

多径間単純けた上を走行する鉄道車両 —上下・ピッチング系—の 走行安定性に関する研究

(第1報 単純パラメトリック共振の境界振動数方程式)

會田 忠義*・池上 豊和**・楠窪 剛**

Stability of a Railway Vehicle with Bouncing and Pitching
Motions on a Multispan Simply Supported Girder System

(1st Report: Boundary Frequency Equations of Unstable Regions
for Simple Parametric Resonance)

Tadayoshi AIDA, Toyokazu IKEGAMI
and Tsuyoshi KUSUKOBO

Abstract

Dynamic analysis of a railway vehicle traveling on a multispan simply supported guideway have been carried out to date as a dynamic problem of a vehicle moving on the rigid guideway with irregularity of multi-half sine wave. Dynamic stability of a railway vehicle on the flexible guideway has to be analyzed as a coupled system consisted of the vehicle and flexible guideway.

In this paper, a multispan simply supported guideway is idealized to a circulated guideway system with two or three spans. Consequently, it was found that the perturbation equation of above system is Hill's equation and the boundary frequency equations of simple parametric resonance were obtained by Bolotin's method.

1. まえがき

新幹線の高架橋や長径間の鉄道併用のつり橋の縦げたに見られるように、これらは単純げたあるいは連続げたが相当数、連続して架け渡された構造となっており¹⁾、これらの連続した構造上を車両が走行する場合の走行安定性は興味ある問題である。このような場合の走行安定性の調査は、これまでは車両の上下・ピッチング運動にのみ注目し、車両が正弦波の半波(下に凸)が連続する軌道上を走行することによって軌道から正弦波外力を受ける問題として処理されてきた²⁾。しかし、

これらの系は、車両が、ばね定数が周期的に変動する質量を有する弾性床上を走行する場合に相当し、車両と橋げたの連成振動の運動方程式が Hill 方程式になることが予想される。したがってこのことから、上記のような強制振動の他に、係数励振振動の発生も予想される。たとえば、Chung 及び Genin³⁾は2質量系に単純モデル化した車両が多径間単純けた上を走行する場合について調査を行っており、興味深い結果を与えている。しかし、車両は周知の通り長さを有すること及び車両運動が上下・ピッチング系と左右・ローリング及びヨーイング系に分離されることから、上記の調査結果は十分とはいえない。以上の観点から本研究は新幹線車両に注目し、しかも、上下・ピッチング運動する場合について、多径間単純けた上を走行する場合の車

*建設工学科

**大学院建設工学専攻

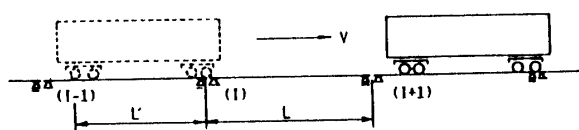


Fig.1 Vehicle on the Multispan Simply Supported Guideway

両の挙動及び安定性を調査するのを目的とする。本報は、車両一けたからなる系の係数励振不安定振動、特に、単純パラメトリック共振の境界振動数方程式を提示するものである。

解析に当って、無限に連続する橋梁をエンドレスの循環けた系 (Fig. 2 参照) にモデル化し、この系上を車両が連続走行する場合に注目した。また、数値解析を単純化するため非減衰系を対象とした。以下、系のモデル化、連成振動の運動方程式、境界振動数方程式を示す。

2. 多径間単純けたのモデル化

Fig. 1 に示すようにモデル車両 (前後輪軸間隔 $2 \times (\ell + a)$) が、等スパン (L) 及び等剛性をもつ多径間単純けた上を走行中、第 $(I - 1)$ 番目のけたの右支点に最前輪が位置する状態を基準 (時刻 t_0) とする。このとき、車両は L/V 時間間隔に静止したけたに進入と退出を繰り返す。一方、けたは、初め、静止の状態にあったものが、車両の進入にともなって振動を始め、車両の退出後は自由振動を続ける。今、Fig. 1 に示すように、けたのスパン長 (L) が車両の前後輪軸間隔 ($2 \times (\ell + a)$) より長い場合を例に挙げて、多径間単純けたのモデル化を示す。

第 I 番目のスパンのけたは静止状態 (たわみ及びたわみ速度がゼロ) から車両進入にともなって車両とともに連成振動し、車両が第 I 番目スパンを退出直後は自由振動する。一方、車両は静止状態の第 I スパンに

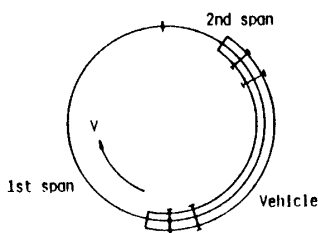


Fig.2 Circulated Guideway System

進入し、けたと振動しながら走行する。次に、静止状態の第 $I + 1$ スパンに進入し、第 $I + 1$ スパンと振動しながら、車両の最前輪軸が第 $I + 1$ スパンの右支点に達する。その後は、静止している第 $I + 2$ スパンに進入するが、ここで、第 I スパンと第 $I + 1$ スパンを数学的に Fig. 2 のように 2 スパンからなる循環けたに置き換え、車両は、再度、第 I スパンに進入すると想定する。この車両が再度第 I スパンに進入するとき、第 I スパンは静止の初期条件を満たさせるものとする。したがって、Fig. 2 の各スパンは $2L/V$ 時間間隔に静止の条件を満たすとする。

同様の考え方によると、 $L < 2(\ell + a)$ の場合は、第 I 、 $I + 1$ 及び $I + 2$ スパンからなる 3 スパンの循環けたに置き換えることができ、 $3L/V$ 時間間隔に各スパンは静止の条件を満たさなければならない。

3. 車両の力学モデルとその運動方程式

国鉄において設定された新幹線力学モデルをすべて線形化し、すべてのばね及びダンパーにはストッパーを設けず自由にした修正モデルを用いる。以下に、上下・ピッチング系力学モデルについて運動方程式を示す。

3.1 力学モデル⁴⁾

Fig. 3 に力学モデルとその座標系を示す。モデル中の各記号及び諸元は次の通りである。(重心)

- G_B : 車体の重心
- G_{T1} : 台車の重心 ($i = 1$: 前台車, $i = 2$: 後台車)
- G_{Wij} : 輪軸の重心 ($j = 1$: 各台車の前輪軸, $j = 2$: 各台車の後輪軸)

(車両の寸法とばねの取り付け位置)

