

ボード線図のゲイン特性が任意の減衰特性を 有する系の伝達関数決定法

足立 宜良*・嶺 勝 敏**

The determination method of the transfer function at which
the gain characteristics of bode diagram present
spontaneous attenuation characteristics

Takayoshi ADACHI and Katsutoshi MINE

Abstract

The asymptote of the gain characteristics at the bode diagram of linear control system is gradient of 20N db/dec (N is an integral number) where the angular frequency is higher than break point frequency. Control system in which the asymptote is not gradient of 20N db/dec or in which the response wave is not a sin wave is called nonlinear control system.

At the result of the frequency response experiment in the recoder of industrial-instruments, the gain characteristics of bode diagram presented spontaneous attenuation characteristics. Generally these transfer function separate into linear element and nonlinear element, the nonlinear element is analyzed by describing function. But we studied the equivalent transfer function on these characteristics and gained the next function.

$$G(S, X) = \frac{\{1 + T(X)S\}^{K(X)}}{1 + 2\zeta(X) \frac{S}{\omega_n(X)} + \frac{S^2}{\omega_n^2(X)}}$$

List of symbols

$G(S, X)$ = equivalent transfer function

X = input amplitude

$K(X)$ = equivalent exponent (K is not an integral number)

$T(X)$ = equivalent time constant

$\zeta(X)$ = damping ratio

$\omega_n(X)$ = break point frequency

S = parameter of Laplace transformation

We investigated the figured decision method of the coefficients in the above function gained from bode diagram of the nonlinear control system.

1. まえがき

自動制御系の伝達関数を決定する方法は、近年会社工場の現場で問題にされてきている。自動制御系の伝達関数の良否が、自動制御系のシンシセスに重大な影響を与えることは周知のとおりであるが、伝達関数の測定法として入力の種類によって分ければ、(1)周波数応答法、(2)過渡応答法および(3)統計的手法などがある。(2)の過渡応答法は特別な装置を必要とせず、一度の測定でよいから簡単なので実際的な方法として研

究²⁻⁴⁾され、かなり実用されている。しかし、精度の点でやや難点がある。また、(3)の統計的手法は運転状態で測定できるので好都合であるが、あとでの統計的処理に手数を必要とするので特殊な計算機によらなければならない⁵⁾。ところが、周波数応答法は伝達関数をかなり精度高く決定できて、比較的簡単である利点がある。

線形自動制御系のボード線図のゲイン特性において、折点周波数より高い周波数領域では $-20Ndb/dec$ (N

* 電気工学教室

** 宇部工業高等専門学校電気工学教室

は整数)の漸近線となるが、漸近線がそうでないもの応答波形が正弦波でないもの、その他種々の現象を生じる系を非線形制御系と呼んでいる¹⁾。

5機種工業計器の記録部の周波数特性実験を行い、ボード線図を描いたところ、そのゲイン特性において -20Ndb/dec の傾斜でなく、任意の減衰特性を示した。これら任意減衰特性を有する伝達関数の表示法には、線形要素と非線形要素を分離し、非線形要素を記述関数で解析する方法は非常に困難であり、非整数階積分を用いる方法⁶⁾は簡単であるが使用範囲が限定されている。ボード線図から直接に、非線形要素を含む系の伝達関数を簡単に決定する方法は見当らない。

我々はこのような系に対する等価伝達関数として下式を得た。

$$G(S, X) = \frac{\{1 + T(X)S\}^{K(X)}}{1 + 2\zeta(X)\frac{S}{\omega_n(X)} + \frac{S^2}{\omega_n(X)^2}} \quad (1)$$

ただし、(1)式の記号は下記のとおり

- X : 入力振幅
- $K(X)$: 等価指数 (仮称), 非整数とする
- $T(X)$: 等価時定数 (仮称)
- $\zeta(X)$: 減衰係数
- $\omega_n(X)$: 折点角周波数
- S : ラプラス変換のオペレータ

