仮想変位 $\delta \theta_i$ に対して, 式 (24) が成立するための必要十分条件から, 断面変形問題のつりあい方程式および境界条件が次のように得られる.

つりあい方程式

$$\left. \begin{aligned} & \frac{M_{\psi_i}'}{R_s^2} - \frac{M_{\phi_i}}{R_s} + F_{si} - \frac{T_i^{(0)'}}{R_s} - \frac{M_{\chi_i}^{(0)'}}{R_s} - 2\Omega_i \frac{q_{st}^{(0)'}}{R_s} - m_{\alpha i} \\ & + \lambda_1 (x_i - x_N) + \lambda_2 (y_i - y_N) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

($i=1, 2, \dots, N-1$)

付帯条件

$$\sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_N) \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - y_N) \theta_i = 0 \quad (30)$$

境界条件 $\alpha=0$, ϕ において

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \bar{C}_i \text{ または } M_{\psi_i} + M_{\psi_i}^{(0)'} - n_{\alpha} \bar{M}_{\psi_i} = 0 \\ \bar{\theta}_i &= \bar{D}_i \text{ または } \frac{M_{\psi_i}'}{R_s} + \frac{M_{\psi_i}^{(0)'}}{R_s} - q_{st}^{(0)'} - m_{\psi_i} + n_{\alpha} \bar{T}_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

($i=1, 2, \dots, N-1$)

ここに, \bar{C}_i , \bar{D}_i は境界で与えられる値である.

式 (29) を変位で表せば, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} & E \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ I_{ij} \frac{\theta_j''''}{R_s^4} - \frac{1}{R_s} (J_{ij} + J_{ji}) \frac{\theta_j''}{R_s^2} + \left(\frac{k_{ji}}{R_s} + \frac{f_{ij}}{E} \right) \theta_j \right\} \\ & - \frac{T_i^{(0)'}}{R_s} - \frac{M_{\chi_i}^{(0)'}}{R_s} - 2\Omega_i q_{st}^{(0)'} - m_{\alpha i} \\ & + \lambda_1 (x_i - x_N) + \lambda_2 (y_i - y_N) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

($i=1, 2, \dots, N-1$)

8. PC箱桁の断面変形解析

8.1 支配方程式

通常の箱桁は Fig. 3 のように 4 枚の薄板からなるので, 断面変形の自由度は $N-3$ で, 式 (32) の支配方程式は 3 元連立微分方程式となる. しかるに, 断面の閉合条件から, 例えば節点 2 の断面変形 θ_2 を基準とす

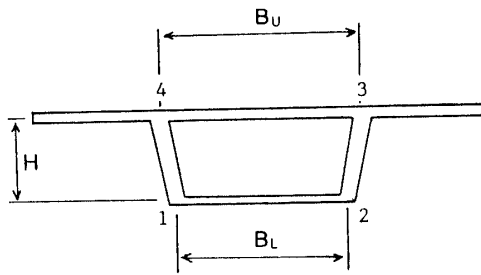


Fig. 3 Cross-section of trapezoidal box girder.

れば、他の $\theta_1, \theta_3, \theta_4$ は次のように表される。

$$\theta_1 = -\theta_2, \theta_3 = -(B_L/B_U)\theta_2, \theta_4 = (B_L/B_U)\theta_2 \quad (33)$$

ここに、 B_L, B_U はそれぞれ下、上フランジ幅である。先の連立方程式において、 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ に関する付帯条件を考慮すると、Lagrange の未定常数 λ_1, λ_2 を消去でき、さらに式 (33) から θ_1, θ_3 を消去すれば、箱桁の断面変形の支配方程式は、最終的に次の θ_2 に関する式となる。

$$EI_{22} \frac{\theta_2''''}{R_s^4} + f\theta_2 - (Am_t + BM_\omega + C \frac{M_x}{R_s}) = 0 \quad (34)$$

ここに、 f は横方向曲げ剛性に関する定数、 A, B, C は箱桁の断面形によって決まる定数、 m_t は外荷重トルク、 M_ω, M_x はそれぞれ既往の曲げねじり理論によるバイモーメントおよび曲げモーメントである。

8.2 解析モデルと境界条件

Fig. 4 に示すコンパクト断面の、支間30mの単純PC箱桁を解析モデルとする。対比モデルとして、断面二次モーメントおよび各板厚は同一で、 B_L/H (=下フランジ幅/桁高) が2となる偏平断面桁をモデル2とする。

