

左右動, ローリング及びヨーイング運動する 鉄道車両による橋げたの動的応答に関する研究

會田 忠義*・楠窪 剛**・池上 豊和**

Study on Dynamic Response of Girders under Moving Railway
Vehicles with Side Swaying, Rolling and Yawing motions

Tadayoshi AIDA, Tsuyoshi KUSUKUBO and Toyokazu IKEGAMI

Abstract

Studies of railway vehicle-girder interaction, investigations of dynamic response of girders under moving railway vehicles with bouncing and pitching motions, were carried out to data. But dynamic analysis of girders under moving ones with side swaying, rolling and yawing motions is not studied in detail and is necessary for design of high speed railway bridge.

The purpose of this paper are to investigate the behavior of response of girders due to a single vehicle of Shinkansen with side swaying, rolling and yawing motions and to make clear the relations of speed parameter and maximum dynamic response. As a result of this investigation, it became clear that the girder was not influenced considerably by the side swaying, rolling and yawing motions of a railway vehicle.

1. まえがき

鉄道車両と橋げたとの相互作用に関する研究, 特に上下及びピッチング運動する車両による橋げたの動的調査はこれまでに詳細に行われ¹⁾現在の鉄道橋の設計に適用されていることは周知の通りである。一方, 左右, ローリング及びヨーイング運動する車両による橋げたの動的調査は, 一般に, コンクリート床版を有する橋げたの水平曲げ剛性が鉛直曲げ剛性に比べて大きいこと, また, 車両の運動による橋げたに作用する水平力は鉛直力に比べて小さいことが予想されることから, 等閑視されている。しかし, 列車の走行速度の向上の著しい昨今, 左右, ローリング及びヨーイング運動する車両による橋げたの動的挙動の調査は必要であろう。

本研究は, 日本国有鉄道の新幹線車両モデル²⁾を用い車両と橋げたとの動的相互作用, 特に, 橋げたの動的応答を調査するのを目的とする。車両としては単一車両を想定した。調査には, スパン8.2m から31.5m の5種類の上路プレートガーダとスパン30m の実橋を

対象とした。前者の5種のけたは国鉄在来線のKS-18用定規けた³⁾を, 主げた間隔を新幹線サイズに修正したけた(モデルけた)である。

はじめに, 車両と橋げたの連成振動の運動方程式を示す。次に, 運動方程式を数値積分することによりけたの最大応答を求め, 車両の走行速度変化にともなう動的応答の挙動を示す。

2. 車両の力学モデルとその運動方程式ならびに動特性

力学モデルは国鉄において設定されたモデルをすべて線形化し, 修正したものである。すべてのばね及びダンパーにはストッパーは取り付けられていない。以下に, 左右, ローリング及びヨーイング系の力学モデルとその運動方程式を示す。

2.1 力学モデル²⁾

Fig. 1 に力学モデルと座標系を示す。モデル中の各記号及び諸元は次の通りである。(重心)

G_B : 車体の重心

G_{Ti} : 台車の重心 ($i = 1, 2$, 1: 前台車, 2: 後台車)

G_{wij} : 輪軸の重心 ($i = 1, 2$, $j = 1, 2$)

*建設工学科

**大学院建設工学専攻

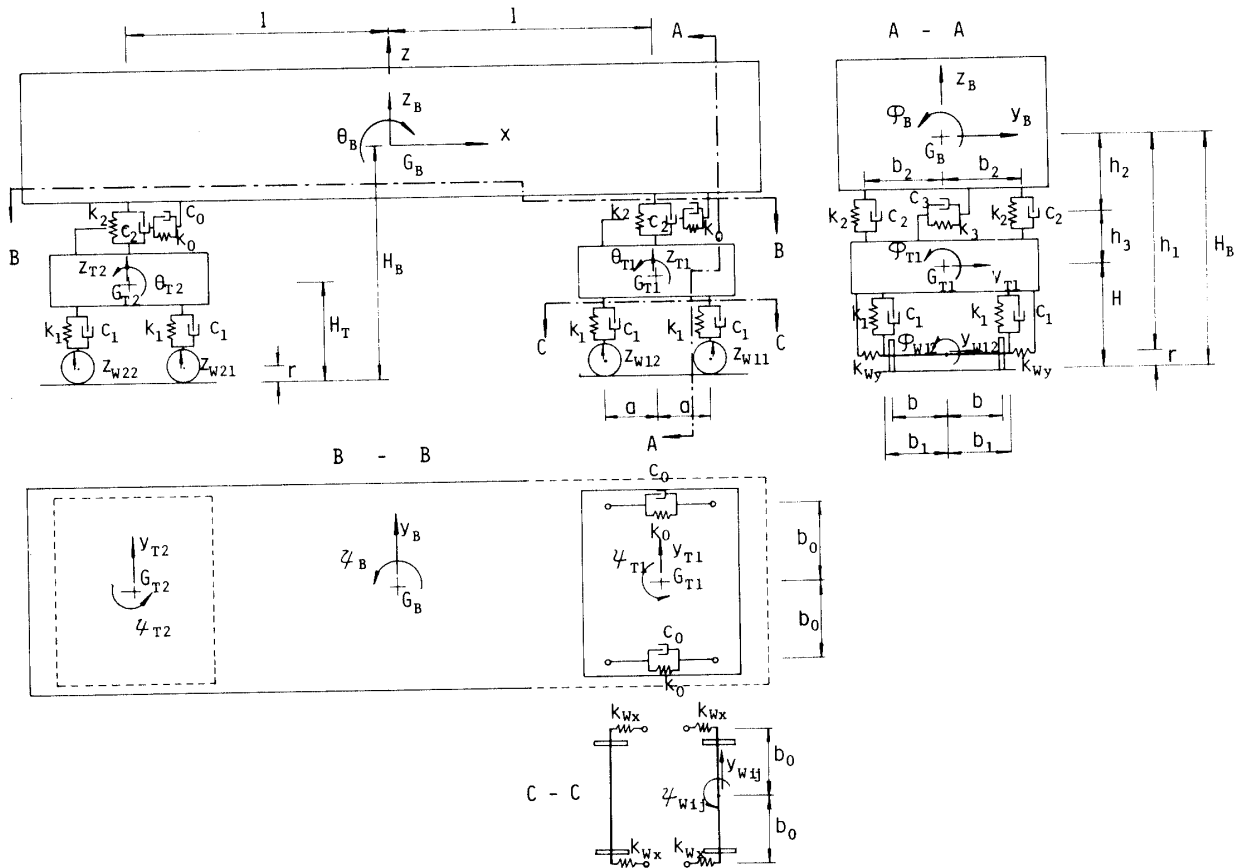


Fig. 1 Linearized mechanical model of Shinkansen vehicle.

- | | |
|---------------------------------|--|
| $j = 1$: 各台車の前輪軸 | y_B : 車体の左右変位 |
| $j = 2$: 各台車の後輪軸 | ϕ_B : 車体のロール角変位 |
| (車両の寸法とばねの取り付け位置) | ψ_B : 車体のヨーイング角変位 |
| l : 前後台車の心ざら間距離の 2 分の 1 | z_B : 車体の上下変位 |
| | θ_B : 車体のピッチ角変位 |
| a : 軸距の 2 分の 1 | y_{T1} : 台車の左右変位 ($i = 1$: 前台車, $i = 2$: 後台車) |
| b : 車輪とレールの左右接触点間隔の 2 分の 1 | ϕ_{T1} : 台車のロール角変位 |
| | ψ_{T1} : 台車のヨー角変位 |
| b_0 : ボルスタ・アンカ位置の左右間隔の 2 分の 1 | z_{T1} : 台車の上下変位 |
| | θ_{T1} : 台車のピッチ角変位 |
| b_1 : 軸ばねの左右間隔の 2 分の 1 | y_{Wij} : i 番台車, j 番車軸の左右変位 |
| b_2 : 枕ばねの左右間隔の 2 分の 1 | ϕ_{Wij} : i 番台車, j 番車軸のその重心まわり回転角 |
| H_B : レール面上車体重心の高さ | ψ_{Wij} : i 番台車, j 番車軸のその重心まわり回転角 |
| H_T : レール面上台車重心の高さ | z_{Wij} : i 番台車, j 番車軸の上下変位 ($i = 1, 2$) |
| h_1 : 車軸中心より車体重心までの高さ | ($j = 1$: 前輪, $j = 2$: 後輪) |
| h_2 : 枕ばね中心より車体重心までの高さ | (質量特性) |
| | m_B : 車体の質量 |
| h_3 : 台車重心より枕ばね中心までの高さ | I_{BX} : 車体のローリングに対する慣性モーメント |
| | |
| r : 車輪の公称半径 | I_{BZ} : 車体のヨーイングに対する慣性モーメント |
| (車両の変位) | |