実系の非線形制御系のボード線図から、図式に上式の各係数を決定する簡便な方法を研究したので報告する。

2. 等価伝達関数の決定法⁷⁾⁸⁾

(1)式において、解析するのに便利のため、2次遅れ伝達関数と非整数階乗1次進み伝達関数に分ける。すなわち

$$G(S, X) = G_1(S, X) \cdot G_N(S, X) \quad (2)$$

とする。ただし、

$$G_1(S, X) = \frac{1}{1 + 2\zeta(X)\frac{S}{\omega_n(X)} + \frac{S^2}{\omega_n(X)^2}} \quad (3)$$

$$G_N(S, X) = \{1 + T(X)S\}^{K(X)} \quad (4)$$

(1)式を $G_1(S, X)$ と $G_N(S, X)$ に分けたが、ここでまず、(3)式の2次遅れ伝達関数について、未知係数である $\zeta(X)$ および $\omega_n(X)$ の簡単な図式決定法を解説する。

2.1 2次遅れ伝達関数

(3)式において、 $S = j\omega$ とおいた周波数伝達関数の絶対値を M とすれば

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n(X)}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta(X)\frac{\omega}{\omega_n(X)}\right\}^2}} \quad (5)$$

となる。(5)式のデシベルを $M(\text{db})$ とすれば

$$M(\text{db}) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n(X)}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta(X)\frac{\omega}{\omega_n(X)}\right\}^2}} \quad (6)$$

となり、減衰係数 $\zeta(X)$ をパラメータとして変化させると、 $M(\text{db})$ 曲線が種々変化することは周知のとおりである。 $\zeta(X)$ をパラメータとした $M(\text{db})$ と $\omega(X)$ (rad/sec) の関係のゲイン特性のボード線図は Fig. 1 に示す。Fig. 1 において、共振現象の生じる、 $0 < \zeta(X)$

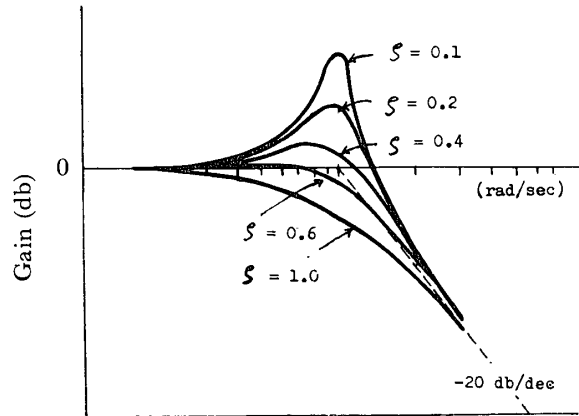


Fig. 1. Bode diagram of second order transfer function, when the damping ratio (ζ) is varied

$< 1/\sqrt{2}$ の条件のもとで共振角周波数 $\omega_r \{M_{\max}(\text{db})$ が生じるとき角周波数} と固有角周波数 $\omega_n(X)$ (折点角周波数) の関係は(5)式において、 M が最大値を得る条件を考慮することによって得られる。すなわち、

$$\omega_r = \omega_n(X) \sqrt{1 - 2\zeta(X)^2} \quad (7)$$

$$\omega_n(X) = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2\zeta(X)^2}} \quad (8)$$

である。Fig. 1 において、折点角周波数 $\omega_n(X)$ 点に着目すると、曲線群は次の三つの場合に分けられる。したがって、これら三つの場合について2次遅れ伝達関数 $G_1(S, X)$ の決定方法をのべる。

2.1.1 $\omega = \omega_n$ のとき $M(\text{db}) > 0$ の場合

ゲイン特性曲線の共振時の $M(\text{db})$ の値を $M_{\max}(\text{db})$ とすれば、このとき、角周波数 ω は共振角周波数 ω_r と等しくなくてはならないから(7)式を(6)式に代入することによって $M_{\max}(\text{db})$ が得られる。したがって、

$$M_{\max}(\text{db}) = -20 \log 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

