

# 衝撃的入力を受ける構造中の波動伝播数値解析法の検討

中 川 浩 二\*

## A Consideration on the Direct Time Integration Method in the Stress Pulse Propagation Analysis

Koji NAKAGAWA

### Abstract

One of the purposes of this study is to compare several direct time integration methods in wave propagation problems in solids. Amplitude decay and period elongation are used as the basic parameters in order to compare the integration methods. The specific methods are Central Difference Method and the Newmark's generalized acceleration method.

Another purpose is to get some information about the direct time integration method in the step pulse propagation analysis which occurs in blasting and impact of solids. The Newmark method with varying  $\gamma$ -coefficient shows good results in one and two dimensional step pulse propagation analysis.

### 1. はじめに

構造物の動的応答の解析は、ダム、原子力発電施設、海洋構造物、橋梁構造物などの地震、風、波等の外力に対する安全性の検討のためからも実際面で広く実施されてきている。

しかし、構造物への入力が衝撃的な過渡入力である場合については固体の衝突や、発破、爆発などによる応力波の発生等多くの現象がみられるにもかかわらず必ずしも一般的ではない。

構造物を有限要素化して考え、これが step 荷重を受ける場合の波動伝播の数値解析法について既往の研究をみると Costantino<sup>1)</sup> が棒構造および球形空洞を有する無限体中での波動伝播を検討し、棒構造において大きな乱れ（オーバーシュート）の生じることを述べている。また桜井ら<sup>2)</sup> は step 荷重を受ける棒中の波動伝播を数種の数値積分法で解析し、比較的 Runge-Kutta-Gill 法が良いと結論しているが、結果には大きなオーバーシュートがみられる。筆者ら<sup>3)</sup> は適合質量法を用いることにより、オーバーシュートを比較的小さくできることを示している。Hughes ら<sup>4)</sup> は数値積分法としては Newmark の  $\beta$  法を用い、時刻みと

波動伝播速度との積を空間刻み幅に等しくとることにより、固体の衝突の際の接触一分離の境界条件について述べている。

衝撃的荷重を受ける構造あるいは構造要素中の波動伝播問題には次のような特徴がある。

- 1) 衝撃的エネルギーが系に入力されてからその大部分が系外へ去るまでの時間間隔は短い。
- 2) 通常数値計算法による場合、step 入力によるオーバーシュートの誤差は大きく、計算法によってはその step 荷重の大きさの30%にもおよぶ。

筆者は固体の衝突あるいは爆破衝撃により発生した応力波による構造物等の破壊に関する検討を行なおうとしている。等断面、同材質の棒の衝突により発生する応力は step 状であり、またダイナマイト等の爆発による衝撃波の立ち上りは数  $\mu$  sec であり、岩盤中を伝播する時間とくらべてこれも step 状の扱いが必要となるであろう。

本研究では以上のことを考慮し、step 荷重を受ける構造物あるいは構造要素中の波動伝播を解析するための手法について検討する。

### 2. 波動伝播解析のための数値解析法

構造物の動的応答解析方法の一つとして構造物に実

\* 土木工学科

際に作用する、あるいは作用すると思われる入力に対して運動方程式を解いていく方法があり、この方法については古くから多くの手法が提案されてきている。

これらを大別すると、

1) 解析的方法

2) 数値積分法

に分けることができよう。

1)の解析的方法については Duhamel 積分法<sup>5)</sup> あるいは Matrix Exponential を用いる方法<sup>6)</sup> があるが、計算の複雑さあるいは大きな自由度をもつ系の解析に対する困難さなどから対象としての問題に限られるようである。2)の方法としても多くの方法が提案されてきている。たとえば中央差分法は加速度を2階の中央差分で表わす方法であり、安定性を得るための時間刻みに制約はあるが積分の各ステップでの計算量が非常に少なく、また空間の離散化に集中質量法を用いる場合に特に有効である。Runge-Kutta 法は打ち切り誤差が少ないこともあり、かなりの精度を与えるものとして構造解析のみならず、一般的な微分方程式の解法として広く用いられているようであるが、各ステップでの計算量が多くかつ安定性を確保するための時間ステップを比較的多くとらなければならないということがいわれている<sup>6)</sup>。