- I_{By} : 車体のピッチングに対する慣性モーメント : 174.56ts²/m
- m_T : 台車の質量 : 0.671ts/m
- I_{Tx} : 台車のローリングに対する慣性モーメント : 0.484ts²m
- I_{Tz} : 台車のヨーイングに対する慣性モーメント : 0.966ts²m
- I_{Ty} : 台車のピッチングに対する慣性モーメント : 0.966ts²m
- m_w : 車軸の質量 : 0.2985ts²/m
- I_{wx} : } 車軸のその重心まわりの慣性モーメント
- I_{wz} : } : 0.1679ts²m

(ばね定数と減衰係数)

- k_1 : 軸ばねのばね定数 : 113.6t/m
- c_1 : // 減衰係数 : 1.5ts/m
- k_2 : 枕ばねの上下ばね定数 : 42.5t/m
- c_2 : // 上下減衰係数 : 2.0ts/m
- k_3 : 枕ばねの左右ばね定数 : 33.0t/m
- c_3 : // 左右減衰係数 : 3.0ts/m
- k_0 : ボルスタ・アンカのばね定数 : 500.0t/m
- c_0 : // // 減衰係数 : 0 ts/m
- k_{wx} : 軸前後ばね定数 : 1500.0t/m
- k_{wy} : 軸左右ばね定数 : 500.0t/m

2.2 運動方程式

車体及び台車の運動方程式を次に示す。

(車体の左右動の運動方程式)

$$m_B \ddot{y}_B + c_3 \sum_{i=1}^2 \{ (\dot{y}_B - (-1)^i \ell \dot{\psi}_B + h_2 \dot{\varphi}_B) - y_{Ti} - h_3 \dot{\varphi}_{Ti} \} + k_3 \sum_{i=1}^2 \{ (y_B - (-1)^i \ell \psi_B + h_2 \varphi_B) - (y_{Ti} - h_3 \varphi_{Ti}) \} = 0 \quad (1)$$

(車体のローリングの運動方程式)

$$I_{Bx} \ddot{\varphi}_B + 2b_2^2 c_2 \sum_{i=1}^2 (\dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_{Ti}) + 2b_2^2 k_2 \sum_{i=1}^2 (\varphi_B - \varphi_{Ti}) + h_2 c_3 \times \sum_{i=1}^2 \{ (\dot{y}_B - (-1)^i \ell \dot{\psi}_B + h_2 \dot{\varphi}_B) - (\dot{y}_{Ti} - h_3 \dot{\varphi}_{Ti}) \} + h_2 k_3 \sum_{i=1}^2 \{ (y_B - (-1)^i \ell \psi_B + h_2 \varphi_B) - (y_{Ti} - h_3 \varphi_{Ti}) \} = 0$$

(車体のヨーイングの運動方程式)

$$I_{Bz} \ddot{\psi}_B + 2b_0^2 k_0 \sum_{i=1}^2 (\psi_B - \psi_{Ti}) - c_3 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ell \{ (\dot{y}_B - (-1)^i \ell \dot{\psi}_B + h_2 \dot{\varphi}_B) - (\dot{y}_{Ti} - h_3 \dot{\varphi}_{Ti}) \} - k_3 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ell \{ (y_B - (-1)^i \ell \psi_B + h_2 \varphi_B) - (y_{Ti} - h_3 \varphi_{Ti}) \} = 0 \quad (3)$$

(台車の左右動の運動方程式)

$$m_T \ddot{y}_{Ti} - c_3 \{ (\dot{y}_B - (-1)^i \ell \dot{\psi}_B + h_2 \dot{\varphi}_B) - (\dot{y}_{Ti} - h_3 \dot{\varphi}_{Ti}) \} - k_3 \{ (y_B - (-1)^i \ell \psi_B + h_2 \varphi_B) - (y_{Ti} - h_3 \varphi_{Ti}) \} + 2k_{wy} \sum_{j=1}^2 \{ (y_{Ti} + (H_T - r) \varphi_{Ti} - (-1)^j a \psi_{Ti}) - y_{w_{ij}} \} = 0 \quad (4)$$

(台車のローリングの運動方程式)

$$I_{Tx} \ddot{\varphi}_{Ti} - 2b_2^2 c_2 (\dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_{Ti}) - 2b_2^2 k_2 (\varphi_B - \varphi_{Ti}) + 2b_2^2 c_1 \sum_{j=1}^2 (\dot{\varphi}_{Ti} - \dot{\varphi}_{w_{ij}}) + 2b_2^2 k_1 \sum_{j=1}^2 (\varphi_{Ti} - \varphi_{w_{ij}}) + h_3 c_3 \{ (\dot{y}_B - (-1)^i \ell \dot{\psi}_B + h_2 \dot{\varphi}_B) - (\dot{y}_{Ti} - h_3 \dot{\varphi}_{Ti}) \} + h_3 k_3 \{ (y_B - (-1)^i \ell \psi_B + h_2 \varphi_B) - (y_{Ti} - h_3 \varphi_{Ti}) \} + 2k_{wy} (H_T - r) \sum_{j=1}^2 \{ (y_{Ti} + (H_T - r) \varphi_{Ti} - (-1)^j a \psi_{Ti}) - y_{w_{ij}} \} = 0 \quad i=1, 2 \quad (5)$$

(台車のヨーイングの運動方程式)

$$I_{Tz} \ddot{\psi}_{Ti} - 2b_0^2 k_0 (\psi_B - \psi_{Ti}) + 2b_0^2 k_{wx} \sum_{j=1}^2 (\psi_{Ti} - \psi_{w_{ij}}) - 2ak_{wy} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \{ (y_{Ti} + (H_T - r) \varphi_{Ti} - (-1)^j a \psi_{Ti}) - y_{w_{ij}} \} = 0 \quad i=1, 2 \quad (6)$$

輪軸の運動方程式は、輪軸が橋げたと一体となって運動すると考えると、輪軸のみの運動方程式をたてる必要はない。橋げたに輪軸の慣性力及び慣性モーメントと、台車から受ける力とモーメントを考慮すればよい。台車からけたに作用する力及びモーメントは次の値である。

橋軸直角水平 (y 方向) 力……

$$-m_w \ddot{y}_{w_{ij}} + 2k_{wy} \{ (y_{Ti} + (H_T - r) \varphi_{Ti} - (-1)^j a \psi_{Ti}) - y_{w_{ij}} \}$$

橋軸(X軸)まわりモーメント……

$$-I_{wx} \ddot{\varphi}_{w_{ij}} + 2b_2^2 c_1 (\dot{\varphi}_{Ti} - \dot{\varphi}_{w_{ij}}) + 2b_2^2 k_1 (\varphi_{Ti} - \varphi_{w_{ij}})$$

橋軸直角鉛直軸(Z軸)まわりのモーメント……

$$-I_{wz} \ddot{\psi}_{w_{ij}} + 2b_0^2 k_{wx} (\psi_{Ti} - \psi_{w_{ij}}) \quad (7)$$

本研究の主目的が橋の応答を明らかにすることから、計算を簡単化するため、輪軸のヨーイングの影響を無視するとともに、軸ばねの前後ばね定数 k_{wx} をゼロとして橋げたに作用する橋軸直角鉛直軸まわりの外部モーメントを無視した。この場合について、上記の運動方程式(1)~(6)をマトリックス表示すると、次式となる。

$$\mathbf{M}_H \mathbf{\ddot{d}}_H + \mathbf{C}_H \mathbf{\dot{d}}_H + \mathbf{K}_H \mathbf{d}_H + \mathbf{G}_C \mathbf{g}_H + \mathbf{G}_K \mathbf{g}_H = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで

$$\mathbf{d}_H = \{ y_B, \varphi_B, \psi_B, y_{T1}, \varphi_{T1}, \psi_{T1}, y_{T2}, \varphi_{T2}, \psi_{T2} \}^T \dots \quad (9)$$

$$\mathbf{g}_H = \{ y_{w11}, y_{w12}, y_{w21}, y_{w22}, \varphi_{w11}, \varphi_{w12}, \varphi_{w21}, \varphi_{w22} \}^T \dots \quad (10)$$