となる。ここにおいて減衰係数 ζ の変化に対する(8)お

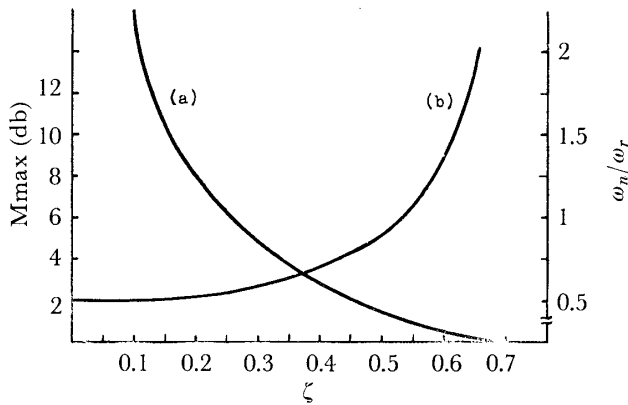


Fig. 2. (a): Maximum gain (Mmax) vs. damping ratio (ζ).
(b): Angular frequency ratio (ω_n/ω_r) vs. damping ratio (ζ)

よび(9)式の理論曲線を Fig. 2 に示す.

Fig. 2 を用いての(3)式の 2 次遅れ伝達関数決定方法を説明するために、いま、実系のゲイン特性において共振現象が生じていると仮定する。この伝達関数を決定するには、まずゲイン特性の共振点に着目して、 ω_r と $M_{max}(db)$ の値を求める。求めた $M_{max}(db)$ を Fig. 2 に適用して ζ および $1/\sqrt{1-2\zeta^2}$ の値を決定せしめる。後者の値は(8)式に代入して ω_n の値を計算で求める。したがって、得られた ζ および ω_n の値を(3)式に代入して、2 次遅れ伝達関数は決定されるわけである。

2.1.2 $\omega = \omega_n$ のとき $M(db) < 0$ の場合

$\zeta > 0.5$ の条件のもとで $\omega = \omega_n$ のときのゲインを M_u (db) とすれば、(6)式に $\omega = \omega_n$ を代入することによって得られる。

$$M_u(db) = -20 \log 2\zeta \tag{10}$$

(10)式の理論曲線を Fig. 3 に示す。

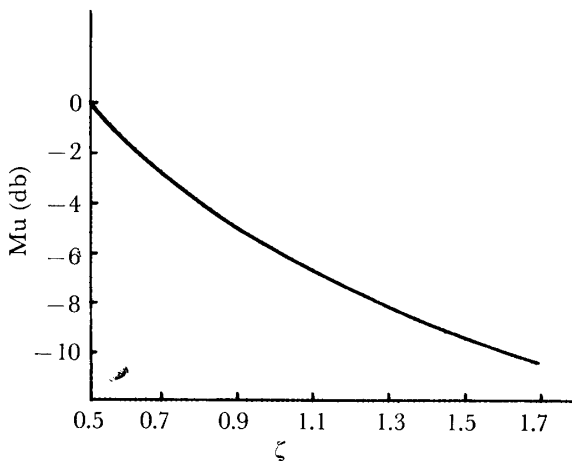


Fig. 3. Gain (M_u) vs. damping ratio (ζ)

前節同様に、いま実系の 2 次遅れのゲイン特性において、 ζ がこの条件と一致しているとする。まず、 $-40db/dec$ の漸近線を引き、 $0(db)$ との交点より、 ω_n の値および $M_u(db)$ の値を得る。この $M_u(db)$ の値を Fig. 3 に適用して ζ を決定する。この ζ および ω_n の値を(3)式に代入することによって、求める 2 次遅れ伝達関数は決定される。

2.1.3 $\omega = \omega_n$ のとき $M(db) < 0$ の場合において $1/\sqrt{2} > \zeta > 0.5$ の範囲の補償