- ℓ : 前後台車心ざら間距離の 2 分の 1 : 8,750m
- a : 軸距の 2 分の 1 : 1,250m

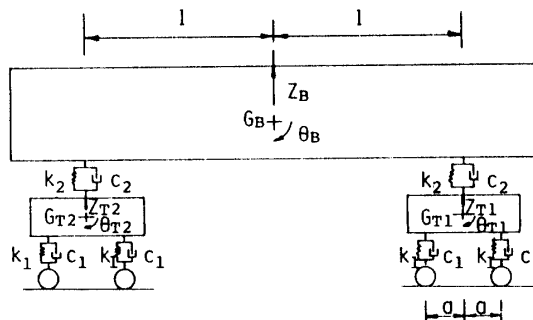


Fig.3 Mechanical Model of Railway Vehicle with Bouncing and Pitching Motions

(質量特性)

m_B : 車体の質量 : 3,742ts²/m

I_{By} : 車体のピッチングに対する慣性モーメント : 174.56ts²m

m_T : 台車の質量 : 0.6710ts²/m

I_{Ty} : 台車のピッチングに対する慣性モーメント : 0.9660ts²m

m_w : 輪軸の質量 : 0.2985ts²/m

(ばね定数と減衰係数)

K_1 : 軸ばねのばね定数 : 227.2 t / m

C_1 : 軸ばねの減衰係数 : 3.0ts/m

K_2 : 枕ばねの上下ばね定数 : 85.0 t / m

C_2 : 枕ばねの上下減衰係数 : 4.0ts/m

(車両の変位)

Z_B : 車体の上下変位

θ_B : 車体のピッチング角

Z_{T1} : 台車の上下変位

θ_{T1} : 台車のピッチング角

Z_{wij} : i 台車 j 輪軸の上下変位

3.2 運動方程式

車体及び台車の運動方程式を次に示す。式中 $(\dot{\quad}) = d/dt$ を表わす。

(車体の上下動の運動方程式)

$$m_B \ddot{Z}_B + \sum_{i=1}^2 C_2 \{ (\dot{Z}_B + (-1)^i \ell \dot{\theta}_B) - \dot{Z}_{T1} \} + \sum_{i=1}^2 K_2 \{ (Z_B + (-1)^i \ell \theta_B) - Z_{T1} \} = 0 \quad (1)$$

(車体のピッチングの運動方程式)

$$I_{By} \ddot{\theta}_B + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ell C_2 \{ (\dot{Z}_B + (-1)^i \ell \dot{\theta}_B) - \dot{Z}_{T1} \} + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ell K_2 \times \{ (Z_B + (-1)^i \ell \theta_B) - Z_{T1} \} = 0 \quad (2)$$

(台車の上下動の運動方程式)

$$m_T \ddot{Z}_{T1} + \sum_{j=1}^2 C_1 \{ (\dot{Z}_{T1} + (-1)^j a \dot{\theta}_{T1}) - \dot{Z}_{wij} \} + \sum_{j=1}^2 K_1 \times \{ (Z_{T1} + (-1)^j a \theta_{T1}) - Z_{wij} \} - C_2 \{ (\dot{Z}_B + (-1)^i \ell \dot{\theta}_B) - \dot{Z}_{T1} \} - K_2 \{ (Z_B + (-1)^i \ell \theta_B) - Z_{T1} \} = 0 \quad (3)$$

$i = 1, 2$

(台車のピッチングの運動方程式)

$$I_{Ty} \ddot{\theta}_{T1} + \sum_{j=1}^2 (-1)^j a C_1 \{ (\dot{Z}_{T1} + (-1)^j a \dot{\theta}_{T1}) - \dot{Z}_{wij} \} + \sum_{j=1}^2 (-1)^j a K_1 \{ (Z_{T1} + (-1)^j a \theta_{T1})$$

$$- Z_{wij} \} = 0$$

$$i = 1, 2 \quad (4)$$

ここで、輪軸は軌道(橋げた)と同じ運動をするとする。したがって、輪軸のみの運動方程式は不要であり、橋げたの運動方程式に輪軸からの外力として、次の値を考慮すればよい。

$$P + m_w \ddot{Z}_{wij} - C_1 \{ (\dot{Z}_{T1} + (-1)^j a \dot{\theta}_{T1}) - \dot{Z}_{wij} \} - K_1 \{ (Z_{T1} + (-1)^j a \theta_{T1}) - Z_{wij} \} \quad (5)$$

ここで、 $P = (m_B + 2 m_T) g / 4$

上記の運動方程式(1), (2), (3)及び(4)をマトリックス表示すると、次式となる。

$$M_v \ddot{d}_v + C_v \dot{d}_v + K_v d_v + G_c g_v + G_k g_v = 0 \quad (6)$$

ここで、

$$d_v = \{ Z_B, \theta_B, Z_{T1}, \theta_{T1}, Z_{T2}, \theta_{T2} \}^T \quad (7)$$

$$g_v = \{ Z_{w11}, Z_{w12}, Z_{w21}, Z_{w22} \}^T \quad (8)$$

M_v, C_v, K_v, G_c 及び G_k を付録に示す。

4. 車両と円軌道げたの連成振動の運動方程式

以下に、スパンLが前後輪軸間隔 $2(\ell + a)$ より長い場合、すなわち、2スパン循環げたと車両との連成振動の運動方程式を示す。

4.1 2スパン循環げたのたわみ振動の運動方程式

Fig. 2に示す循環げたの第1及び第2スパンのたわみをそれぞれ $w_{s1}(x_1, t)$ 及び $w_{s2}(x_2, t)$ で表わすとき、運動方程式と初期条件は次式となる(Fig.4参照)。

$$m \ddot{w}_{sr} + \eta_w \dot{w}_{sr} + EI_{zz} w_{sr}'''' - q_{zr}(x_r, t) = 0 \quad (9)$$

$r = 1, 2$

$$\left. \begin{aligned} w_{s1} &= \dot{w}_{s1} = 0 \cdots \cdots t = 2L(n-1)/V \\ w_{s2} &= \dot{w}_{s2} = 0 \cdots \cdots t = L/V + 2L(n-1)/V \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$n = 1, 2, \dots$