$\mathbf{M}_H, \mathbf{C}_H, \mathbf{K}_H, \mathbf{G}_C$ 及び \mathbf{G}_K を付録に示す。

2.3 車両の動特性

車両の運動方程式(8)において、輪軸の変位 $y_{w_{ij}}, \varphi_{w_{ij}}$ 及び $\psi_{w_{ij}}$ の変位をゼロとし、さらに、 $\mathbf{C}_H = \mathbf{0}$ として、非減衰時の自由振動の運動方程式より、固有値解析した結果を Fig. 2 に示す。

3. 車両と橋げたの連成振動の運動方程式

3.1 けたの水平及びねじり振動の運動方程式

Fig. 3 に示す断面を有するけたにおいて、水平荷重 $q_y(x, t)$, モーメント $m_x(x, t)$ 及び $m_z(x, t)$ を

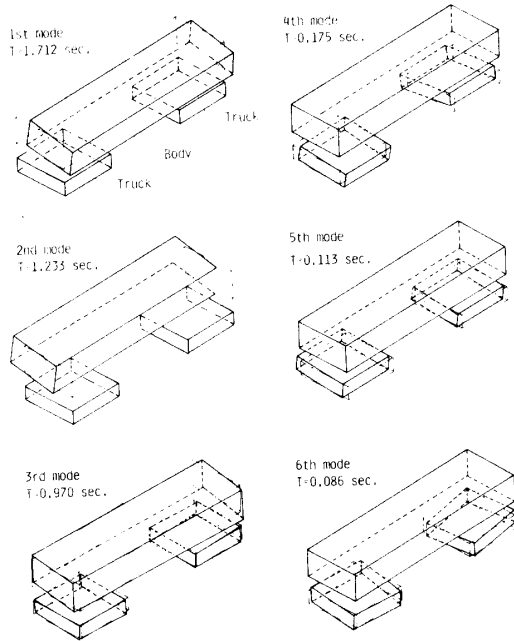


Fig. 2 Natural periods and modes of a single vehicle.

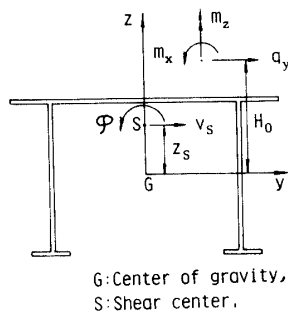


Fig. 3 Displacements, loads and system of coordinates.

受けて、せん断中心 S に $v_s(x, t)$, $w_s(x, t)$ 及び $\varphi(x, t)$ なる変位が生ずるとき、けたの水平及びねじり振動の運動方程式は次式で表わされる。

$$m\ddot{v}_s + m z_s \ddot{\varphi} + \eta_v \dot{v}_s + EI_{yy} v_s^{(iii)} - q_y + m_z = 0 \dots \dots (11)$$

$$\mu I_{ps} \ddot{\varphi} + m z_s \ddot{v}_s + \eta_\varphi \dot{\varphi} + EI_w \varphi^{(iii)} - GK \varphi^{(ii)} - m_x + q_y \times (H_0 - z_s) = 0 \dots \dots (12)$$

式中

- m : けたの単位長さ質量
- μ : けたの単位体積質量
- μI_{ps} : けたの単位長さの質量の慣性モーメント
- η_v, η_φ : けたの水平及びねじり振動の減衰係数
- EI_{yy} : けた断面の Z 軸に関する曲げ剛性
- EI^s : けた断面の曲げねじり剛性
- GK : けた断面のねじり剛性
- $(\dot{\quad}) = \partial/\partial t, (\ddot{\quad}) = \partial^2/\partial t^2$

運動方程式(11)及び(12)の解を次式で表わす。

$$v_s(x, t) = \sum_{K=1}^{\infty} \sigma_K(t) v_{sK}(x)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{K=1}^{\infty} \tau_K(t) \varphi_K(x) \dots \dots (13)$$

ここで、 σ_K 及び τ_K は未知の時間関数 (基準座標) であり、 $v_{sK}(x)$ はけたの水平曲げ振動の K 次の固有関数、 $\varphi_K(x)$ はねじり振動の K 次の固有関係である。単純けたの支間を L とするとき、 v_{sK} 及び φ_K はそれぞれ次式で表わされる。

$$v_{sK}(x) = \varphi_K(x) = \sin \frac{k\pi x}{L} \dots \dots (14)$$

以下の解析に当って、解(13)を K 項からなる級数で近似する。

式(13)及び(14)を運動方程式(11)及び(12)に代入整理すると、次式となる。

$$\ddot{\sigma}_K + z_s \ddot{\tau}_K + \frac{\eta_v}{m} \dot{\sigma}_K + \omega_{vK}^2 \sigma_K = \frac{2}{mL} \left(\int_0^L q_y v_{sK} dx - \int_0^L m_z v_{sK} dx \right) \dots \dots (15)$$

$$\ddot{\tau}_K + \frac{m z_s}{\mu I_{ps}} \ddot{\sigma}_K + \frac{\eta_\varphi}{\mu I_{ps}} \dot{\tau}_K + \omega_{\varphi K}^2 \tau_K = \frac{2}{\mu I_{ps} L} \left(\int_0^L m_x \varphi_K dx - (H_0 - z_s) \int_0^L q_y \varphi_K dx \right) \dots \dots (16)$$

$K = 1, 2, \dots \dots K$

$$\omega_{vK} = \sqrt{\frac{EI_{yy}}{m} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2}$$

$$\omega_{\varphi K} = \sqrt{\frac{EI_w^s}{\mu I_{ps}} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 + \frac{GK}{\mu I_{ps}} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2}$$

本研究では、既述の通り計算を簡単化するため、けたに作用する荷重中、輪軸のヨーイングの影響を無視するとともに、Z 軸まわりのモーメント m_z を無視し、 q_y 及び m_x のみを考慮した。これらの荷重は、車両の先端の輪軸がけたの左端にあるとき ($t = 0$) を基準にすると、t 時刻後それぞれ次式で表わされる。(Fig. 4 参照)

$$q_y(x, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [-m_w \ddot{y}_{wij} + 2k_{wy} \{ (y_{Ti} + (H_T - r) \varphi_{Ti} - (-1)^j a \psi_{Tij} - y_{wij}) \}] \delta(x - \xi_{ij}) \dots \dots (17)$$

$$m_x(x, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-I_{wx} \ddot{\varphi}_{wij} + 2b_i^2 c_1 (\dot{\varphi}_{Ti} - \dot{\varphi}_{wij}) + 2b_i^2 K_i (\varphi_{Ti} - \varphi_{wij})) \delta(x - \xi_{ij}) \dots \dots (18)$$

$$\xi_{ij} = Vt - 2\ell(i-1) + a(j-1) \dots \dots (19)$$

式中、 y_{wij} 及び φ_{wij} はけたの変位による第 i 番目の台車の第 j 番目の輪軸の水平変位及びロール角を表わす。けたと輪軸が同じ運動をするとき、これらの変位は、それぞれ、けたのせん断中心の変位 v_s 及び φ で次のように表わされる。

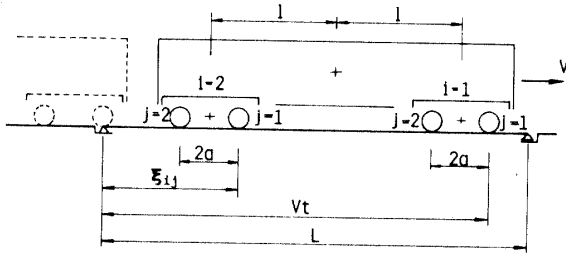


Fig. 4 Position of vehicle on girder.

$$\left. \begin{aligned} y_{w1j} &= \sum_{n=1}^K \sigma_n(t) v_{sn}(x) - (H_0 - z_s) \\ &\times \sum_{n=1}^K \tau_n(t) \varphi_n(x) \Big|_{x=\xi_{1j}} \\ \varphi_{w1j} &= \sum_{n=1}^K \tau_n(t) \varphi_n(x) \Big|_{x=\xi_{1j}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