$1/\sqrt{2} > \zeta > 0.5$ では $\omega = \omega_n$ において $M(db) < 0$ となるが、Fig. 1 より明らかなように共振特性がある。したがって、2.1.2 節で記述した方法で伝達関数決定を行うと共振点近傍においてゲイン誤差を生じる。求めた伝達関数の近似度を上げるためには、この点の近傍についてゲイン補償する必要がある。この補償伝達関数を $G_2(S)$ とすると

$$G_2(S) = \frac{\left(1 + \frac{S}{\omega_r}\right)^2}{1 + 2\zeta \frac{S}{\omega_r} + \left(\frac{S}{\omega_r}\right)^2} \tag{11}$$

で表わされる。(11)式の分母の ζ は $\omega = \omega_r$ 点のゲイン $M_{max}(db)$ と(11)式の分子の折点周波数 (この場合は ω_r のこと) におけるゲインとの和を打ち消すに必要なデシベルの値を Fig. 3 に適用して、決定される。

(11)式のボード線図の一般ゲイン特性を Fig. 4 に示す。また、(11)式の補償伝達関数を用いると、(2)式は

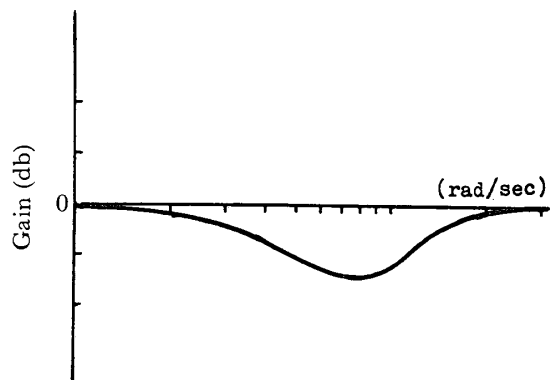


Fig. 4. Bode diagram of compensating transfer function

$$G(S, X) = G_1(S, X) \cdot G_2(S) \cdot G_N(S, X) \tag{12}$$

(12)の分母および分子共に 2 次だけ次数が高くなった複雑な伝達関数になる。しかしながら、共振点の $M_{max}(db)$ がそれほど大きくなく、また伝達関数の精度を上げる必要がなければ (特にプロセス制御系において)、むりに(12)式のように $G_2(S)$ を含む複雑な形の伝達関数にする必要はない。

2.2 $G_N(S, X) = \{1 + T(X)S\} \exp K(X)$ の周波数特性

我々が考えついた、非整数階乗1次進み伝達関数、すなわち、(4)式の $G_N(S, X) = \{1 + T(X)S\} \exp K(X)$ の周波数伝達関数を求め、その周波数特性について考察する。ここで等価時定数 $K(X)$ は非整数とし（整数も含む）、正負の値を取るものとする。 $K(X)$ が負の場合は(4)式は非整数階乗1次遅れ伝達関数となる。

(4)式の周波数伝達関数は $S = j\omega$ において得られる。

$$G_N(X, j\omega) = \{1 + j\omega T(X)\}^{K(X)} \quad (13)$$

$\{1 + j\omega T(X)\}$ を複素平面上に描くと、Fig. 5 のようになる。ここで(13)式に de Moivre の定理を適用すると

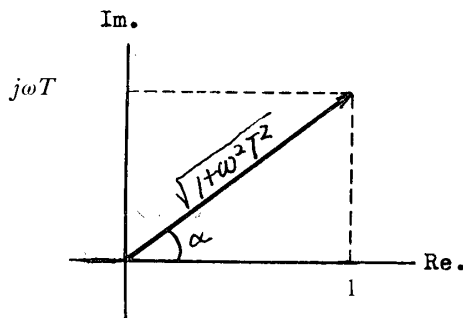


Fig. 5. Complex plane $\alpha = \tan^{-1} \omega T$

$$\begin{aligned} G_N(X, j\omega) &= \{1 + j\omega T(X)\}^{K(X)} \\ &= \{[1 + \omega^2 T(X)^2]^{\frac{1}{2}} e^{j\alpha}\}^{K(X)} \\ &= \{1 + \omega^2 T(X)^2\}^{\frac{K(X)}{2}} (\cos K\alpha + j \sin K\alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $\alpha = \tan^{-1} \omega T(X)$ とする。よって(14)式の絶対値およびデシベルは次式のようになる。