ここで、

m : けたの単位長さ質量

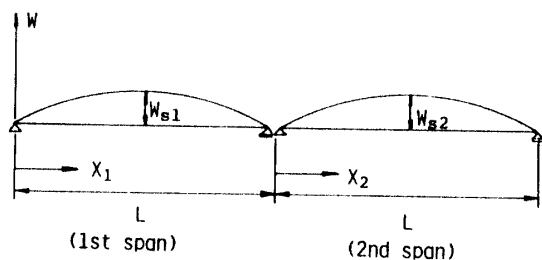


Fig.4 Coordinates of Circulated Guideway System with two Spans

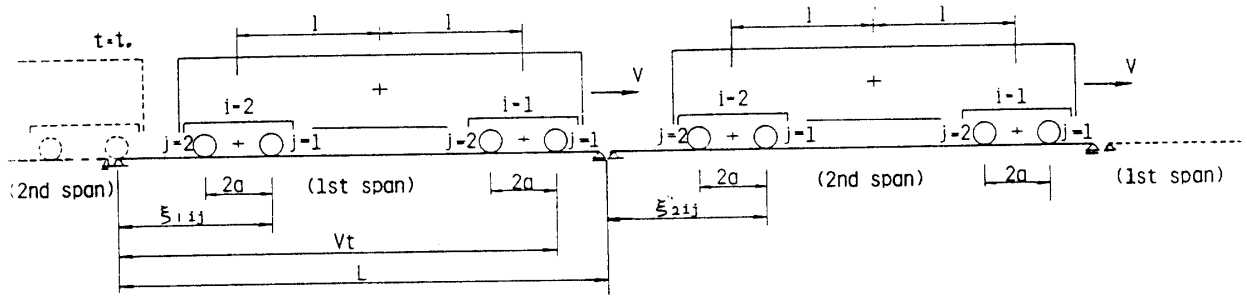


Fig. 5 Vehicle and Circulated Guideway System

η_w : 鉛直たわみ振動の減衰係数

$q_{Zr}(x_r, t)$: 第 r スパンに作用する鉛直荷重

$(\dot{\quad}) = \partial/\partial t, (\quad)' = \partial/\partial x_r$

運動方程式(9)の解を次式で表わす。

$$w_{Sr}(x_r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{rk}(t) w_{Sr_k}(x_r) \quad r = 1, 2 \quad (11)$$

式中、 ρ_{rk} は第 r スパンの時間に関する未知関数 (基準座標)、 w_{Sr_k} は同じく r スパンの座標関数 (基準関数) で、けたの鉛直曲げ振動の k 次の固有関数である。

単純けたの場合は次式となる。

$$w_{Sr_k}(x_r) = \sin k\pi x_r / L \quad (12)$$

以下の記述に当って、式(11)を K 項からなる有限級数で近似する。

式(11)を(9)に代入整理すると、運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{rk} + \frac{\eta_w}{m} \dot{\rho}_{rk} + \omega_{wk}^2 \rho_{rk} \\ = \frac{2}{mL} \int_0^L q_{Zr}(x_r, t) w_{Sr_k}(x_r) dx \end{aligned} \quad r = 1, 2 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

ここで、

$$\omega_{wk} = \sqrt{\frac{EI_{zz}}{m}} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 : \text{単純けたの } k \text{ 次の固有}$$

振動数

車両が循環げたの第 2 スパン上にあり、車両の最前輪軸が第 1 スパンに進入直前 (Fig. 2 の状態) を基準 ($t = t_0$) に、ある時刻 ($t + t_0$) における各スパンに作用する荷重 $q_{Zr}(x_r, t)$ は式(5)を参照すると、次式で表わされる。(Fig. 5 参照)

$$\begin{aligned} q_{Zr}(x_r, t) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{ P + m_w \ddot{Z}_{wr_{ij}} \\ - C_1 \{ (\dot{Z}_{T_i} + (-1)^i a \dot{\theta}_{T_i}) - \dot{Z}_{wr_{ij}} \} \end{aligned}$$

$$- K_1 \{ (Z_{T_i} + (-1)^i a \theta_{T_i}) - Z_{wr_{ij}} \} \delta(x_j - \xi_{r_{ij}}(t)) \quad r = 1, 2 \quad (14)$$

ここで、

$$\xi_{r_{ij}} = Vt - (r-1)L - 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \} \quad r = 1, 2 \quad (15)$$

$$Z_{wr_{ij}} = \sum_{n=1}^k \rho_{rn}(t) w_{Sr_n}(x_r) \mid x_r = \xi_{r_{ij}} \quad r = 1, 2 \quad (16)$$

δ は Dirac の δ 関数である。

車両が循環げた上を走行するとき、車両は $2L/V$ ごとに、同じ位置にあることを考慮して、今、基準状態 ($t = t_0$) より一周する状態を想定する。このとき $w_{Sr_n}(\xi_{r_{ij}})$ は車両の第 i 台車第 j 輪軸が r スパン上にあるときのみ定義され、 r スパンの外にあるときはゼロであることより、 $w_{Sr_n}(\xi_{r_{ij}})$ は次式で表わされる。

$w_{S1n}(\xi_{1ij})$ は

$$= \begin{cases} 0 \dots\dots 0 \leq t \leq 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \} / V \\ \sin \frac{n\pi}{L} [Vt - 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] \\ \dots\dots 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \} / V \leq t \leq [L + 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] / V \\ 0 \dots\dots [L + 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] / V \leq t \leq 2L / V \end{cases} \quad (17)$$

$w_{S2n}(\xi_{2ij})$

$$= \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{L} [Vt + L - 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] \\ \dots\dots 0 \leq t \leq 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \} / V \\ 0 \dots\dots 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \} / V \leq t \leq [L + 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] / V \\ \sin \frac{n\pi}{L} [Vt - L - 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] \\ \dots\dots [L + 2 \{ \ell (i-1) + a(j-1) \}] / V \leq t \leq 2L / V \end{cases} \quad (18)$$

w_{srn} は上述より明らかなように、基準状態より車両が循環けた上を周回するたびに、式(17)及び(18)が繰り返されることになる。したがって、 w_{srn} は連続する時間 t に対して周期 $2L/V$ をもつ周期関数となり、次のように、Fourier 級数展開することができる。

$$w_{srn}(\xi_{r1j}) = \frac{1}{2} r a_{on1j} + \sum_{p=1}^{\infty} (r a_{pn1j} \cos p\omega t + r b_{pn1j} \sin p\omega t) \quad r = 1, 2 \quad (19)$$

