ランダム・パルス列間隔分布の適合度検定システムの一案

平　田　威　彦*

An Idea of System for Testing Goodness of Fit to the Distribution of Inter-point Intervals of Random Pulse Sequence

Takehiko HIRATA

Abstract

In the researches of neuron pulse sequence, various irregular phenomena of pulses and other random pulse sequences, it will be attempted to estimate the probability distribution of intervals between pulses, or to observe the generation of pulse sequence under a certain probability distribution. In such cases, it will be often necessary to test that the distribution of inter-point intervals of random pulse sequence fits or not to the expected distribution.

When the result of test is needed as soon as possible, on-line testing system is required. In this paper, such systems are proposed. They are able to test the goodness of fit to the distribution of the 0th order to the multiple order Markov process of random pulses.

1. まえがき

神経パルス列，諸種の乱調現象，その他のランダム・パルス列の研究においてパルス間隔の確率分布を推定したり，或いは或る確率分布の下でパルス系列が発生したりする場合そのパルス列の間隔分布が期待分布に適合するか否かを知る必要のあることがある．また，なるべく速く結果を出さねばならない為にオンラインで検定する必要のある場合もあり得る．この場合採集するデータ数を必要最小限に止めねばならない．ここにパルス列が定常過程とみなされる場合その要求を満たし得るような検定システムについて提案する．

2. 0次マルコフ・パルス列の場合

間隔分布に関する確率密度函数が既知であるか又は推定されている場合，与えられたパルス系列の間隔分布がそれに適合するか否かを検定するに際してそのパルス列の定常性やマルコフ性を調べることは必ずしも必要ではないが、それらの検定を行うとすれば例えば文献1）或いは2）の手法をオンライン・システム化することも考えられる．

パルス系列において或る1つのパルス間隔の生起確率密度がその前のパルス間隔に全く無関係の場合そのパルス系列は0次マルコフ間隔系列とも呼ばれるが，ここでは簡単の為に0次マルコフ・パルス列と呼ぶことにする．

図1はランダム・パルス列の一部であるとし，パルス間隔 $\overline{ab}$, $\overline{bc}$,… などは夫々0から∞の間の値を確率的にとる．そのパルス間隔 τ を k 個の段階に区分し，$0<\tau\leqq T$ なる段階に属するパルス間隔を τ_1 で表わし（即ち，$0<\tau_1\leqq T$），$T<\tau\leqq 2T$ に属するパルス間隔を τ_2,…, $(k-1)T<\tau\leqq\infty$ に属するものを τ_k で表わすことにする．T 及び k は実際与えられた確率密度函数の形或いはパルス列の間隔データの大ざっぱな分布から適当に決められる．

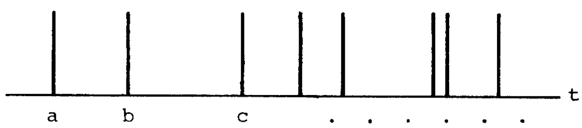

Fig. 1　An example of random pulse sequence.

図2は与えられた確率密度が0次マルコフの場合，観測データが k 個の各段階に入る度数 f_i, $(i=1,2,\dots,k)$ に基づいて χ^2 検定を試みる回路である[3]．

先ず，図2の左端から図1のようなパルス列が入って来たときパルス a で T 型フリップ・フロップ FF の左が ON になったとすると，それによって上のゲート G が開き，一定週期の高周波パルスが通過せしめられてカウンタで計数され，パルス b が来るとカウン

＊ 電気工学科

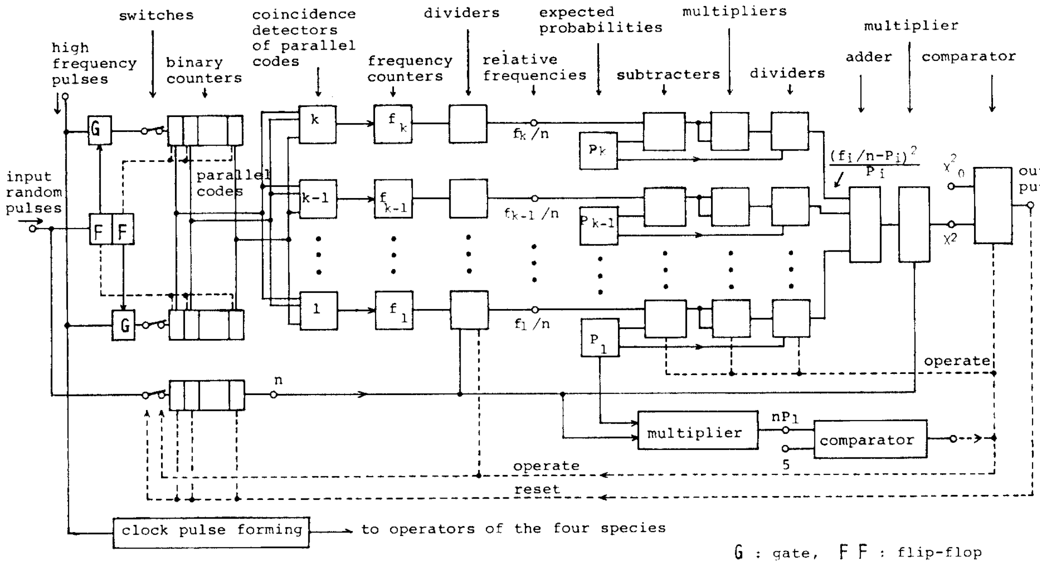

Fig. 2 A system for testing goodness of fit to the 0th order Markov pulse sequence.