特に土木構造物の解析を対象として提案され検討されてきた方法としては Newmark の方法と Wilson の方法を挙げることができよう。Newmark の方法<sup>7)</sup> は  $\beta, \gamma$  という二つのパラメータを用いることにより、速度、変位がそのステップの前後での加速度の影響を受ける割合を定める方法であり、パラメータの選択により、別な形で提案されてきた方法と一致するという幅広さを有し、広く用いられている。また Wilson の方法<sup>8)</sup> は線形加速度法を修正した無条件に安定な方法である。また Hilber ら<sup>9)</sup> による Collocation 法はこの Newmark の方法と Wilson の方法を合わせた形のものであると考えられる。

Hilber ら<sup>9)</sup> によると step-by-step の計算法が実用的であるためには次の5つの条件を満足すべきであるとしている。すなわち、

1. 線形問題へ適用したとき無条件に安定であること。
2. それぞれのステップでとかれるべき陰な方程式は1組で良いこと。
3. 2次のオーダーの精度を有すること。
4. 高次モードについて散逸を操作できること。
5. 自己出発形式であること。

である。

ここで挙げられた5つの条件は対象として考えられ

ている入力が地震等にみられるように構造物の振動を主として考えるためのものであると思われる。振動と波動はもともと同種の現象であり、振動を波動における standing wave の状態とみれば振動を波動から説明できる。しかし振動は運動エネルギーがその系内で閉じ込められる現象であるに反して、波動は運動エネルギーが一過性のものとして扱いうる。いま1の条件を考えると波動伝播問題には特性曲線と与えられる依存領域が存在し、空間の離散化間隔にくらべて時間間隔を無制限にとることは意味をもたず、したがって解析のスキームも必ずしも無条件安定であることを必要としないであろう。3の2次の精度については精度が高いということは望ましいことには違いないが、前述のように step 状入力に対する主な問題は shock をどのように合わせるかということであることを考えれば必ずしもこの条件にこだわる必要はないであろう。すなわち衝撃的入力を受ける構造物の解析のためには通常の計算方法では非常に大きく現われるオーバーシュートを取り除くための工夫が重要になると考えられ、そのため4の高次モードの減衰を利用した数値積分スキームの散逸性を利用する方法が考えられる。この考え方は流体力学における shock-fitting としての仮想粘性の導入や、Lax-Wendroff 法の利用などに共通するものである<sup>10)</sup>。

数値積分スキームにおける散逸性は振動問題の解析を主とする一般の動的問題の解析では減衰の故に好ましくないとされるようである。しかし過渡的な波動伝播問題においては衝撃的エネルギーが系に入力されてからその大部分が系を通りすぎるまでの時間が短かく、減衰による誤差はオーバーシュートによるそれとくらべて小さいとすることができよう。

このことを考慮し、多数提案されている数値積分法の中から最も経済的と思われる中央差分法およびモードによる減衰を操作可能な Newmark の方法について検討を行なう。

Wilson の方法あるいは Newmark の方法の安定性ならびに精度に関しては Bathe ら<sup>11)</sup> により1自由度系の自由振動を例として検討されている。彼等はこれらのスキームで数値積分した場合の時刻  $t$  と  $t + \Delta t$  における変位、速度、加速度をそれぞれ  $x_t, \dot{x}_t, \ddot{x}_t$  および  $x_{t+\Delta t}, \dot{x}_{t+\Delta t}, \ddot{x}_{t+\Delta t}$  とし

$$\begin{Bmatrix} x_{t+\Delta t} \\ \Delta t \cdot \dot{x}_{t+\Delta t} \\ \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} x_t \\ \Delta t \cdot \dot{x}_t \\ \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_t \end{Bmatrix} + \mathbf{L}r$$

とし、マトリックス  $\mathbf{A}$  の spectral radius  $\rho(\mathbf{A})$  より

安定性等を論じている。ここで  $L$  は荷重オペレーターである。系の減衰の状況は定数  $\beta, \gamma$  あるいは  $\theta$  に対する  $\rho$  の値の変化より明らかとなる。これによると Wilson の方法による  $\theta$  の選択にともなう  $\rho$  の曲線の変化は若干複雑であり、この散逸性をうまく利用するという点からは必ずしも明快な方法とはいえないようである。しかるに Newmark の方法については  $\gamma$  の選択により  $\rho$  に対応する減衰係数の変化が明快である。そこで本研究では Goudreau ら<sup>12)</sup> による研究をさらに発展させ、Newmark の方法の係数を広範囲に変化させることにより shock-fitting を試みる。