ここで、 $\omega = \pi V/L$ である。

式(13)に(14)、(15)及び(16)を代入整理すると、

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{rk} + \frac{2m_w}{mL} \sum_{n=1}^k F_{1rnk} \dot{\rho}_{rn} + \frac{\eta_w}{m} \dot{\rho}_{rk} + \frac{4m_w}{mL} \sum_{n=1}^k F_{2rnk} \times \dot{\rho}_{rn} + \frac{2C_1}{mL} \sum_{n=1}^k F_{2rnk} \rho_{rn} + \frac{2K_1}{mL} \sum_{n=1}^k F_{1rnk} \rho_{rn} - \frac{2C_1}{mL} \sum_{i=1}^2 (E_{1rik} \dot{Z}_{Ti} + aE_{2rik} \dot{\theta}_{Ti}) - \frac{2K_1}{mL} \sum_{i=1}^2 (E_{1rik} Z_{Ti} + aE_{2rik} \theta_{Ti}) = -\frac{2P}{mL} F_{ork} \quad r = 1, 2 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (20) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_{1rnk} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{srn}(\xi_{r1j}) w_{srk}(\xi_{r1j}), \\ E_{1rik} &= \sum_{j=1}^2 w_{srk}(\xi_{r1j}) \\ F_{2rnk} &= V \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w'_{srn}(\xi_{r1j}) w_{srk}(\xi_{r1j}), \\ E_{2rik} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^j w_{srk}(\xi_{r1j}) \\ F_{3rnk} &= V^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w''_{srn}(\xi_{r1j}) w_{srk}(\xi_{r1j}), \\ F_{ork} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{srk}(\xi_{r1j}) \end{aligned} \quad (21)$$

式(20)をマトリックス表示すると、次式となる。

$$M_{gvr} \ddot{d}_{gvr} + C_{gvr} \dot{d}_{gvr} + K_{gvr} d_{gvr} + V_{cvr} \dot{d}_v + V_{kvr} d_v = P_r \quad r = 1, 2 \quad (22)$$

ここで、

$$\begin{aligned} d_{gvr} &= \{\rho_{r1}, \rho_{r2}, \dots, \rho_{rk}\}^T \\ M_{gvr} &= I + \frac{2m_w}{mL} F_{1r} \\ C_{gvr} &= \frac{\eta_w}{m} I + \frac{2C_1}{mL} F_{1r} + \frac{4m_w}{mL} F_{2r} \\ K_{gvr} &= K + \frac{2K_1}{mL} F_{1r} + \frac{2C_1}{mL} F_{2r} + \frac{2m_w}{mL} F_{3r} \\ V_{cvr} &= -\frac{2C_1}{mL} E_r, \quad V_{kvr} = -\frac{2K_1}{mL} E_r \\ P_r &= -\frac{2P}{mL} f_r \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = 1, 2 \quad (24)$$

式(24)中 I は単位マトリックス、 K はけたの剛性マトリックス、 F_{r1} 、 F_{r2} 、 F_{r3} 及び f_r は要素内に式(21)の値をもつマトリックスである。これらの内容を付録に示す。

一方、けたの初期条件は式(10)より次式で表わされる。

$$\begin{aligned} d_{gv1} = \dot{d}_{gv1} = 0 \quad \dots \dots t = 2L(n-1)/V \\ d_{gv2} = \dot{d}_{gv2} = 0 \quad \dots \dots t = L/V + 2L(n-1)/V \quad n = 1, 2 \dots \quad (25) \end{aligned}$$

4.2 連成振動時の車両の運動方程式

車両の運動方程式は式(6)で表わされるが、けた上を走行する場合、式(6)中の輪軸の鉛直変位を表わす g_v は、基準状態より1周期以内において、各スパンでの各輪軸位置での鉛直変位 Z_{wjj} が式(16)で表わされ、さらに、各スパンに対する基準関数 w_{srn} が式(17)及び(18)で表わされることから、次式となる。

$$g_v = \sum_{r=1}^2 H_r d_{gvr} \quad (26)$$

ここで、 H_r の内容を付録に示す。

したがって、連成振動時の車両の運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} M_v \ddot{d}_v + C_v \dot{d}_v + K_v d_v + G_c \sum_{r=1}^2 H_r \dot{d}_{gvr} + (G_c \sum_{r=1}^2 H'_r d_{gvr} + G_k \sum_{r=1}^2 H_r d_{gvr}) = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

4.3 連成振動の運動方程式

車両の運動方程式(27)及びけたの運動方程式(22)より、連成振動の運動方程式は次式で表わされる。

$$M_v \ddot{d}_v + C_v \dot{d}_v + K_v d_v + R_{cv} \dot{d}_{gv} + R_{kv} d_{gv} = 0 \quad (28)$$

$$M_{gv} \ddot{d}_{gv} + C_{gv} \dot{d}_{gv} + K_{gv} d_{gv} + Q_{cv} \dot{d}_v + Q_{kv} d_v = P \quad (29)$$

ここで、

$$\begin{aligned} d_{gv} &= \{d_{gv1}, d_{gv2}\}^T \\ R_{cv} &= [G_c H_1, G_c H_2] \\ R_{kv} &= [G_c H_1' + G_k H_1, G_c H_2' + G_k H_2] \\ M_{gv} &= \begin{bmatrix} M_{gv1} & 0 \\ 0 & M_{gv2} \end{bmatrix} \quad C_{gv} = \begin{bmatrix} C_{gv1} & 0 \\ 0 & C_{gv2} \end{bmatrix} \\ K_{gv} &= \begin{bmatrix} K_{gv1} & 0 \\ 0 & K_{gv2} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} V_{cv1} \\ V_{cv2} \end{bmatrix} \quad Q_{kv} = \begin{bmatrix} V_{kv1} \\ V_{kv2} \end{bmatrix} \quad (30) \end{aligned}$$

5. 車両運動の安定解析

5.1 連成振動の Hill 型運動方程式

2スパン循環けたの運動方程式の解析に当って、解の座標関数 $w_{srn}(\xi_{r1j})$ が、式(17)及び(18)に示すように、

周期 $2L/V$ を有する周期関数で表わされ、式(18)の Fourier 級数で表わされる。このとき、けたの運動方程式中のマトリックス F_{1r} , F_{2r} , F_{3r} , E_r 及び f_r 並びに車両の運動方程式中のマトリックス H_r も w_{srn} を要素にもつことより、次のように Fourier 級数表示できる。

$$\begin{aligned} F_{qr} &= \frac{1}{2} F_{qro} + \sum_{p=1}^{\infty} (F_{qrp}^c \cos p\omega t + F_{qrp}^s \sin p\omega t) \\ E_r &= \frac{1}{2} E_{ro} + \sum_{p=1}^{\infty} (E_{rp}^c \cos p\omega t + E_{rp}^s \sin p\omega t) \\ f_r &= \frac{1}{2} f_{ro} + \sum_{p=1}^{\infty} (f_{rp}^c \cos p\omega t + f_{rp}^s \sin p\omega t) \\ H_r &= \frac{1}{2} H_{ro} + \sum_{p=1}^{\infty} (H_{rp}^c \cos p\omega t + H_{rp}^s \sin p\omega t) \\ r &= 1, 2 \quad q = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (32)$$