さらに，式(19)及び(20)を運動方程式(15)及び(16)に代入整理すると，次式となる。

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_k + \frac{2m_w}{mL} \sum_{n=1}^K A_{1nk} \ddot{\sigma}_n + z_s \ddot{\tau}_k - \frac{2m_w(H_0 - z_s)}{mL} \\ \times \sum_{n=1}^K A_{4nk} \ddot{\tau}_n + \frac{\eta v}{m} \dot{\sigma}_k + \frac{4m_w V}{mL} \sum_{n=1}^K A_{2nk} \dot{\sigma}_n \\ - \frac{4m_w(H_0 - z_s)V}{mL} \sum_{n=1}^K A_{5nk} \dot{\tau}_n + \omega_{vK}^2 \sigma_k \\ + \frac{2m_w V^2}{mL} \sum_{n=1}^K A_{3nk} \sigma_n + \frac{4K_{wy}}{mL} \sum_{n=1}^K A_{1nk} \sigma_n \\ - \frac{2m_w(H_0 - z_s)V^2}{mL} \sum_{n=1}^K A_{6nk} \tau_n - \frac{4k_{wy}(H_0 - z_s)}{mL} \\ + \sum_{n=1}^K A_{4nk} \tau_n - \frac{4K_{wy}}{mL} \sum_{i=1}^2 \{C_{1ik} Y_{Ti} + (H_T - r) \\ \times C_{1ik} \varphi_{Ti} - a C_{2ik} \psi_{Ti}\} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{m z_s}{\mu I_{ps}} \ddot{\sigma}_k - \frac{2m_w(H_0 - z_s)}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{1nk} \ddot{\sigma}_n + \ddot{\tau}_k \\ + \frac{2I_{wx}}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{4nk} \ddot{\tau}_n + \frac{2m_w(H_0 - z_s)^2}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{4nk} \\ \times \ddot{\tau}_n - \frac{4m_w(H_0 - z_s)V}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{2nk} \dot{\sigma}_n + \frac{\eta v}{\mu I_{ps}} \dot{\tau}_k \\ + \frac{4I_{wx}V}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{5nk} \dot{\tau}_n + \frac{4b_1^2 c_1}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{4nk} \dot{\tau}_n \\ + \frac{4m_w(H_0 - z_s)^2 V}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{5nk} \dot{\tau}_n - \frac{2m_w(H_0 - z_s)^2 V}{\mu I_{ps} L} \\ \times \sum_{n=1}^K B_{3nk} \sigma_n - \frac{4k_{wy}(H_0 - z_s)}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{1nk} \sigma_n \\ + \omega_{\varphi K}^2 \tau_k + \frac{2I_{wx}V^2}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{6nk} \tau_n + \frac{4b_1^2 c_1 V}{\mu I_{ps} L} \\ \times \sum_{n=1}^K B_{5nk} \tau_n + \frac{4b_1^2 k_1}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{4nk} \tau_n \\ + \frac{2m_w(H_0 - z_s)^2 V^2}{\mu I_{ps} L} \sum_{n=1}^K B_{6nk} \tau_n + \frac{4k_{wy}(H_0 - z_s)^2}{\mu I_{ps} L} \\ \times \sum_{n=1}^K B_{4nk} \tau_n - \frac{4b_1^2 c_1}{\mu I_{ps} L} \sum_{i=1}^2 D_{1ik} \varphi_{Ti} \\ - \frac{4b_1^2 k_1}{\mu I_{ps} L} \sum_{i=1}^2 D_{1ik} \varphi_{Ti} + \frac{4k_{wy}(H_0 - z_s)}{\mu I_{ps} L} \\ \times \sum_{i=1}^2 \{D_{1ik} Y_{Ti} + (H_T - r) D_{1ik} \varphi_{Ti} - a D_{2ik} \psi_{Ti}\} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$k=1, 2, \dots, K$

上式で，次の記号を用いる。

$$\begin{aligned} A_{1nk} &= \sum_{ij} v_{sn}(\xi_{ij}) v_{sk}(\xi_{ij}), \quad B_{1nk} = \sum_{ij} v_{sn}(\xi_{ij}) \varphi_k(\xi_{ij}) \\ A_{2nk} &= \sum_{ij} v_{sn}'(\xi_{ij}) v_{sk}(\xi_{ij}), \quad B_{2nk} = \sum_{ij} v_{sn}'(\xi_{ij}) \varphi_k(\xi_{ij}) \\ A_{3nk} &= \sum_{ij} v_{sn}''(\xi_{ij}) v_{sk}(\xi_{ij}), \quad B_{3nk} = \sum_{ij} v_{sn}''(\xi_{ij}) \varphi_k(\xi_{ij}) \\ A_{4nk} &= \sum_{ij} \varphi_n(\xi_{ij}) v_{sk}(\xi_{ij}), \quad B_{4nk} = \sum_{ij} \varphi_n(\xi_{ij}) \varphi_k(\xi_{ij}) \\ A_{5nk} &= \sum_{ij} \varphi_n'(\xi_{ij}) v_{sk}(\xi_{ij}), \quad B_{5nk} = \sum_{ij} \varphi_n'(\xi_{ij}) \varphi_k(\xi_{ij}) \\ A_{6nk} &= \sum_{ij} \varphi_n''(\xi_{ij}) v_{sk}(\xi_{ij}), \quad B_{6nk} = \sum_{ij} \varphi_n''(\xi_{ij}) \varphi_k(\xi_{ij}) \end{aligned}$$

ここで， $\sum_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2$

$$\begin{aligned} C_{1ik} &= \sum_{j=1}^2 v_{sk}(\xi_{ij}), \quad D_{1ik} = \sum_{j=1}^2 \varphi_k(\xi_{ij}) \\ C_{2ik} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^j v_{sk}(\xi_{ij}), \quad D_{2ik} = \sum_{j=1}^2 (-1)^j \varphi_k(\xi_{ij}) \end{aligned}$$

式(21)及び(22)をマトリックス表示すると，

$$\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{d}}_{gH} + \mathbf{C}_g \dot{\mathbf{d}}_{gH} + \mathbf{K}_g \mathbf{d}_{gH} + \mathbf{V}_C \dot{\mathbf{d}}_H + \mathbf{V}_R \mathbf{d}_H = \mathbf{0} \quad (23)$$

ここで，

$$\mathbf{d}_{gH} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K\}^T \quad (24)$$

$\mathbf{M}_g, \mathbf{C}_g, \mathbf{K}_g, \mathbf{V}_C$ 及び \mathbf{V}_R は付録参照。

3.2 連成振動時の車両の運動方程式

車両の運動方程式は式(8)で表わされるが，けた上を走行する場合，車両の運動方程式中の輪軸の重心の変位を表わすベクトル \mathbf{g}_H は y_{w1j} 及び φ_{w1j} が式(20)で表わされることから，次式となる。

$$\mathbf{g}_H = \mathbf{H} \mathbf{d}_{gH} \quad (25)$$

マトリックス \mathbf{H} は付録に示す。

したがって，連成振動時の車両の運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_H \ddot{\mathbf{d}}_H + \mathbf{C}_H \dot{\mathbf{d}}_H + \mathbf{K}_H \mathbf{d}_H + \mathbf{G}_C \mathbf{H} \dot{\mathbf{d}}_{gH} + (\mathbf{G}_C \mathbf{H} + \mathbf{G}_K \mathbf{H}) \\ \mathbf{d}_{gH} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (26)$$

3.3 連成振動の運動方程式

けたの運動方程式(23)と車両の運動方程式(25)より連成振動の運動方程式は次のように整理される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_H \\ \dot{\mathbf{d}}_{gH} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_H & \mathbf{G}_C \mathbf{H} \\ \mathbf{V}_C & \mathbf{C}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_H \\ \mathbf{d}_{gH} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_H & (\mathbf{G}_C \mathbf{H} + \mathbf{G}_K \mathbf{H}) \\ \mathbf{V}_R & \mathbf{K}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_H \\ \mathbf{d}_{gH} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (27)$$

上式より明らかなように，荷重項はゼロである。すなわち，上式を解くに当り，初期条件がゼロである場合，車両及びけたともに運動しないことを意味している。本研究では，初期条件ゼロのけたに，ある初期条件を有する車両がある速度で進入し，連成振動し，退出する場合に注目する。