### 3. 数値積分法のスキームについて

振動問題を対象とした数値積分法スキームの検討はよくみられるところであるが、ここでは波動伝播問題の数値解析に特に有用であると思われる中央差分法と Newmark の方法について 1 次元波動の伝播を対象に検討する。

1 次元の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

で与えられる。これを時間、空間ともに差分表示すると

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

となる。波動方程式の初期条件を  $U(x, 0) = e^{ibx}$  とする。そのとき波動方程式の一般解を

$$U(x, t) = e^{iax} e^{ibx}$$

として代入すると

$$(ia)^2 = c^2 (ib)^2 \quad \therefore \alpha = \pm cb$$

であり、これより一般的に

$$U(x, t) = Ae^{ib(x-ct)} + Be^{ib(x+ct)}$$

と表わせる。これにならって差分方程式の初期条件を

$$u_j^0 = Ae^{ibj\Delta x} = Ae^{ij\xi} \quad (b\Delta x = \xi)$$

とすると一般解は

$$u_j^n = Z^n e^{ij\xi}$$

の形となる。これを先の差分方程式に代入して

$$Z - 2 + Z^{-1} = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2)$$

$$= 2\lambda^2 (\cos \xi - 1) \quad (\lambda = c\Delta t / \Delta x)$$

となり

$$Z^2 - 2\{1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1)\} Z + 1 = 0$$

よりこの特性方程式は根は

$$Z = \{1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1)\} \pm \sqrt{\{1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1)\}^2 - 1}$$

となる。  $|\lambda| \leq 1$  として  $-2 \leq \cos \xi - 1 \leq 0$  より

$$|1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1)| \leq 1$$

となるので

$$\begin{aligned} Z &= \{1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1)\} \pm i\sqrt{1 - \{1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1)\}^2} \\ &= \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha} \end{aligned}$$

とおくことができる。ただしここで

$$1 + \lambda^2 (\cos \xi - 1) = \cos \alpha$$

としている。

上より明らかに  $|Z| = 1$  であり、これは  $\lambda$  あるいは  $\xi$  の値にかかわらず、このことはこのスキームで計算したとき  $\lambda, \xi$  の値にかかわらず ( $|\lambda| \leq 1$ ) 減衰が生じないことを示し、したがって散逸のないことを示している。これより中央差分スキームの一般解は

$$\begin{aligned} u_j^n &= (e^{\pm i\alpha})^n e^{ibx} \\ &= e^{ib(j\Delta x \pm \frac{n\alpha}{b})} \end{aligned}$$

となり位相速度が  $\alpha/b\Delta t$  となることがわかる。

Newmark の方法のスキームは次のように表わされる

$$\dot{u}^{n+1} = \dot{u}^n + (1-\gamma)\ddot{u}^n \Delta t + \gamma \ddot{u}^{n+1} \Delta t$$

$$u^{n+1} = u^n + \dot{u}^n \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{u}^n \Delta t^2 + \beta \ddot{u}^{n+1} \Delta t^2$$

上式に従って  $\dot{u}^n, u^n$  を作り、 $u^{n+1} - u^n$  の表示より速度項を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1} &= \Delta t^2 \left\{ \beta \ddot{u}^{n+1} + \left(\gamma + \frac{1}{2} - 2\beta\right) \ddot{u}^n \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta\right) \ddot{u}^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

ここで 1 次元の波動方程式  $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$  を考え上式の  $\ddot{u}$  を  $c^2 u''$  で表わすと右辺は

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t^2 \left\{ \beta u''^{n+1} + \left(\gamma + \frac{1}{2} - 2\beta\right) u''^n \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta\right) u''^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで空間の離散化を等間隔の差分、あるいは等しい大きさの1次元要素による有限要素法により、集中質量法を用いると  $u'' = \partial^2 u / \partial x^2$  は中央差分の形で表わされることになり上式はさらに  $c^2 \Delta t^2 / \Delta x^2 = \lambda^2$  として