さらに、式(31)の各マトリックスも次のように表示する。

$$\begin{aligned} R_{cv} &= \frac{1}{2} R_{cvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{cvp}^c \cos p\omega t + R_{cvp}^s \sin p\omega t) \\ R_{kv} &= \frac{1}{2} R_{kvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{kvp}^c \cos p\omega t + R_{kvp}^s \sin p\omega t) \\ M_{gv} &= \frac{1}{2} M_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gvp}^c \cos p\omega t + M_{gvp}^s \sin p\omega t) \\ C_{gv} &= \frac{1}{2} C_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{gvp}^c \cos p\omega t + C_{gvp}^s \sin p\omega t) \\ K_{gv} &= \frac{1}{2} K_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gvp}^c \cos p\omega t + K_{gvp}^s \sin p\omega t) \\ Q_{cv} &= \frac{1}{2} Q_{cvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{cvp}^c \cos p\omega t + Q_{cvp}^s \sin p\omega t) \\ Q_{kv} &= \frac{1}{2} Q_{kvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{kvp}^c \cos p\omega t + Q_{kvp}^s \sin p\omega t) \\ P &= \frac{1}{2} P_o + \sum_{p=1}^{\infty} (P_p^c \cos p\omega t + P_p^s \sin p\omega t) \end{aligned} \quad (33)$$

したがって、車両及びけたの運動方程式は次に示すように、周期 $2L/V$ を有する方程式となり、Hill 型の方程式に相当することになる。

$$\begin{aligned} M_v \ddot{d}_v + C_v \dot{d}_v + K_v d_v + \left\{ \frac{1}{2} R_{cvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{cvp}^c \cos p\omega t + R_{cvp}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{d}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} R_{kvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{kvp}^c \cos p\omega t + R_{kvp}^s \sin p\omega t) \right\} d_{gv} = 0 \\ \left\{ \frac{1}{2} M_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gvp}^c \cos p\omega t + M_{gvp}^s \sin p\omega t) \right\} \ddot{d}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} C_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{gvp}^c \cos p\omega t + C_{gvp}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{d}_{gv} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} + \left\{ \frac{1}{2} K_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gvp}^c \cos p\omega t + K_{gvp}^s \sin p\omega t) \right\} d_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} Q_{cvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{cvp}^c \cos p\omega t + Q_{cvp}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{d}_v \\ + \left\{ \frac{1}{2} Q_{kvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{kvp}^c \cos p\omega t + Q_{kvp}^s \sin p\omega t) \right\} d_v \\ = \left\{ \frac{1}{2} P_o + \sum_{p=1}^{\infty} (P_p^c \cos p\omega t + P_p^s \sin p\omega t) \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、けたの初期条件は式(25)の通りで、 $2L/V$ の時間間隔に第 1 スパンの、 L/V だけ遅れて $2L/V$ 時間間隔に第 2 スパンのけたは静止の条件を満すものとする。

5.2 車両運動の係数励振不安定振動解析

5.2.1 擾乱方程式

車両及び軌道けたの連成振動の運動方程式は上述の通り Hill 型方程式に相当することから、係数励振不安定振動が発生することが予想される。ここで、けたの基準座標ベクトル d_{gv1} 及び d_{gv2} は周期的に静止するものとする。

今、走行速度の微小の変化にともなう式(34)及び(35)の励振振動数 ω の微小の変化により不安定振動を起した場合を想定する。不安定振動にともなう振動変位増分を、車両に対して \bar{d}_v 、けたに対して \bar{d}_{gvr} ($r = 1, 2$) とするとき、不安定振動時の車両及びけたの振動ベクトルはそれぞれ次の通りとなる。

$$\begin{aligned} \text{車両} \cdots d_v + \bar{d}_v \\ \text{けた} \cdots d_{gvr} + \bar{d}_{gvr} \quad (r = 1, 2) \end{aligned}$$

このとき変位増分に対する運動方程式(34)及び(35)より明らかなように次式となる。

$$\begin{aligned} M_v \ddot{\bar{d}}_v + C_v \dot{\bar{d}}_v + K_v \bar{d}_v \\ + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{cvp}^c \cos p\omega t + R_{cvp}^s \sin p\omega t) \dot{\bar{d}}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} R_{kvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{kvp}^c \cos p\omega t + R_{kvp}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_{gv} = 0 \\ \left\{ \frac{1}{2} M_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gvp}^c \cos p\omega t + M_{gvp}^s \sin p\omega t) \right\} \ddot{\bar{d}}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} C_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{gvp}^c \cos p\omega t + C_{gvp}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{\bar{d}}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} K_{gvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gvp}^c \cos p\omega t + K_{gvp}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} Q_{cvo} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{cvp}^c \cos p\omega t + Q_{cvp}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{\bar{d}}_v \end{aligned} \quad (36)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{k_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{Q}_{k_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{Q}_{k_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \bar{\mathbf{d}}_v = 0 \quad (37)$$

けたの増分変位ベクトルに対する初期条件は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}_{gv1} &= \dot{\bar{\mathbf{d}}}_{gv1} = \mathbf{0} \cdots \cdots t = 2L(n-1)/V \\ \bar{\mathbf{d}}_{gv2} &= \dot{\bar{\mathbf{d}}}_{gv2} = \mathbf{0} \cdots \cdots t = L/V + 2L(n-1)/V \\ n &= 1, 2, 3 \cdots \end{aligned} \quad (38)$$

安定性の検討は増加変位ベクトルに対して行う。又、以下の解析は、車両及びけたの減衰の影響を無視した場合について行うこととする。すなわち、この場合の車両及びけたの増分方程式（変分方程式）は次の通りとなる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_v \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_v + \mathbf{K}_v \bar{\mathbf{d}}_v &+ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{R}_{k_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{k_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{R}_{k_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \\ \times \bar{\mathbf{d}}_{gv} &= \mathbf{0} \quad (39) \\ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{M}_{g_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{M}_{g_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{M}_{g_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_{gv} &+ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{K}_{g_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{K}_{g_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{K}_{g_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \bar{\mathbf{d}}_{gv} \\ + \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{k_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{Q}_{k_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{Q}_{k_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \bar{\mathbf{d}}_v &= \mathbf{0} \quad (40) \end{aligned}$$

今、車両が不安定振動を起し、このとき $\bar{\mathbf{d}}_v$ が調和振動であると想定する。このとき、式(37)のけたの振動方程式の解は、 $\bar{\mathbf{d}}_v$ 及び $\dot{\bar{\mathbf{d}}}_v$ の項が削除された場合の解、すなわち、自由振動解と、車両の振動 $\bar{\mathbf{d}}_v$ による項を強制振動項と考えたときの解、すなわち、強制振動解の和で表される。既述のけたの初期条件は自由振動解にのみ影響（積分定数の決定にのみ影響）し、強制振動解には影響しない。また、自由振動はけたの固有振動数をもって振動するのみで、車両と同じ周期をもって振動するけたの振動解は強制項のみである。したがって、係数励振振動する車両と同じ周期をもって振動する調和振動解に注目した安定性の調査には、けたの基準座標ベクトル $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ の初期条件は考慮する必要はない。以下の解析では、連成振動の運動方程式の初期条件を無視し、単純パラメトリック共振の調査を Bolotin 法に基づいて行う。