タがリセットされると同時に間隔 $\overline{ab}$ が高周波パルスの数に量子化されて並列符号として送り出される．送り出された並列符号パルスは先の k 段階に区分された次の一致回路の中の1つを通って度数カウンタに1つとして計数される．この回路は符号一致回路と論理和回路とから構成される．

次に，今のパルス b によって FF は反転し，右側が ON となるので上の G は閉じて下の G が開き，高周波パルスを通過せしめて，上と同様にパルス C が来ると間隔 $\overline{bc}$ に対応する度数カウンタが1つとして計数される．

一方，入力ランダム・パルスの総数 n はカウンタによって計数されているが，与えられている確率密度函数 $p(\tau)$ に基づいて計算される k 個の各区間に落ちる確率 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ の中の最小のものを P_1 とすると，統計の常用手段により $nP_1>5$ となったとき直ちにカウンタの手前のスイッチを全て開放してパルスの計数を停止し，図2の中央の除算器以後の演算を逐次実行する．

中央の除算器の出力は相対度数 f_i/n であり，これから P_i を引いて二乗し，更に P_i で除算し，それらを加え合せて n 倍すれば

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i} \qquad \cdots\cdots(1)$$

が得られる．この確率変数は今の場合近似的に自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布に従うから，100・α %有意水準で検定したいときは $\chi^2_{k-1,\alpha}\equiv\chi^2_0$ と置いて，$\chi^2>\chi^2_0$ ならばパルス間隔の観測値の分布が期待分布に適合するという仮説は棄却される．

最後の比較器に棄却又は採択に関する出力が出ると同時に n カウンタ及び度数計をリセットし，スイッチを短絡して次のサイクルの動作を開始する．

3. 1次及び高次マルコフ・パルス列の場合

或る1つのパルス間隔の生起確率密度が直ぐ前のパルス間隔のみに依存してそれ以前のパルス間隔に無関係の場合1次マルコフ系列，2つ前までのパルス間隔のみに依存する場合2次マルコフ系列，…などと呼ばれる．

図3は与えられた確率密度が1次マルコフの場合，観測パルスの間隔 τ_i の次に τ_j が生起した推移度数 f_{ij}, $(i, j=1,2,\ldots,k)$ を計数する回路である．

図の左端のカウンタから左は図2の左端の部分と，また，図3の右端の減算器から右は図2の相当する部分と同一構造のものである．左から来た並列符号パルスが0次符号一致回路と記入してある k 個の素子の中の1つと一致するとその素子からパルスが出てその右側にある RS フリップ・フロップ FF がセットされ，その上のゲート G が開く．そこで次に来た並列符号パルスは0次符号一致回路素子の何れかを励起せしめると同時に上記の開いたゲートを通って1次符号一致回路と記入してある k 個の素子の何れかを励起してパルスを出させ，対応する推移度数カウンタが1つとして計数される．また，同時に先の FF をリセットせしめてゲートを閉じる．

他方，計数されている入力ランダム・パルスの総数 n を与えられている推移確率密度函数 $p(\tau|\tau_i)$, $(i=1,2,\ldots,k)$ に基づいて τ_i の各段階に落ちる定常期待