$$|G_N(X, j\omega)| = \{1 + \omega^2 T(X)^2\}^{\frac{K(X)}{2}} \quad (15)$$

$$|G_N(X, j\omega)| (db) = 10K(X) \log\{1 + \omega^2 T(X)^2\} \quad (16)$$

また、(13)式の位相角 φ° および折点角周波数における漸近線とのゲイン誤差 $A(db)$ は(14)式と(16)式から

$$\begin{aligned} \varphi &= Arg. G_N(X, j\omega) = \tan^{-1} \frac{\sin K(X)\alpha}{\cos K(X)\alpha} \\ &= K(X) \alpha = K(X) \tan^{-1} \omega T(X) \end{aligned} \quad (17)$$

$$A(db) \approx 3K(X) \quad (18)$$

結論として、一次伝達関数 $(1 + TS)$ と非整数階乗1次伝達関数 $\{1 + T(X)S\} \exp K(X)$ の周波数領域での比較を行うと、ゲイン特性においては(16)式から等価指数 $K(X)$ に比例し、位相特性および折点周波数におけるゲインについては(17)式および(18)式から同様に、 $K(X)$ に比例する。(13)式の大きな特長は(16)式からわかるように、例えば K が0から1まで連続的に変化すると傾斜 (db/dec) は $0db/dec$ から $20db/dec$ まで直

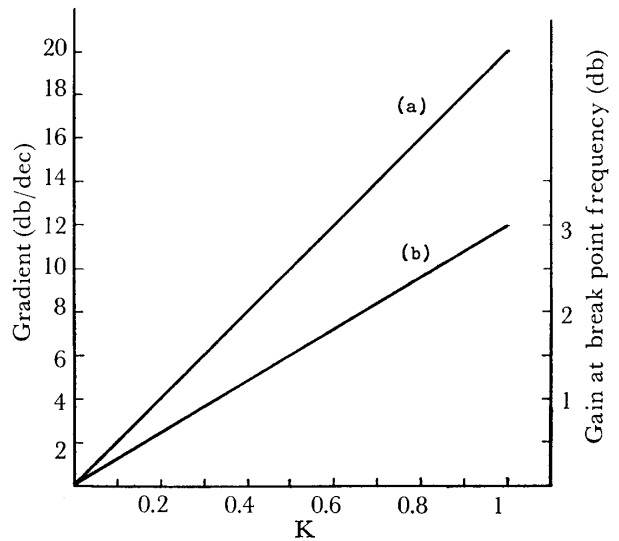


Fig. 6. (a): Gradient (db/dec) vs. equivalent exponent (K)
(b): Gain at break point frequency (db) vs. equivalent exponent (K)

線的に変化し、折点周波数におけるゲインも同様に $0db$ から約 $3db$ まで直線的に変化する。

以上のことから、ボード線図について伝達関数を決定するに必要な漸近線の傾斜 (db/dec) ならびに折点周波数におけるゲイン誤差 (db) を等価指数 $K(X)$ に対して描いた図が Fig. 6 である。

2.3 等価伝達関数決定法

前章について述べてきたことをまとめるため、簡単な例として、いま、Fig. 7 のボード線図における曲線 (a) の等価伝達関数を決定する。ただし、曲線 (a) は傾斜 $-35db/dec$ の任意の減衰特性を示し、折点周波数におけるゲイン誤差が $-7db$ であったとする。