5.2.2 境界振動数方程式

Hill 方程式の解について、係数の周期と同じか、あるいは2倍の周期を持つ周期解が単純共振の不安定領域と安定領域を区分すること、より厳密に言うと、同じ

周期を持つ二つの解が上記の不安定領域を区分し、異なる周期をもつ解が安定領域を区分することが知られている⁵⁾。ここで、係数の周期は、前述より $T = 2L/V$ で表される。

初めに、係数の周期の2倍の周期をもつ周期解の存在条件として境界振動数方程式を求める。

今、車両が周期 $2T$ をもって運動するとし、そのとき車両ベクトルを次式で表す。

$$\bar{\mathbf{d}}_v = \sum_{p=1,3,5}^{\infty} (a_p \cos \frac{1}{2} p\omega t + b_p \sin \frac{1}{2} p\omega t) \quad (41)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2L/V} = \frac{\pi V}{L}$$

車両振動ベクトルが上式であるときのけたの振動ベクトル $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ は次のように求める。すなわち式(41)を式(40)に代入すると、次式で表されるけたの運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{M}_{g_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{M}_{g_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{M}_{g_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_{gv} \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{K}_{g_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{K}_{g_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{K}_{g_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \bar{\mathbf{d}}_{gv} \\ &= - \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{k_{vo}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{Q}_{k_{vp}} \cos p\omega t + \mathbf{Q}_{k_{vp}} \sin p\omega t) \right\} \\ &\times \sum_{p=1,3,5}^{\infty} (a_p \cos \frac{1}{2} p\omega t + b_p \sin \frac{1}{2} p\omega t) \quad (42) \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ は、上式を $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ に関する強制振動方程式と考えたとき、右辺の強制項によるけたの強制振動ベクトル $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ として得られる。 $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ は次式で表わすことができる。

$$\bar{\mathbf{d}}_{gv} = \sum_{p=1,3,5}^{\infty} (\alpha_p \cos \frac{1}{2} p\omega t + \beta_p \sin \frac{1}{2} p\omega t) \quad (43)$$

式(43)がけたの運動方程式(42)を満すための条件は、式(43)を式(42)に代入し、左右両辺の \sin 及び \cos の係数の比較（調和バランス法）によりもとめることができ、次の条件式となる。

$$\left(-\frac{\omega^2}{4} [\mathbf{M}]_1 + [\mathbf{K}]_1 \right) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}]_1 \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (44)$$

ここで、 $[\mathbf{M}]_1$ 、 $[\mathbf{K}]_1$ 、 $[\mathbf{P}]_1$ マトリックスの内容は付録参照。

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \{ \cdots \alpha_5, \alpha_3, \alpha_1, \beta_1, \beta_3, \beta_5 \cdots \}^T$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \{ \cdots a_5, a_3, a_1, b_1, b_3, b_5 \cdots \}^T$$

一方、 $\bar{\mathbf{d}}_v$ (41)及び $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ (43)は車両の運動方程式(39)をも満さなければならない。このことから、車両の運動方程式(39)に(41)及び(43)を代入して、調和バランス法を適用すると、 $\bar{\mathbf{d}}_v$ 及び $\bar{\mathbf{d}}_{gv}$ の存在条件として、次式が得られる。

$$\left(-\frac{\omega^2}{4} [M_v]_1 + [K_v]_1\right) \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [H]_1 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (45)$$

ここで, $[M_v]_1$, $[K_v]_1$, $[H]_1$ マトリックスは付録参照.

式(44)及び(45)が同時に満足されるとき, 車両及びけたが周期 $2T$ をもって振動することから, 式(44)と(45)が同時に満される条件式, すなわち,

$$\begin{vmatrix} -\frac{\omega^2}{4} [M]_1 + [K]_1 & -[P]_1 \\ \frac{1}{2} [H]_1 & -\frac{\omega^2}{4} [M_v]_1 + [K_v]_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (46)$$

が, 周期 $2T$ をもつ不安定振動の境界振動数方程式となる.

係数の周期 T と同じ周期をもつ周期解の存在条件としての境界振動数方程式は, 同様の手順により求めることができる. すなわち, 車両ベクトルを次式で表し,

$$\bar{d}_v = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p\omega t + b_p \sin p\omega t) \quad (47)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2L/V} = \frac{\pi V}{L}$$

車両の振動式(47)によるけたの強制振動ベクトル d_{gv} を次式で表すとき,

$$\bar{d}_{gv} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos p\omega t + \beta_p \sin p\omega t) \quad (48)$$

式(47)及び(48)が同時に車両の運動方程式及び, けたの運動方程式を満す条件として次の関係式が得られる.

$$\left(-\omega^2 [M]_2 + [K]_2\right) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [P]_2 \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (49)$$

$$\left(-\omega^2 [M_v]_2 + [K_v]_2\right) \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [H]_2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (50)$$

ここで, $[M]_2$, $[K]_2$, $[P]_2$, $[M_v]_2$, $[K_v]_2$, $[H]_2$ マトリックスは付録参照.

式(49)及び(50)が同時に満足されるとき, 車両及びけたが周期 T をもって振動することから, 式(49)及び(50)が同時に満される条件,

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 [M]_2 + [K]_2 & [P]_2 \\ \frac{1}{2} [H]_2 & -\omega^2 [M_v]_2 + [K_v]_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (51)$$

が周期 T をもつ不安定振動の境界振動数方程式となる. 式(46)及び式(51)の境界振動数方程式を解くことにより, 不安定振動時の相当速度が求められる.

6. 結び

多径間単純けた上を単一車両 (ボギー車) が走行する場合の定式化に当って, 次の点が明らかにされた.

- (1) 無限に連続する単純けたと車両からなる系をエンドレスの循環げた系に置換することにより, 永年形の運動方程式を有限形に定式化することができた.
- (2) 運動方程式が Hill 型方程式になることを示し, 係数励振不安定振動の発生を示唆した.
- (3) 単純パラメトリック共振に注目し, 不安定領域の境界振動数方程式を提示した.
- (4) 境界振動数方程式を実系に適用することにより実橋・実車両に対する調査が可能になった.