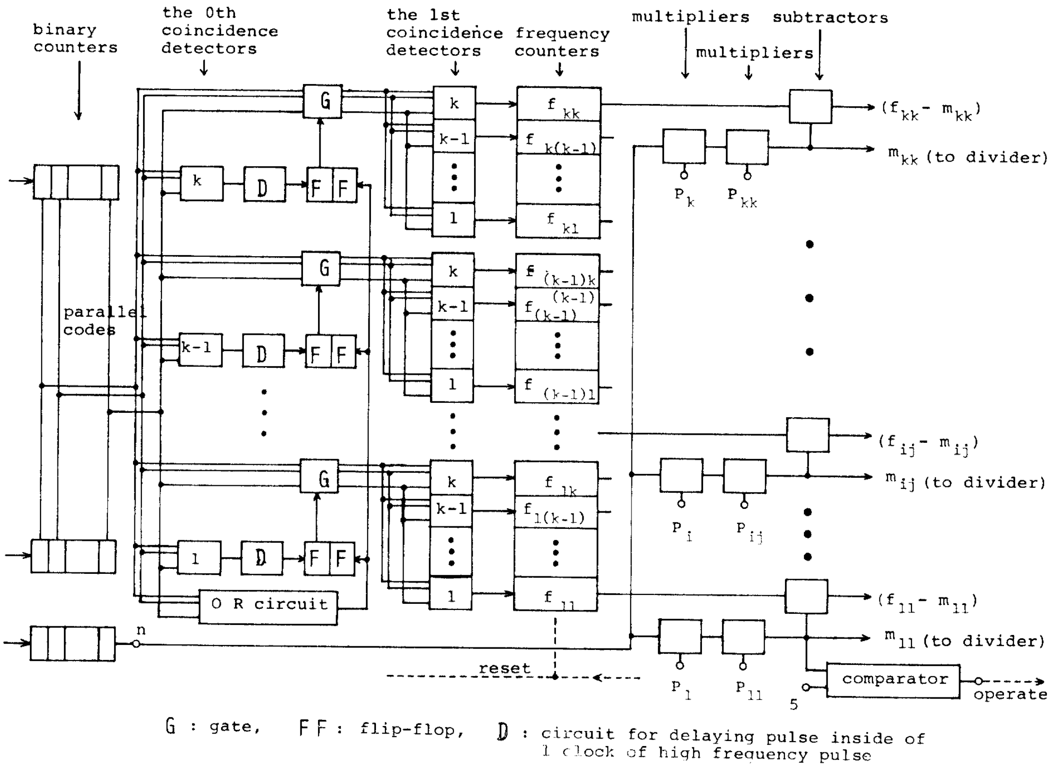

Fig. 3　A system for testing goodness of fit to the 1st order Markov pulse sequence.

度数として先ず配分し，続いてその配分された個数を τ_j, $(j=1,2,\dots,k)$ の各区間に落ちる推移期待度数 m_{ij} として配分しなければならない．それは次のようにして行う[4]．

総数 n を τ_i の各段階に配分するには定常確率が必要となる．$p(\tau|\tau_i)$ からそれを求めるには段階 τ_i の代表値 τ_{ir} を定め，次のステップで区間 τ_j に入る近似的な推移確率として

$$P[\tau_j|\tau_i]=\int_{t_{js}}^{t_{jf}} p(\tau|\tau_{ir})d\tau \qquad \cdots\cdots(2)$$

をとる．但し，t_{js} は τ_j 区間の始まり，t_{jf} はその終りである．

これによって離散化されたマルコフ過程の推移確率行列が求まるから，その推移確率行列の二乗を繰り返すことにより各区間に入る定常確率 $P[\tau_j]$, $(j=1,2,\dots,k)$ が求まる筈である．しかし，ここで区間 τ_i の代表値 τ_{ir}, $(i=1,2,\dots,k)$ 特に $[0\sim T]$ 区間と $[(k-1)T\sim\infty]$ 区間の代表値をどのようにして定めるかが問題である．この目安の値の求め方として次の方法が考えられる．

即ち，各 τ_i の区間を更に小さな区間に分割して，先ずその各小区間に適当な仮の代表値を割り当てる．そして式（2）によって推移確率行列を求め，それより各小区間の定常確率を求める．次に，かくして求まったこれら各小区間の定常確率に基づいて先に各段階の小区間に仮に割り当てた代表値に対し各段階毎に重み平均をとり，それを以って各段階の代表値 τ_{ir} とする．かくしてそれらに基づき定常確率 $P[\tau_i]$ 及び推移確率 $P[\tau_j|\tau_i]$, $(i,j=1,2,\dots,k)$ を得る．

すると τ_i 段階の τ_j 区間に入る期待度数 m_{ij} は

$$m_{ij}=n\cdot P[\tau_i]\cdot P[\tau_j|\tau_i] \qquad \cdots\cdots(3)$$

として求められる．

この期待度数の最小のものを m_{11} とすると，$m_{11}>5$ となったとき直ちに入力パルスの計数を停止し，実測度数 f_{ij} と期待度数 m_{ij} との間に次式の計算を行う．

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(f_{ij}-m_{ij})^2/m_{ij} \qquad \cdots\cdots(4)$$

これは近似的に自由度 $k(k-1)$ の χ^2 分布に従うので，有意水準 $100\cdot\alpha\%$ の値 $\chi^2_{k(k-1),\alpha}\equiv\chi^2_0$ と比較し，$\chi^2>\chi^2_0$ ならば実測パルス間隔分布が期待分布に適合するという仮説を棄却する．

以上は1次マルコフ系列の場合であるが，2次以上の高次マルコフ系列の場合も図3の符号一致回路の次数を増して行き，計算式も同様に拡張することによって解決される．

参 考 文 献

1) 森村英典, 高橋幸雄：マルコフ解析, 205, 日科技連 (1979)

2) H. Nakahama, et al.: Biol. Cybernetics, **25**, 209 (1977)

3) 平田威彦：昭52年電子通信学会情報部門全国大会講演論文集, 9 (1977)

4) 平田威彦：電子通信学会論文誌 (D), **63**-D, 169 (1980)

(昭和56年4月15日 受理)