4. 橋げたの動的応答

走行車両による橋げたの水平及び曲げ振動は，既述

のように、橋げた進入時の車両の運動状態により左右される。この初期条件は車両が橋げたに進入するまでに、どのような軌道不整上を走行してきたかにより決まるものである。本研究では、車両の振動形が車両の固有振動モードの合成により形成されることに注目し、次に示す3つのケースの初期条件を想定し、これらの初期条件のもとでの橋げたの応答を求めた。

Case I：1次の固有振動モード（下心ローリング卓越）と類似形、変位速度はゼロ

Case II：2次の固有振動モード（上心ローリング卓越）と類似形、変位速度はゼロ

Case III：3次の固有振動モード（ヨーイング卓越）と類似形、変位速度はゼロ

いずれのケースにおいても、車体の重心位置の最大水平変位が1.0cmであるように規格されている。

以下に対象とした橋げたと応答解析結果を示す。

4.1 モデルげた

本研究で採用したモデルげたは国鉄在来線のKS-18用定規けた³⁾を修正したけたとスパン30mの実橋である。実橋は東海道新幹線の水門川橋である。これらのけたはいずれもプレートガーダーであるが、ここでは上下の横構をせん断変形の等しい薄板に置換しFig. 5のように箱形としたものである。

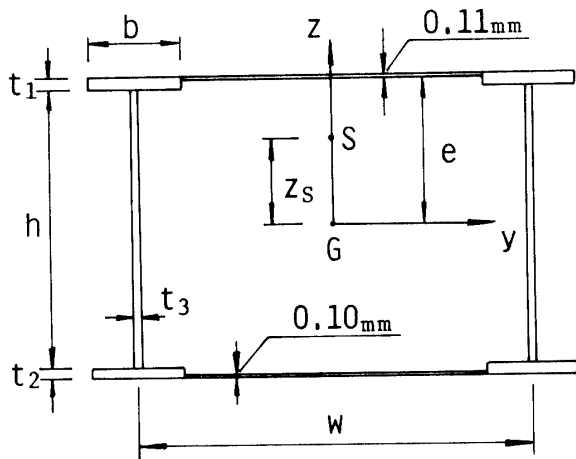


Fig. 5 Cross-sectional shape of model girder.

Table 1 Dimensions and geometrical constants of model girders

l(m)	8.2	12.9	19.2	25.4	30.0*	31.5
b(mm)	260.0	320.0	370.0	390.0	440.0	410.0
t ₁ (mm)	33.8	40.7	52.1	63.9	59.3	74.0
t ₂ (mm)	9.0	9.0	10.0	12.0	12.0	14.0
t ₃ (mm)	28.4	35.3	45.6	56.6	52.3	65.9
h(mm)	970.0	1300.0	1680.0	2080.0	1863.0	2460.0
w(mm)	1900.0	1900.0	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0
e(mm)	474.5	638.7	826.8	1029.3	917.8	1220.7
z _s (mm)	40.9	37.3	34.7	34.2	66.5	32.8
I _{yy} m ⁴ × 10 ⁻²	4.58656	6.60887	10.7445	14.5797	10.7236	18.5876
K m ⁴ × 10 ⁻³	4.11743	7.45264	13.2362	20.4744	17.5907	28.9166
Γ _w m ⁴ × 10 ⁻²	2.65361	6.94540	18.9228	38.3628	25.4333	66.6549
I _{ps} m ⁴ × 10 ⁻²	5.61324	9.25124	17.1678	27.4916	6.30810	40.8969
m t ³ s ² × 10 ⁻⁷	5.91035	7.40712	10.7604	14.1874	13.5207	18.1154

*東海道新幹線、水門川橋梁

これらの橋げたの諸元は Table-1 の通りである。K-18修正モデルげたは実橋よりやや大きい諸元もっている。計算に当たってけた断面の中心から輪軸までの距離は、表中の e に車輪の半径50cm を加え、上フランジの上に車輪があるものを想定した。また、けたの減衰係数 $\eta_s = \eta_\phi = 0.024$ とした。

これらの対象げたの動特性は Fig. 6 の通りである。

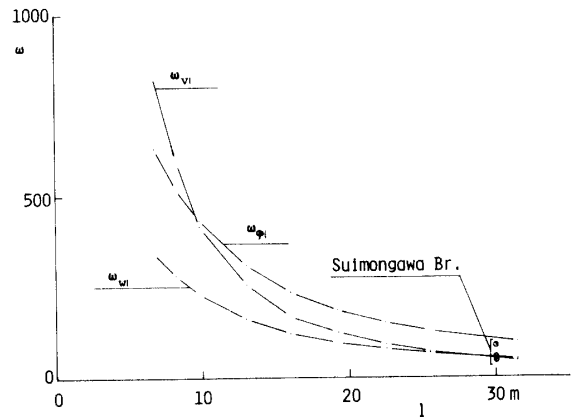


Fig. 6 Dynamic characteristics of model girders.

図中 ω_1 , ω_{v1} , $\omega_{\phi1}$ はそれぞれ次に示す固有振動数である。

$$\omega_{v1} = (\pi/L)^2 \sqrt{EI_{yy}/m} : \text{水平曲げ固有振動数}$$

$$\omega_{w1} = (\pi/L)^2 \sqrt{EI_{zz}/m} : \text{鉛直曲げ固有振動数}$$

$$\omega_{\phi1} = \sqrt{\{(\pi/L)^4 EI_{\omega}^2 + (\pi/L)^2 GK\} / \mu I_{ps}} : \text{ねじり}$$

固有振動数

4.2 けたの動的応答

応答解析に当たって、けたのスパン中央のたわみ及び

ねじり角に注目することから，けたの振動変位は式(13)の第1項のみを採用した．さらに，運動方程式の数値積分には Runge-Kutta-Gill 法を適用し，積分の時間キザミは，車両及びけたの固有振動周期の中の最小のもの4% ($2.384 \times 10^{-3} \text{sec}$) を用いた．

以下に，車両速度が0~300km/hの範囲で，車両の

初期条件が Case I ~ III の場合のけたのスパン中央の断面のせん断中心の水平変位及びねじり角の応答を求め，各 Case について，各車両速度に対する最大応答を Fig. 7~9 に示した．

図中，縦軸は動的最大変位 v_{\max} 及び ϕ_{\max} を静的変位 v_{st} 及び ϕ_{st} で無次元化したもので，ここで， v_{st} 及び ϕ_{st}