参考文献

- 1) 本州四国連絡橋公団: 南・北備讃瀬戸大橋設計図
- 2) 松浦章夫: 鉄道技術研究報告, 1074, pp. 1 ~ 198 (1973)
- 3) Y. I. Chung and J. Genin: Transactions of ASME, Series G, Vol.100, PP.326~332(1978)
- 4) 日本鉄道施設協会: 本州四国連絡橋の列車走行に関する研究 [別冊1], 走行分科会中間報告 pp. 2 ~ 5 (1977)
- 5) V. V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, San Francisco (1964)

(昭和61年10月14日受理)

付 録

1. 車両の運動方程式中の各マトリックスの各要素

$$M_v = \begin{bmatrix} m_B & & & & & \\ & I_{By} & & & & \\ & & m_T & & & \\ & & & I_{Ty} & & \\ & & & & m_T & \\ & & & & & I_{Ty} \end{bmatrix} \quad C_v = \begin{bmatrix} 2c_2 + 2c_v & 0 & -c_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 2l^2c_2 + 2l_0^2c_v & lc_2 & 0 & -lc_2 & 0 \\ -c_2 & lc_2 & 2c_1 + c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2c_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & -lc_2 & 0 & 0 & 2c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2c_1 \end{bmatrix}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 2k_2 + 2k_v & 0 & -k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 2l^2k_2 + 2l_0^2k_v & lk_2 & 0 & -lk_2 & 0 \\ -k_2 & lk_2 & 2k_1 + k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & -lk_2 & 0 & 0 & 2k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2k_1 \end{bmatrix} \quad G_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 - c_1 & 0 & 0 & 0 \\ ac_1 - ac_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 - c_1 & 0 \\ 0 & 0 & ac_1 - ac_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 - k_1 & 0 & 0 & 0 \\ ak_1 - ak_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 - k_1 & 0 \\ 0 & 0 & ak_1 - ak_1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_r = \begin{bmatrix} w_{sr1}(\xi_{r11}), w_{sr2}(\xi_{r11}) \cdots \cdots w_{srk}(\xi_{r11}) \\ w_{sr1}(\xi_{r12}), w_{sr2}(\xi_{r12}) \cdots \cdots w_{srk}(\xi_{r12}) \\ w_{sr1}(\xi_{r21}), w_{sr2}(\xi_{r21}) \cdots \cdots w_{srk}(\xi_{r21}) \\ w_{sr1}(\xi_{r22}), w_{sr2}(\xi_{r22}) \cdots \cdots w_{srk}(\xi_{r22}) \end{bmatrix}$$

2. 橋げたの運動方程式中の各マトリックスの各要素

$$F_{qr} = \begin{bmatrix} F_{rq11}, F_{rq21}, \cdots \cdots F_{rqk1} \\ F_{rq12}, F_{rq22}, \cdots \cdots F_{rqk2} \\ \vdots \\ F_{rq1k}, F_{rq2k}, \cdots \cdots F_{rqkk} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} \omega^2 w_1 \\ \omega^2 w_2 \\ \cdots \\ \omega^2 w_k \end{bmatrix} \quad E_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{1r11}, & aE_{2r11}, & E_{1r21}, & aE_{2r21}, \\ 0 & 0 & E_{1r12}, & aE_{2r12}, & E_{1r22}, & aE_{2r22}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & E_{1r1k}, & aE_{2r1k}, & E_{1r2k}, & aE_{2r2k} \end{bmatrix}$$