(3)式の周波数伝達関数 $G_1(X, j\omega)$ の漸近線傾斜は $-40 db/dec$ であるので $G_N(X, j\omega)$ の漸近線傾斜は $-35 = -40 + 5 (db/dec)$ から、 $+5 db/dec$ でなくてはならない。この値を

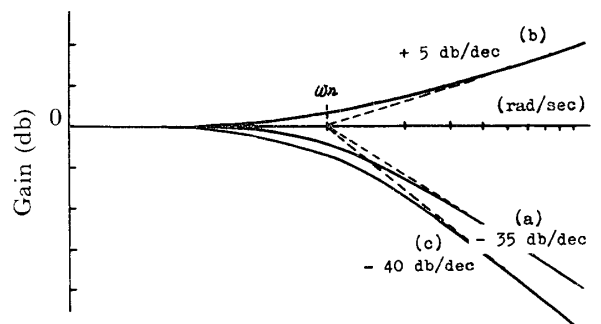


Fig. 7. One example of transfer function-decision methods with figure

Fig. 6 に適用して

折点ゲイン0.75db

等価指数 $K(X)=0.25$

を得る。もちろん $T(X)$ は Fig. 7 より 1 である。次に(3)式の減衰係数 ζ の決定を行なう。Fig. 7 の (a) 曲線より折点ゲインは $-7db$ であるから、この値と (b) 曲線の折点ゲイン $+0.25 db$ の絶対値の和が (c) 曲線の折点ゲインに相当する。これらの和 $7.25db$ を Fig. 3 に適用して、 $\zeta=1.153$ が得られる。したがって、Fig. 7 の (a) 曲線の等価伝達関数は、

$$G(X, S) = \frac{(1+S)^{0.25}}{1+2.31\frac{S}{\omega_n} + \left(\frac{S}{\omega_n}\right)^2} \quad (19)$$

となる。以上図式による等価伝達関数決定法をのべたが、この方法を用いての応用例を次にのべる。

3. 応用例 (工業計器記録部の等価伝達関数決定)

我々は、全電子式工業計器の電圧方式 (Y社) と電流方式 (H社) および空気圧式工業計器の空気圧サー

Table. 1 Input amplitude ratio for the industrial-instruments

Instrument No	Electric	Pnumatic
(1)	100%	45%
(2)	60	30
(3)	20	15

ボ式 (T社) とペローズ受圧式 (F社およびM社) の記録部について、周波数応答実験を行なった。Table. 1 に表わしたように、入力振幅を電気式の場合100%, 60%, 30% および空気式の場合45%, 30%, 15% と変化させ、各々の入力振幅につき周波数を変化させて出力応答波形を得た。すると、出力応答波形が正弦波、ひずみ波および三角波と種々変化した⁹⁾。また、入力振幅に対する出力振幅比が Fig. 8 のボード線図に示すごとく任意減衰特性を示し、折点周波数が入力振幅の変化に対応して変化した。

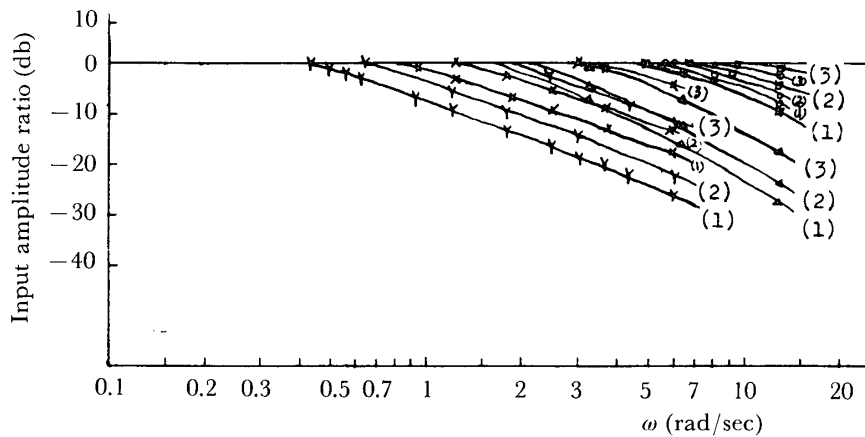


Fig. 8. Bode diagram of the industrial-instruments

Y : Y co. } Electric industrial-instrument
 X : H co. }
 □ : F co. } Pnumatic industrial-instrument
 △ : T co. }
 O : Mco. }

Table. 2 Coefficient of the equivalent transfer function at the industrial-instruments. The No. indicate the same value shown in Table. 1.