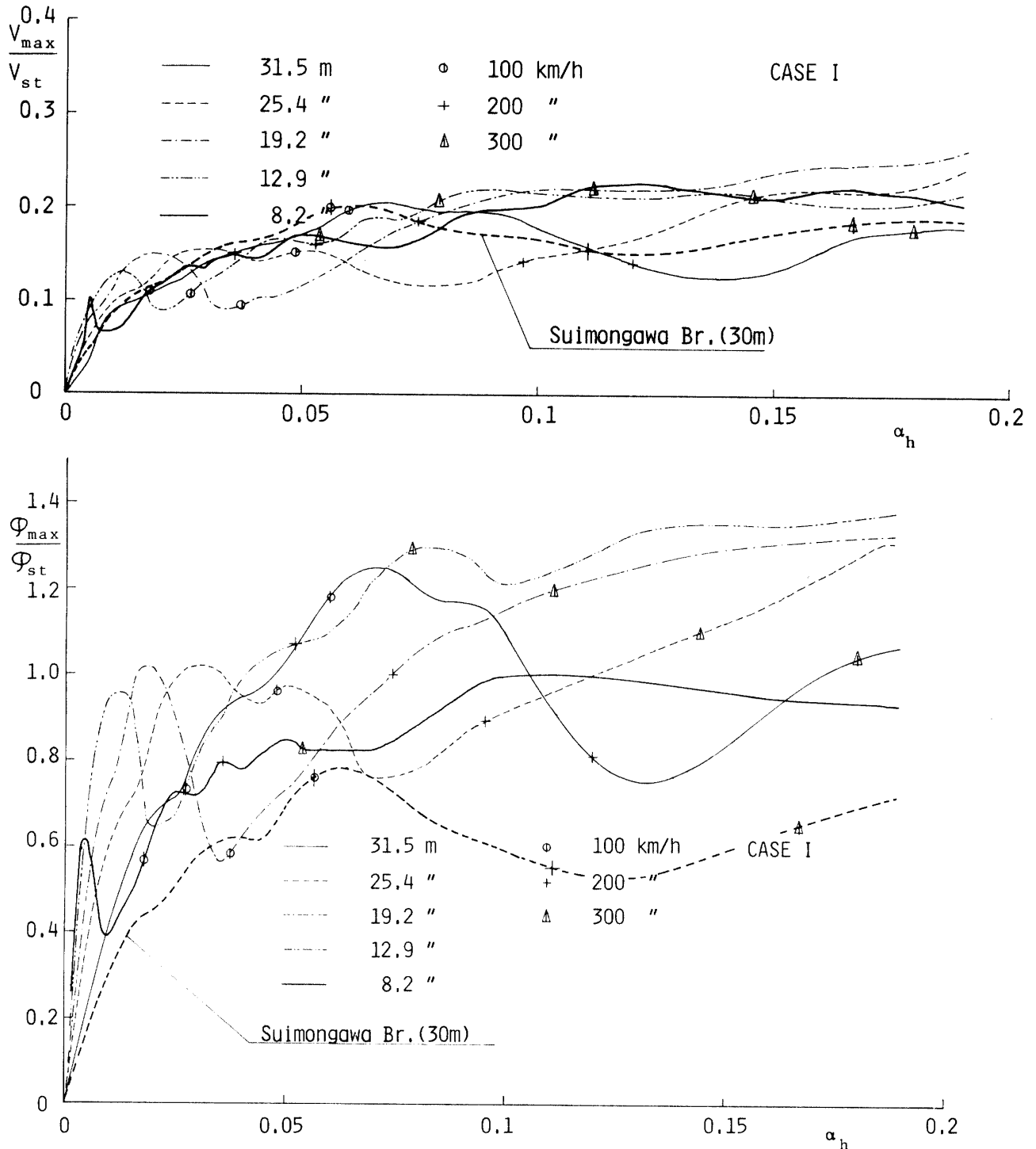


Fig. 7 Maximum dynamic displacements at mid-span of a girder under a moving vehicle with Case I initial condition, v_{\max}/v_{st} and ϕ_{\max}/ϕ_{st} in dependence on speed α_h .

は、それぞれ、けたのスパン中央の断面のせん断中心に単位の水平力(t)及びねじりモーメント(t・m)を作させたときのスパン中央のせん断中心の最大変位である。また、横軸は速度パラメータ α_h を表わす。ここで T_{v1} はけたの1次の水平固有周期を表わす。

$$\alpha_n = \frac{T_{v1}/2}{L/V} = \frac{\pi V}{L\omega_{v1}} \quad (28)$$

Fig. 7 は車両の初期条件 Case I の場合の最大応答と速度パラメータの関係を、Fig. 8 及び Fig. 9 はそれぞれ Case II 及び Case III の同じ関係を示す。

これらの計算結果より、水平変位については、Case

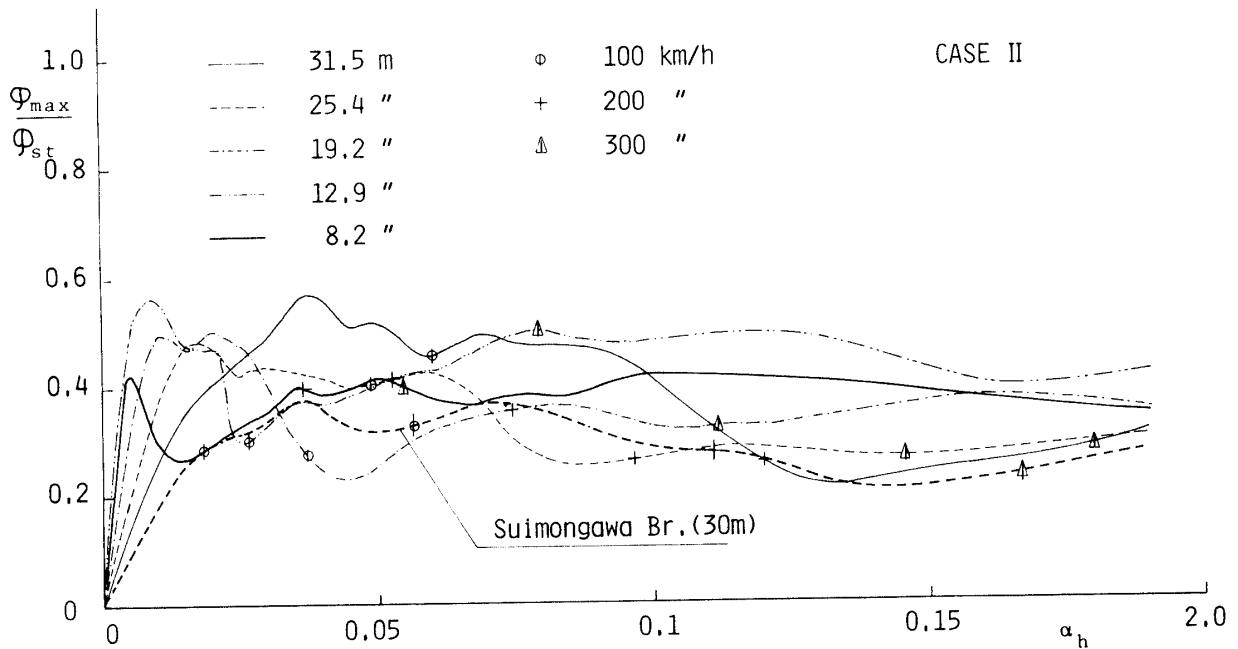
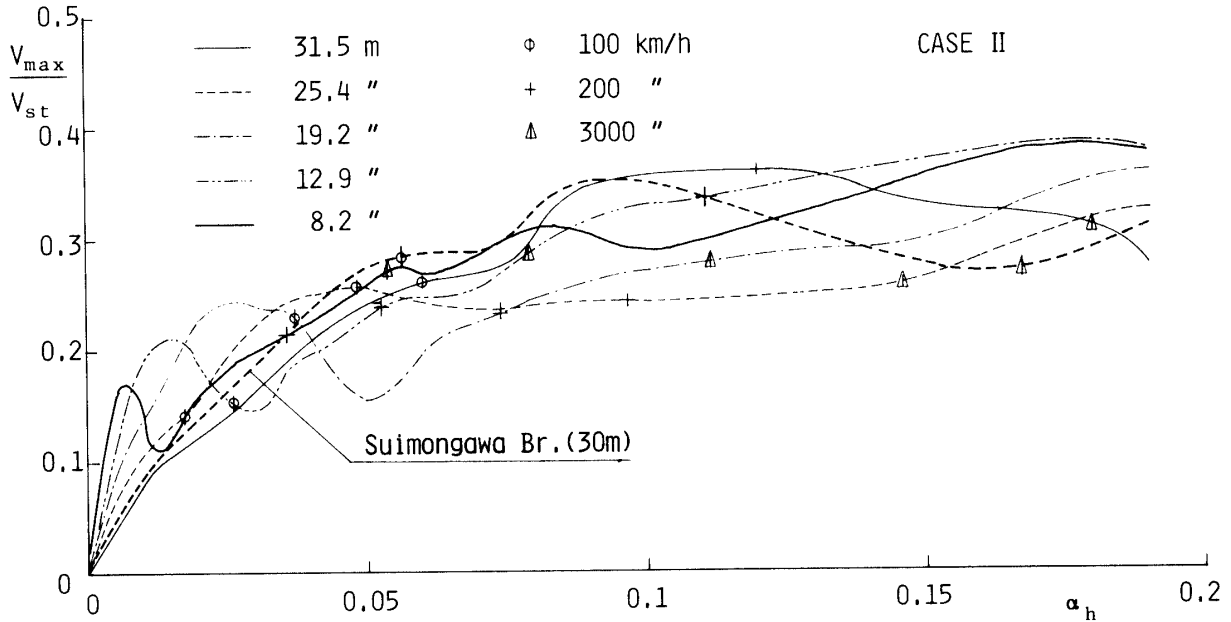


Fig. 8 Maximum dynamic displacements at mid-span of a girder under a moving vehicle with Case II initial condition, v_{max}/v_{st} and ϕ_{max}/ϕ_{st} , in dependence on speed α_h .