本計算では、断面変形に伴う付加応力に対する曲率の影響を調べるため、これらのモデルに対し、曲率半径を ∞ (直線) ~ 50mとして解析する。桁端部は剛な隔壁で断面変形は防止され、中間隔壁は用いない。断面変形を生じさせる荷重は主として外荷重トルクと曲げモーメントであり、曲線桁では死荷重曲げモーメントも断面変形を起こすが、本解析では偏載活荷重のみを用いる。偏載荷重としては、示方書のL-20荷重をモデル化し、上フランジ幅の半分の荷重を節点3(内曲側)上または節点4(外曲側)上に載荷する。コンクリートのヤング係数は $3.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とする。

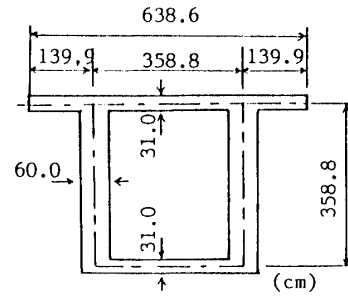


Fig. 4 Dimensions of box.

8.3 解析結果と考察

Fig. 5 に外曲側載荷時に引張応力となる、支間中央断面の節点1の断面変形に伴う付加垂直応力と断面剛のはり理論による応力の比を、横軸に曲率半径を採って

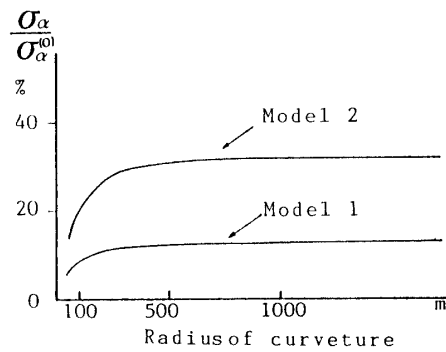


Fig. 5 Ratio of additional to initial stresses. (loading on the outer web)

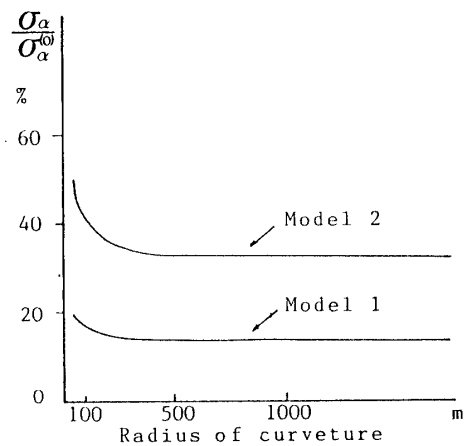


Fig. 6 Ratio of additional to initial stresses. (loading on the inner web)

示す。また Fig. 6 に同様に内曲側載荷時に引張応力となる節点2の支間中央断面における付加垂直応力と断面剛を仮定するはり理論による垂直応力の比を示す。両図から明らかなように、断面変形に伴う付加応力ははり理論による応力の15~50%であり、偏平断面であるモデル2がその比は大きいことが分かる。また特に、曲率半径が300m以下になると、その比は外曲側載荷では減少し、内曲側載荷では増加している。この相違は、はり理論による応力は、いずれの載荷でもほとんど変わらないのに対し、断面変形の支配方程式 (34) の左辺3~5項で表される荷重項において、内曲側載荷ではトルクと曲げモーメントによる項が同符号で加算されるのに対して、外曲側載荷では打ち消し合い、断面変形惹起荷重そのものが小さくなるためと考えられる。したがって、曲率半径が小さくなると曲げモーメントの影響を強く受けることになる。

断面変形に伴う付加応力の低減のために、中間隔壁の設置が考えられるが、PC曲線箱桁では、隔壁が構造自体の自重を増やし、結果的に曲げモーメントを増加させることを考えると、断面変形防止対策は慎重に行われなければならないと考えられる。

9. 結語

任意多角形薄肉閉断面ばりの断面変形の支配方程式

の誘導を明らかにし、PC箱桁の断面変形挙動解析への適用を行った。対象としたPC曲線箱桁の断面変形に対する曲率の影響を調べ、考察を加えた。その結果、内曲側載荷の場合、曲率半径が小さいと付加応力とはり理論による応力の比が、急激に大きくなることが分かった。

今後、PC箱桁構造としてよく用いられる変断面桁および連続桁に対し、本研究で開発した理論の適用を図り、断面変形挙動を明かにし、設計への資料としたい。

参考文献

- 1) 高海克彦・彦坂 熙：薄肉単室閉断面ばりの断面変形挙動の定式化，九州大学工学集報，第60巻，第1号，pp.9~16，昭和62年1月
- 2) H. Hikosaka and K. Takami：Formulation of Distortional Behavior of Thin-Walled Curved Beam with Open Cross Section, Proc. JSCE, No. 356/I-3, pp.91-100, Apr. 1985
- 3) 白杵恒雄：断面変形を考慮した曲線多室箱桁橋の理論と解析，構造工学論文集，Vol.34A, pp.87~100，1989年3月

(平成元年4月15日受理)