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \left\{ \beta (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \right. \\ & \quad + \left( \gamma + \frac{1}{2} - 2\beta \right) (u_{j+1}^n 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ & \quad \left. + \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \right\} \end{aligned}$$

となる。この式の一般解を

$$u_j^n = Z^n e^{ibj\Delta x} = Z^n e^{i\xi j}$$

と表わすと

$$u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n = 2u_j^n (\cos \xi - 1)$$

より  $(\cos \xi - 1) = \alpha$  とおき特性方程式を作ると

$$\begin{aligned} Z - 2 + Z^{-1} &= 2\alpha\lambda^2 \left\{ \beta Z + \left( \gamma + \frac{1}{2} - 2\beta \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) Z^{-1} \right\} \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} (1 - 2\beta\alpha\lambda^2) Z^2 - 2 \left\{ 1 + \left( \gamma + \frac{1}{2} - 2\beta \right) \alpha\lambda^2 \right\} Z \\ + \{ 1 - (1 - 2\gamma + 2\beta) \alpha\lambda^2 \} = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$A = 1 - 2\beta\alpha\lambda^2$$

$$B = 1 + \left( \gamma + \frac{1}{2} - 2\beta \right) \alpha\lambda^2$$

$$C = 1 - (1 - 2\gamma + 2\beta) \alpha\lambda^2$$

とおくと

$$Z = \{ B \pm \sqrt{B^2 - AC} \} / A$$

である。ここで  $-2 \leq \alpha \leq 0$  を考慮し、また  $B^2 - AC$  の値は  $\lambda, \gamma, \beta$  の値により必ずしも符号一定ではないが  $\lambda = 0.5$  に対しては  $0.5 \leq \gamma \leq 1.5$  の範囲で負になることを考慮し

$$\begin{aligned} Z &= \{ B \pm i\sqrt{AC - B^2} \} / A \\ &= \sqrt{\frac{C}{A}} \left\{ \frac{B}{\sqrt{AC}} \pm i \frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{AC}} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\left| \frac{B}{\sqrt{AC}} \pm i \frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{AC}} \right| = 1$$

であり、絶対値の内部を  $e^{i\theta}$  とおくと

$$Z = \sqrt{\frac{C}{A}} e^{i\theta}$$

となり、したがって

$$u_j^n = \left( \sqrt{\frac{C}{A}} \right)^n e^{ib(j\Delta x + \frac{n\theta}{b})}$$

となる。これは初期条件が  $u_j^0 = e^{ibj\Delta x}$  で与えられる場合のこのスキームの解を与えており、これからこのスキームの減衰特性と位相速度が与えられることになる。散逸特性を検討すると

$$|Z|^2 = C/A$$

$$= \frac{1 - (1 - 2\gamma + 2\beta) \alpha\lambda^2}{1 - 2\beta\alpha\lambda^2} = \frac{1 + 4\lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \sin^2 \frac{\xi}{2}}{1 + 4\beta\alpha\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}}$$

となり  $\gamma = 0.5$  のときは  $|Z| = 1$  となってよく知られるように減衰は生じない。しかし  $\gamma > 1/2$  に対しては  $|Z|$  の値は1より小さくなり、かつ  $\gamma, \beta, \lambda$  の値がそれぞれ同じであっても伝播する波の  $\xi$  の値に対して異なる。すなわち減衰の程度は  $\xi$  の値が大きいほど大きくなることになる (ここで  $\xi = b\Delta x = 2\pi/l \cdot \Delta x$ ;  $l$  は伝播する波の波長,  $b$  は波数)。その結果選択的減衰が生じ、散逸現象が生じることが明らかである。

またこのスキームによる位相速度は

$$c = \frac{\theta}{b\Delta t} = \frac{1}{b\Delta t} \cos^{-1} \frac{B}{\sqrt{AC}}$$