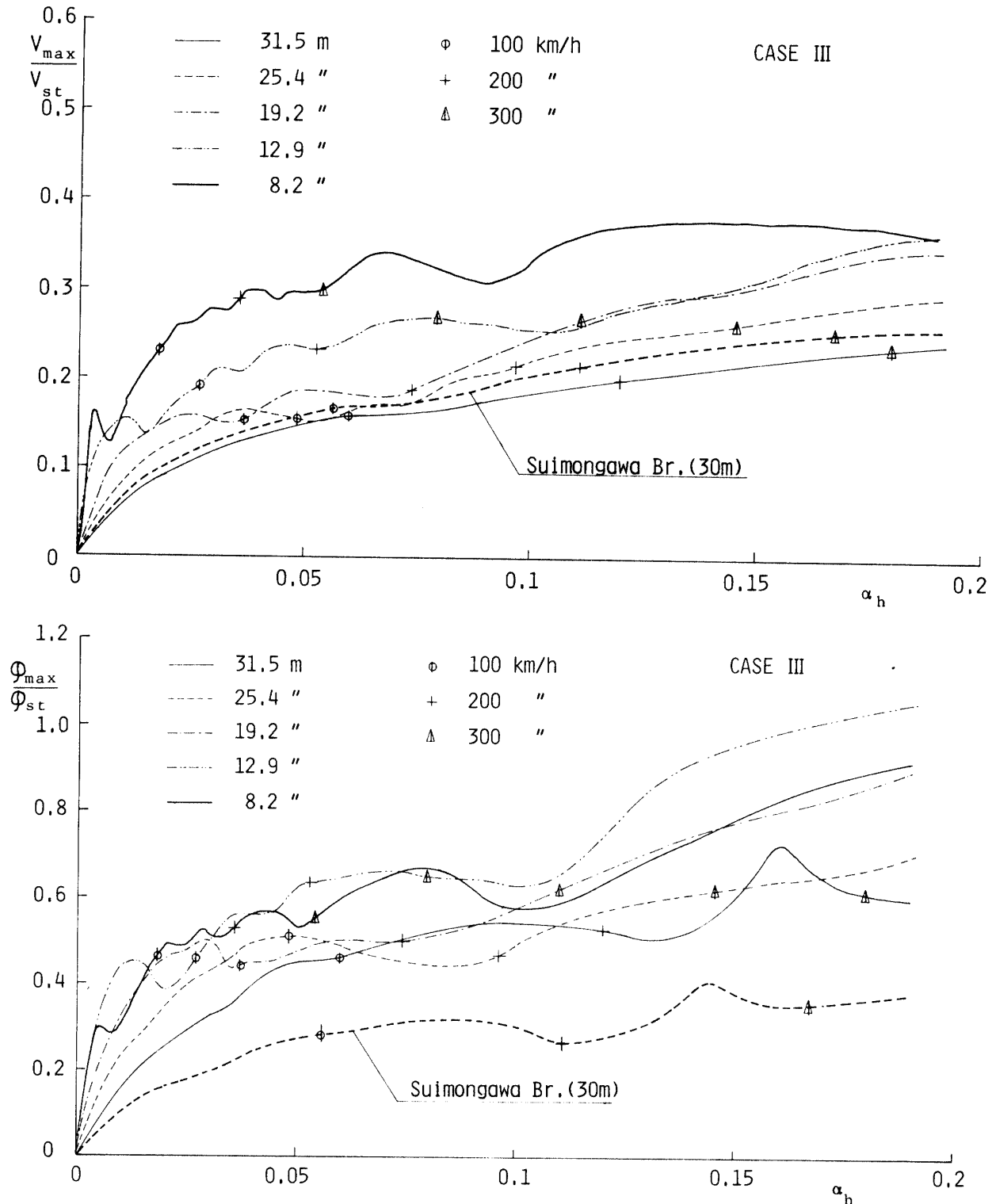


Fig. 9 Maximum dynamic displacements at mid-span of a girder under a moving vehicle with Case III initial condition, v_{max}/v_{st} and ϕ_{max}/ϕ_{st} , in dependence on speed α_h .

Iは小さいが、Case IIがやや大きい影響を与える。Case IIIは短スパンにやや大きい影響を与えるが長スパンになるにしたがって小さくなることがわかる。一方、ねじり角については、Case II及びIIIは小さいが、

Case Iが大きい影響を与えることがわかる。特に、スパン30mの水門川橋梁の結果は、スパン25.4m及び31.5mのモデルげたに比べて小さい結果となっている。これは水門川橋のけた高さがこれらの

けたより小さく車両の左右動によるけたに与えるねじりモーメントが小さいためである。以上の結果より、Case I によるねじりの応答が大きく現われたが、Fig. 6(b)より明らかなように最大応答が静的に1.2~1.3 tonのトルクが作用したものに相当することから車両の最大変位が2.5cm になったとし、変位に比較して応答が増大したとしても、約3.0~3.3ton 程度のトルクが作用したものに相当することとなる。したがって、本研究で対象とした橋梁と同程度のけたであれば、速度向上に伴うけたの水平及びねじり変位の動的応答の顕著な増加はなく、鉄道橋設計示方書の車両横荷重が考慮されている現状の橋げたで十分であると考えられる。

4.3 けたの動的応答に与える動特性の影響

水門川橋梁を例にとり、けたの水平曲げ剛性及び質量分布状態を一定にしたとき、ねじり剛性の変化に伴う最大応答の挙動を、車両速度 $V=300\text{km/h}$ 、車両の初期条件を Case I に限定して調査した。すなわち、軌道走行時の車両振動に及ぼす1次の固有振動モードが大きいことから、初期条件 Case I のみに注目し、対象けたと等しい水平曲げ固有振動数 ω_{v1} とけた質量の慣性モーメント μI_{ps} を有し、さらに、等価水平ばね定数 k_h を有する橋げたにおいて、ねじり固有振動数 ω_t と ω_{v1} との比 β の変化にともなう最大応答の変化状態を求め Fig. 10 に示した。

$$\left. \begin{aligned} k_h &= \frac{\pi^4 EI_{yy}}{2L^3} = \frac{\omega_{v1}^2 mL}{2} \\ \beta &= \frac{\omega_{t1}}{\omega_{v1}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

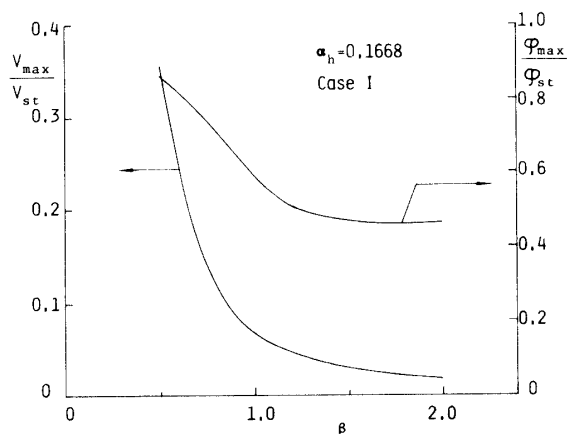


Fig. 10 Maximum dynamic displacements of mid-span of a girder under a moving vehicle with Case I initial condition and speed $\alpha_h = 0.1668$, v_{max}/v_{st} and ϕ_{max}/ϕ_{st} , in dependence on torsional rigidity β .