$$f_r = \{F_{0r1}, F_{0r2}, \cdots \cdots F_{0rk}\}^T$$

3. 境界振動数方程式中の各マトリックスの要素

$$[M]_1 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots 3^2(M_{gv0}^c + M_{gv3}^s), & 1^2(M_{gv1}^c + M_{gv2}^s), & 1^2(M_{gv2}^s - M_{gv1}^s), & 3^2(M_{gv3}^s) & \cdots \\ \cdots 3^2(M_{gv2}^c + M_{gv1}^s), & 1^2(M_{gv0}^c + M_{gv1}^c), & 1^2(M_{gv1}^s), & 3^2(M_{gv2}^s + M_{gv1}^s) & \cdots \\ \cdots 3^2(M_{gv2}^s - M_{gv1}^s), & 1^2(M_{gv1}^s), & 1^2(M_{gv0}^c - M_{gv1}^c), & 3^2(M_{gv1}^c - M_{gv2}^c) & \cdots \\ \cdots 3^2(M_{gv3}^s), & 1^2(M_{gv1}^s + M_{gv2}^s), & 1^2(M_{gv1}^c - M_{gv2}^c), & 3^2(M_{gv0}^c - M_{gv3}^s) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$[M_V]_1 = \begin{bmatrix} \cdots & & & & & \\ & 3^2 M_V & & & & \\ & & 1^2 M_V & & & \\ & & & 1^2 M_V & & \\ & & & & 3^2 M_V & \\ & & & & & \cdots \end{bmatrix} \quad [K]_1 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots K_{gV3}^C + K_{gV0}^C, & K_{gV1}^C + K_{gV2}^C, & K_{gV2}^S - K_{gV1}^S, & K_{gV3}^S & \cdots \\ \cdots K_{gV1}^C + K_{gV2}^C, & K_{gV0}^C + K_{gV1}^C, & K_{gV1}^S, & K_{gV1}^S + K_{gV2}^S, & \cdots \\ \cdots K_{gV2}^S - K_{gV1}^S, & K_{gV1}^S, & K_{gV0}^C - K_{gV1}^C, & K_{gV1}^C - K_{gV2}^C, & \cdots \\ \cdots K_{gV3}^S, & K_{gV1}^S + K_{gV2}^S, & K_{gV1}^C - K_{gV2}^C, & K_{gV0}^C - K_{gV3}^C, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[K_V]_1 = \begin{bmatrix} \cdots & & & & \\ & K_V & & & \\ & & K_V & & \\ & & & K_V & \\ & & & & K_V \\ & & & & \cdots \end{bmatrix} \quad [P]_1 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots Q_{kV0}^C + Q_{kV3}^C, & Q_{kV1}^C + Q_{kV2}^C, & Q_{kV2}^S - Q_{kV1}^S, & Q_{kV3}^S & \cdots \\ \cdots Q_{kV1}^C + Q_{kV2}^C, & Q_{kV0}^C + Q_{kV1}^C, & Q_{kV1}^S, & Q_{kV1}^S + Q_{kV2}^S, & \cdots \\ \cdots Q_{kV2}^S - Q_{kV1}^S, & Q_{kV1}^S, & Q_{kV0}^C - Q_{kV1}^C, & Q_{kV1}^C - Q_{kV2}^C, & \cdots \\ \cdots Q_{kV3}^S, & Q_{kV1}^S + Q_{kV2}^S, & Q_{kV1}^C - Q_{kV2}^C, & Q_{kV0}^C - Q_{kV3}^C, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[H]_1 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots R_{kV0}^C + R_{kV3}^C, & R_{kV1}^C + R_{kV2}^C, & R_{kV2}^S - R_{kV1}^S, & R_{kV3}^S & \cdots \\ \cdots R_{kV2}^C + R_{kV1}^C, & R_{kV0}^C + R_{kV1}^C, & R_{kV1}^S, & R_{kV1}^S + R_{kV2}^S & \cdots \\ \cdots R_{kV2}^S - R_{kV1}^S, & R_{kV1}^S, & R_{kV0}^C - R_{kV1}^C, & R_{kV1}^C - R_{kV2}^C & \cdots \\ \cdots R_{kV3}^S, & R_{kV1}^S + R_{kV2}^S, & R_{kV1}^C - R_{kV2}^C, & R_{kV3}^C - R_{kV0}^C, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[M]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots 2^2(M_{gV0}^C + M_{gV4}^C), & 1^2(M_{gV1}^C + M_{gV3}^C), & O, & 1^2(M_{gV1}^S - M_{gV3}^S), & 2^2(-M_{gV4}^S) & \cdots \\ \cdots 2^2(M_{gV1}^C + M_{gV3}^C), & 1^2(M_{gV0}^C + M_{gV2}^C), & O, & 1^2(-M_{gV2}^S), & 2^2(-M_{gV3}^S - M_{gV1}^S) & \cdots \\ \cdots 2^2(M_{gV2}^C), & 1^2(M_{gV1}^C), & O, & 1^2(-M_{gV1}^S), & 2^2(-M_{gV2}^S) & \cdots \\ \cdots 2^2(M_{gV3}^S - M_{gV1}^S), & 1^2(M_{gV2}^S), & O, & 1^2(M_{gV0}^C - M_{gV2}^C), & 2^2(M_{gV1}^C - M_{gV3}^C) & \cdots \\ \cdots 2^2(M_{gV4}^S), & 1^2(M_{gV1}^S + M_{gV3}^S), & O, & 1^2(M_{gV1}^C - M_{gV3}^C), & 2^2(M_{gV0}^C - M_{gV4}^C) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots K_{gV0}^C + K_{gV4}^C, & K_{gV1}^C + K_{gV3}^C, & K_{gV2}^C, & K_{gV1}^S - K_{gV3}^S, & -K_{gV4}^S, & \cdots \\ \cdots K_{gV1}^C + K_{gV3}^C, & K_{gV0}^C + K_{gV2}^C, & K_{gV1}^C, & -K_{gV2}^S, & -K_{gV1}^S - K_{gV3}^S, & \cdots \\ \cdots K_{gV2}^C, & K_{gV1}^C, & \frac{1}{2} K_{gV0}^C, & -K_{gV1}^S, & -K_{gV2}^S, & \cdots \\ \cdots K_{gV3}^S - K_{gV1}^S, & K_{gV2}^S, & K_{gV1}^S, & K_{gV0}^C - K_{gV2}^C, & K_{gV1}^C - K_{gV3}^C, & \cdots \\ \cdots K_{gV4}^S, & K_{gV1}^S + K_{gV3}^S, & K_{gV2}^S, & K_{gV1}^C - K_{gV3}^C, & K_{gV0}^C - K_{gV4}^C, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[M_V]_2 = \begin{bmatrix} \cdots & & & & & \\ & 2^2 M_V & & & & \\ & & 1^2 M_V & & & \\ & & & O & & \\ & & & & 1^2 M_V & \\ & & & & & 2^2 M_V \\ & & & & & \cdots \end{bmatrix}$$

$$[P]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots Q_{kv0}^C + Q_{kv4}^C, & Q_{kv1}^C + Q_{kv3}^C, & Q_{kv2}^C, & Q_{kv1}^S - Q_{kv3}^S, & -Q_{kv4}^S, & \cdots \\ \cdots Q_{kv1}^C + Q_{kv3}^C, & Q_{kv0}^C + Q_{kv2}^C, & Q_{kv1}^C, & -Q_{kv2}^S, & -Q_{kv1}^S - Q_{kv3}^S, & \cdots \\ \cdots Q_{kv2}^C, & Q_{kv1}^C, & \frac{1}{2} Q_{kv0}^C, & -Q_{kv1}^S, & -Q_{kv2}^S, & \cdots \\ \cdots Q_{kv3}^S - Q_{kv1}^S, & Q_{kv2}^S, & Q_{kv1}^S, & Q_{kv0}^C - Q_{kv2}^C, & Q_{kv1}^C - Q_{kv3}^C, & \cdots \\ \cdots Q_{kv4}^S, & Q_{kv1}^S + Q_{kv3}^S, & Q_{kv2}^S, & Q_{kv1}^C - Q_{kv3}^C, & Q_{kv0}^C - Q_{kv4}^C, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[K_V]_2 = \begin{bmatrix} \cdots & & & & & \\ & K_V & & & & \\ & & K_V & & & \\ & & & \frac{1}{2} K_V & & \\ & & & & K_V & \\ & & & & & K_V \\ & & & & & \cdots \end{bmatrix}$$

$$[H]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots R_{kv0}^C + R_{kv4}^C, & R_{kv1}^C + R_{kv3}^C, \\ \cdots R_{kv1}^C + R_{kv3}^C, & R_{kv0}^C + R_{kv2}^C, \\ \cdots (R_{kv1}^C + \cdots + R_{kv4}^C + \cdots), & (R_{kv1}^C + \cdots + R_{kv4}^C + \cdots), \\ \cdots R_{kv3}^S - R_{kv1}^S, & R_{kv2}^S, \\ \cdots R_{kv4}^S, & R_{kv1}^S + R_{kv3}^S, \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{kv2}^C, & R_{kv3}^S - R_{kv1}^S, & R_{kv4}^S, & \cdots \\ R_{kv1}^C, & R_{kv2}^S, & R_{kv1}^S + R_{kv3}^S, & \cdots \\ 0, & (R_{kv1}^S + \cdots + R_{kv4}^S + \cdots), & (R_{kv1}^S + \cdots + R_{kv4}^S + \cdots), & \cdots \\ R_{kv1}^S, & R_{kv0}^C - R_{kv2}^C, & R_{kv1}^C - R_{kv3}^C, & \cdots \\ R_{kv2}^S, & R_{kv1}^C - R_{kv3}^C, & R_{kv0}^C - R_{kv4}^C, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$