で与えられることになる。

#### 4. 数値計算と検討

##### 4-1 減衰と位相速度の変化

1次元の波動伝播問題を考える。空間の離散化は等分割の有限要素法によるとし、集中質量法を用いる。時間に関する積分を Newmark の方法で行なう。先に示したように中央差分法で時間に関する積分を行なうとき、 $\lambda, b$  の値にかかわらず減衰は生じない。 ( $\lambda = c\Delta t / \Delta x$ ,  $c$  は波の伝播速度,  $\Delta t, \Delta x$  はそれぞれ時間, 空間の刻み間隔,  $b = 2\pi/l$ ,  $b$  は波数,  $l$  は波長)。しかるに Newmark の方法では  $\lambda, b$  および Newmark の方法の定数  $\beta$  および  $\gamma$  の値によって減衰が異なる。この減衰の特性を示したものが Fig. 1 である。ここで  $\lambda$  として 0.3, 0.5, 0.7 をとり,  $\gamma$  を 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5 としたそれぞれについて伝播する正弦

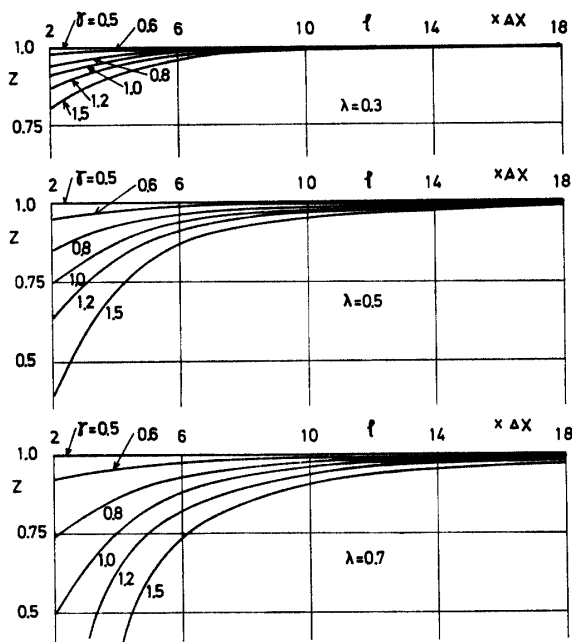


Fig. 1 Roots of characteristic equation of Newmark's integration scheme.

波の波長 ( $l=2\pi/b$ ) に対する特性方程式の根の絶対値  $|Z|$  を示している。前述のように  $|Z|$  の値は  $\beta$  の値によっても変化するが  $\beta$  と  $\gamma$  のそれぞれの減衰特性に与える影響は  $\gamma$  のそれが顕著であるため、本研究では  $\beta$  の値を  $1/6$  (線形加速度法) とし一定に保ち、 $\lambda, \gamma$  についてのみ検討する。

図から  $\gamma=0.5$  の場合、 $\lambda, b$  の値にかかわらずつねに  $|Z|=1$  であり Newmark の方法が  $\gamma=0.5$  の場合に減衰のないスキームを与えることを示している。逐次計算における減衰はその計算ステップ毎に生じることとなり、 $n$  ステップ目では振幅は最初の振幅の  $|Z|^n$  倍の値となることに注意しなければならない。たとえば  $\lambda=0.5, \gamma=0.6$  についてみると波長  $104x$  の波では  $|Z|=0.99$  でありほとんど減衰はないかのようなのであるが、30ステップの計算によりその振幅は元の振幅の約 86% となる。さらに波長  $44x$  の波では  $|Z|=0.977$  となり、30ステップの計算を行った後では振幅は約 50% に低下する。

またこのことはこの手法により  $\lambda, \gamma$  の値は同じでも伝播する波の波長により減衰が大きく変化し、波長の差による選択的減衰すなわち散逸効果が生じることを示している。

Fig. 2 に  $\lambda, \gamma, b$  の値に対する位相速度の変化を与えている。これによると波長の短い波についてかなりの位相速度の低下がみられ、Newmark の方法による位相の遅れを示している。ここで注意したいことは位相速度は  $\gamma=0.5$  において小さく、 $\lambda=0.3, 0.5$  では  $\gamma$  が