Instrument Coefficient	No	Y			H			F			T			M		
		(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
$K(X)$		0.82	0.82	0.82	1.0	1.0	1.0	1.59	1.69	1.85	0.25	0.25	0.25	1.35	1.45	1.64
$T(X)$		2.17	1.43	0.52	1.18	0.72	0.29	0.32	0.28	0.17	0.43	0.34	0.23	0.21	0.19	0.17
$\zeta(X)$		0.73	0.68	0.68	0.75	0.75	0.80	0.88	0.90	0.96	0.86	0.80	0.75	0.90	0.90	0.92
$\omega_n(X)$		0.46	0.70	1.9	0.85	1.4	3.4	3.1	3.5	6.0	2.3	2.9	4.3	4.7	5.2	5.8

ここで、出力波形および振幅比が任意減衰特性を示す原因などの問題は別にゆずるとして、Fig. 8 の任意減衰特性を示す非線形制御系の等価伝達関数決定などについて考えることにする。

Fig. 8 のゲイン特性曲線各々について、前章の等価伝達関数決定法にしたがって、(1)式の各係数値を定めた。その結果を Table. 2 にまとめて示す。Table. 2 は図式的に非常に短時間に決定された。

Fig. 6 で説明したように等価指数 $K(X)$ の条件を $K(X) \leq 1$ としたが、Table. 2 の F 社および M 社においては $2 > K(X) > 1$ となっている。これは

$$\{1 + T(X)S\}^{K(X)} = \{1 + T(X)S\} \{1 + T(X)S\}^{K'(X)}$$

と考えて、 $K'(X) \leq 1$ とすれば、いままでの理論を適用できるわけである。また、折点角周波数のゲイン誤差も同様に考えられる。

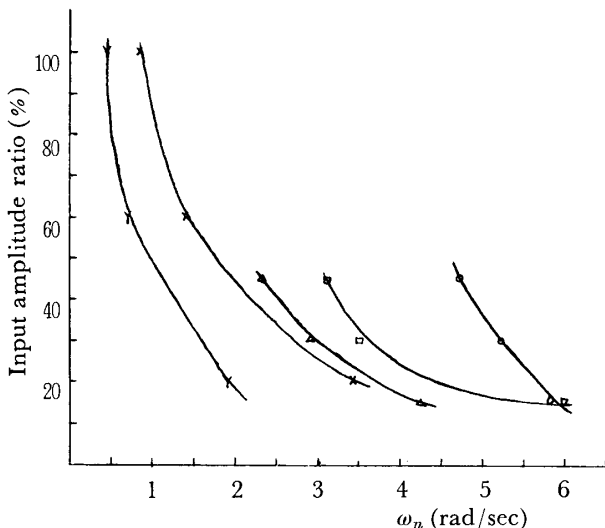


Fig. 9. Input amplitude ratio for industrial-instruments (%) vs. break point frequency (ω_n)

The points indicate the same co. shown in Fig. 8

Fig. 9 は Table. 2 を元にした工業計器の記録部について入力振幅変化に対する折点角周波数 $\omega_n(X)$ の曲線である。入力振幅の減少につれて折点角周波数が増加している。すなわち、折点角周波数 ω_n は入力振幅の関数であることを示しているから、 $\omega_n(X)$ と表現されるわけである。Fig. 10 は入力振幅 X の変化に対する等価時定数 $T(X)$ の曲線である。同様に、等価時定数も X の関数であるから $T(X)$ と表現されるわけである。したがって、Table. 2 より(1)式の各係数は入力振幅 X の関数として表現されるわけである。