水門川橋梁は $\beta=1.635$ である。図より明らかなように、 β が大きくなるにしたがって、すなわち、ねじり剛性が大きくなるにしたがって、水平変位及びねじり角の応答が小さくなることがわかる。この事実は力学的には当然であるが、 $\beta=1.0$ 以上では最大応答はほとんど変わらない点に注意する必要がある。

5. 結び

本文は、左右動、ローリング及びヨーイングする新幹線車両の走行に伴う単純けた橋の水平曲げ及びねじり振動の挙動を調査したものである。調査の結果、次の事項が明らかになった。

- (1) 車両の下心ローリング、上心ローリング及びヨーイングによる橋の水平変位及びねじり角の動的応答は比較的小さく、中でも、下心ローリングによるねじり角が大きい。静的な1.2~1.3t・mのトルクが作用した場合と同様のものであった。
- (2) 車両走行速度300km/h 以下であれば、現在の鉄道橋の設計示方書の車両横荷重による検算で十分であると考えられる。
- (3) スパン30m 程度の橋げたについて、ねじり固有振動数が水平曲げ固有振動数を上回る動特性を有すけたにすれば、左右動、ローリング及びヨーイングする車両によるけたの応答は少すことができる。本研究において、さらに、考慮すべき点が多々あることは著者らの認めるところである。本文が鉄道システムの検討の一手助けとなれば幸いである。

本研究の計算は山口大学計算センター ACOS-850 と九州大学大型計算機センター FACOM-M-380により行った。また、本研究で用いた各種資料は東京都立大学 伊藤文人教授及び日本国有鉄道下関工事事務所次長 速水昭正氏よりいただいた。ここに記し謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 松浦章夫：鉄道技術研究報告，1074，pp. 1~198 (1973)
- 2) 日本鉄道施設協会：本州四国連絡橋の列車走行に関する研究〔別冊1〕，走行分科会中間報告，pp. 2~5 (1977)
- 3) 橋梁研究会：鋼橋設計資料，技報堂 (1967)，p. 108 (昭和60年12月15日 受理)

$$G_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k_{wy} & -2k_{wy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k_{wy}(H_T-r) & -2k_{wy}(H_T-r) & 0 & 0 & -2b_1^2 k_1 & -2b_1^2 k_1 & 0 & 0 \\ -2ak_{wy} & 2ak_{wy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k_{wy} & -2K_{wy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k_{wy}(H_T-r) & -2k_{wy}(H_T-r) & 0 & 0 & -2b_1^2 k_1 & -2b_1^2 k_1 \\ 0 & 0 & -2aK_{wy} & 2aK_{wy} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 橋げたの運動方程式中の各マトリックスの要素

$$M_K = \begin{pmatrix} \left(I + \frac{2m_w}{mL} A_1 \right) & \left\{ Z_S I - \frac{2m_w(H_0-Z_S)}{mL} A_4 \right\} \\ \left\{ \frac{mZ_S}{\mu I_{PS}} I - \frac{2m_w(H_0-Z_S)}{\mu I_{PS}L} B_1 \right\} & \left\{ I + \left\{ \frac{2I_{WX}}{\mu I_{PS}L} + \frac{2m_w(H_0-Z_S)^2}{\mu I_{PS}L} \right\} B_4 \right\} \end{pmatrix}$$

$$C_g = \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_V}{m} I + \frac{4m_w V}{mL} A_2 \right) & -\frac{4m_w(H_0-Z_S)V}{mL} \times A_5 \\ -\frac{4m_w(H_0-Z_S)V}{\mu I_{PS}L} B_2 & \left\{ \frac{\eta_\varphi}{\mu I_{PS}} I + \frac{4b_1^2 C_1}{\mu I_{PS}L} B_4 + \left\{ \frac{4I_{WX}V}{\mu I_{PS}L} + \frac{4m_w(H_0-Z_S)^2 V}{\mu I_{PS}L} \right\} B_5 \right\} \end{pmatrix}$$

$$K_g = \begin{pmatrix} \left(K_V + \frac{2m_w V^2}{mL} A_3 + \frac{4k_{wy}}{mL} A_1 \right) \\ \left[-\frac{2m_w(H_0-Z_S)V^2}{\mu I_{PS}L} B_3 - \frac{4k_{wy}(H_0-Z_S)}{\mu I_{PS}L} B_1, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{2m_w(H_0-Z_S)V^2}{mL} A_6 - \frac{4k_{wy}(H_0-Z_S)}{mL} A_4 \right\} \right. \\ \left. \left\{ K_\varphi + \frac{2I_{WX}V^2}{\mu I_{PS}L} + \frac{2m_w(H_0-Z_S)^2 V^2}{\mu I_{PS}L} \right\} B_6 + \frac{4b_1^2 C_1 V}{\mu I_{PS}L} B_5 + \left\{ \frac{4b_1^2 k_1}{\mu I_{PS}L} + \frac{4k_{wy}(H_0-Z_S)^2}{\mu I_{PS}L} \right\} B_4 \right] \end{pmatrix}$$

$$V_C = \begin{pmatrix} \\ -\frac{4b_1^2 C_1}{\mu I_{PS}L} D_0 \end{pmatrix} \quad V_R = \begin{pmatrix} -\frac{4k_{wy}}{mL} C_1 \\ -\frac{4b_1^2 K_1}{\mu I_{PS}L} D_0 + \frac{4R_{wy}(H_0-Z_S)}{\mu I_{PS}L} D_1 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i11} & A_{i21} & A_{i31} & \cdots & A_{iK1} \\ A_{i12} & A_{i22} & A_{i32} & \cdots & A_{iK2} \\ A_{i13} & A_{i23} & A_{i33} & \cdots & A_{iK3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1K} & A_{i2K} & A_{i3K} & \cdots & A_{iKK} \end{pmatrix} \quad B_i = \begin{pmatrix} B_{i11} & B_{i21} & B_{i31} & \cdots & B_{iK1} \\ B_{i12} & B_{i22} & B_{i32} & \cdots & B_{iK2} \\ B_{i13} & B_{i23} & B_{i33} & \cdots & B_{iK3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{i1K} & B_{i2K} & B_{i3K} & \cdots & B_{iKK} \end{pmatrix} \quad K_V = \begin{pmatrix} \omega_{r1}^2 & & & & \\ & \omega_{r2}^2 & & & \\ & & \omega_{r3}^2 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & \omega_{rK}^2 \end{pmatrix}$$

$$K_\varphi = \begin{pmatrix} \omega_{\varphi 1}^2 & & & & \\ & \omega_{\varphi 2}^2 & & & \\ & & \omega_{\varphi 3}^2 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & \omega_{\varphi K}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & D_{111} & 0 & 0 & D_{121} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{112} & 0 & 0 & D_{122} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{113} & 0 & 0 & D_{123} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11K} & 0 & 0 & D_{12K} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_{111} & (H_T - r)C_{111} & -aC_{211} & C_{121} & (H_T - r)C_{121} & -aC_{221} \\ 0 & 0 & 0 & C_{112} & (H_T - r)C_{112} & -aC_{212} & C_{122} & (H_T - r)C_{122} & -aC_{222} \\ 0 & 0 & 0 & C_{113} & (H_T - r)C_{113} & -aC_{213} & C_{123} & (H_T - r)C_{123} & -aC_{223} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_{11K} & (H_T - r)C_{11K} & -aC_{21K} & C_{12K} & (H_T - r)C_{12K} & -aC_{22K} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{111} & (H_T - r)D_{111} & -aD_{211} & D_{121} & (H_T - r)D_{121} & -aD_{221} \\ 0 & 0 & 0 & D_{112} & (H_T - r)D_{112} & -aD_{212} & D_{122} & (H_T - r)D_{122} & -aD_{222} \\ 0 & 0 & 0 & D_{113} & (H_T - r)D_{113} & -aD_{213} & D_{123} & (H_T - r)D_{123} & -aD_{223} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D_{11K} & (H_T - r)D_{11K} & -aD_{21K} & D_{12K} & (H_T - r)D_{12K} & -aD_{22K} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & -(\mathbf{H}_0 - \mathbf{Z}_s)\mathbf{S}_2 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}$$

ここで,

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} v_{s1}(\xi_{11}) & v_{s2}(\xi_{11}) & v_{s3}(\xi_{11}) \cdots v_{sK}(\xi_{11}) \\ v_{s1}(\xi_{12}) & v_{s2}(\xi_{12}) & v_{s3}(\xi_{12}) \cdots v_{sK}(\xi_{12}) \\ v_{s1}(\xi_{21}) & v_{s2}(\xi_{21}) & v_{s3}(\xi_{21}) \cdots v_{sK}(\xi_{21}) \\ v_{s1}(\xi_{22}) & v_{s2}(\xi_{22}) & v_{s3}(\xi_{22}) \cdots v_{sK}(\xi_{22}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_{11}) & \varphi_2(\xi_{11}) & \varphi_3(\xi_{11}) \cdots \varphi_K(\xi_{11}) \\ \varphi_1(\xi_{12}) & \varphi_2(\xi_{12}) & \varphi_3(\xi_{12}) \cdots \varphi_K(\xi_{12}) \\ \varphi_1(\xi_{21}) & \varphi_2(\xi_{21}) & \varphi_3(\xi_{21}) \cdots \varphi_K(\xi_{21}) \\ \varphi_1(\xi_{22}) & \varphi_2(\xi_{22}) & \varphi_3(\xi_{22}) \cdots \varphi_K(\xi_{22}) \end{bmatrix}$$