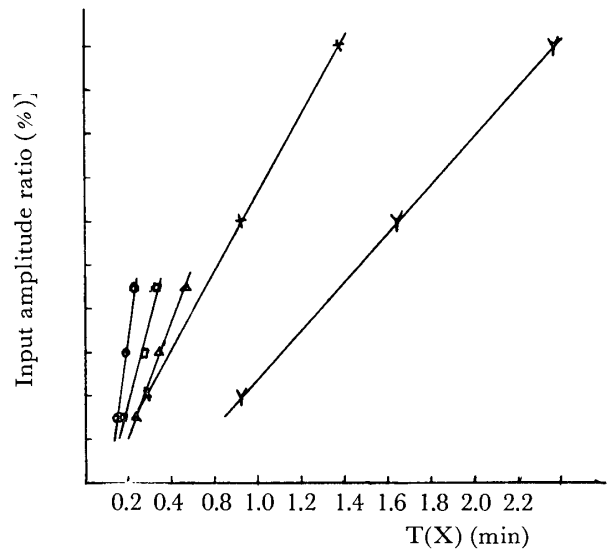


Fig. 10. Input amplitude ratio for the industrial-instruments (%) vs. equivalent time constant (T)

The points indicate the same co. shown in Fig. 8

4. まとめ

ボード線図のゲイン特性が、 $-20Ndb/dec$ (N は整数) の漸近線にそって減衰せず、任意の傾斜を示す減衰特性を有する系の伝達関数として、(1)式の等価伝達関数をもって表現した。そして、ボード線図をもとにして等価伝達関数を決定する手段に、種々の理論曲線を利用して、図式的に非常に短時間に(1)式の各係数値を決定する簡単な方法を記した。また、応用例として 5 機種の工業記器計針部の入力依存性のある等価伝達関数決定法をかかげた。

ここで、(1)式の周波数領域においては解決したが、時間領域すなわち Laplace 逆変換、Z 変換および記述関数の対応などの問題点は残されており、物理的意義もうすい。今後これらの点について研究したく思っている。

御支援いただいた本学橋本教授、御指導いただいた本学神谷助教授、実験を援助していただいた宇部高専川崎助手・兵頭技術員に深く感謝するしだいです。

参考文献

- 1) G. K. Tucker & D. M. Wills: "Asimplified technique of control system engineering": 加古監訳; 制御工学入門, 日刊工業, pp. 153~156
- 2) H. Chestnut & W. Mayer: "Servomechanisms and Regulating system Design"; Vol., John Wilery & Sons Inc, (1955) p. 10
- 3) 相良節夫: 過渡応答法による伝達関数の決定法; 電学誌, Vol. 79, No. 849 (1959) pp. 700~706

- 4) 小山昭一、田川遼三郎、三浦良一：過渡応答から伝達関数を決定する一方法；自動制御，Vol. 3, No. 8, (1965) pp. 262
- 5) B.B. ツロドフニコフ，A.C. ウスコウ；古屋，安達，共訳：自動制御系の統計的解析法；コロナ社（昭38）
- 6) 真鍋舜治：非整数階積分形制御系について；電学誌，Vol. 80, No. 5 (1960) pp, 589~597
- 7) 嶺勝敏・足立宜良・川崎元之・兵頭換士；ボード線図のゲイン特性が任意の減衰特性を有する系の等価伝達関数の決定法；電四学会，連大（1965・4）
- 8) 神谷健児・足立宜良：2次遅れ伝達関数を用いた漸近線近似法による伝達関数決定法；電四学会中国支部（1963）
- 9) 白井源慧・嶺勝敏・足立宜良・川崎元之・兵頭換士：宇部工業短大・高専自動制御モデルプラント（第一報）；宇部工業短大・高専研究報告，Vol. 1-1, No. 1, (1964)（昭和40年6月7日受理）