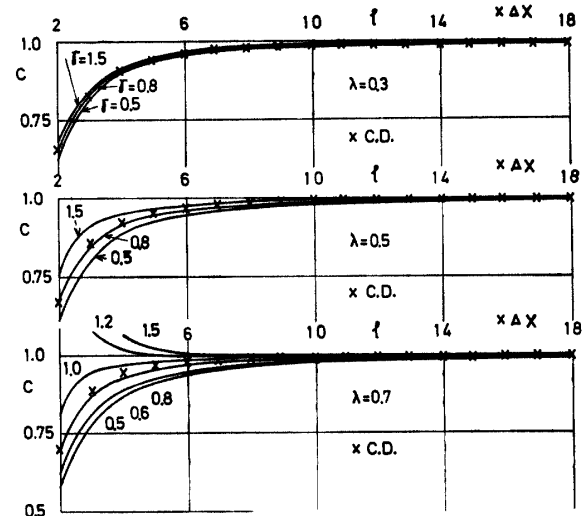


Fig. 2 Phase velocity in Newmark's integration scheme and central difference method.

大きくなるほど連続体における位相速度に近くなるということである。中央差分法によっても短波長の波に対して位相速度は低下する。そしてその位相速度は Newmark の方法において  $\gamma=0.8$  となった場合の位相速度とほぼ一致する。 $\gamma$  の値をさらに大きくすると中央差分法によるよりも位相速度は連続体のそれに近づく。このことから一般に Newmark の方法において  $\gamma$  の値を大きくとって計算すると  $\gamma=0.5$  とするよりも位相速度に関するかぎり正確に近い結果が得られるといえる。

#### 4-2 数値積分スキームによる減衰と空間の離散化による減衰

有限要素法はそれが時間であれ空間であれ、有限要素化された部分を平均化して扱おう方法であるとみることができ、そのためたとえば空間的に不連続性の高い量が存在する場合には平均化によるみかけの減衰が生じる。このことはたとえば応力集中の解析に有限要素法を用いた場合に明らかである。すなわち非常に短いパルス状の応力波が伝播する場合には、たとえ逐次積分のスキームに減衰がなくともエネルギーの分散が生じる場合には波が伝播する間に平均化され、減衰したような状態となる。現時点ではこの点についての解決法は要素分割を細かくする以外に得ておらず、以後に述べる結果はこの影響をも含んだものとなる。

まず長い棒の自由振動の  $\lambda, \gamma$  による減衰状況を考える。長い棒の自由振動は無限に続く前進および後退する波による定常波状態とみることができ、したがってある一点の応力について考えれば波の伝播にともなう減衰を知ることができる。Fig. 3 は棒中の一点の

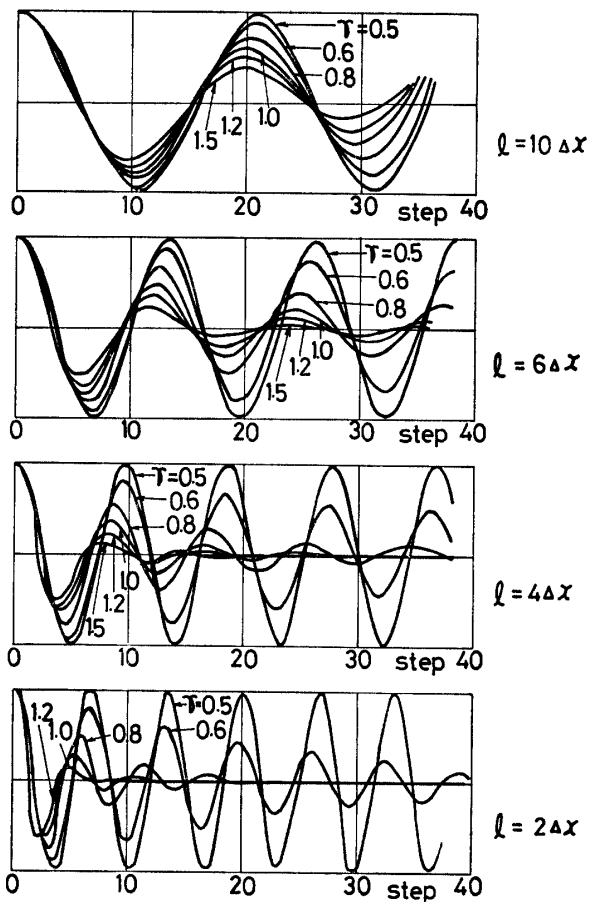


Fig. 3 Damping of sinusoidal vibration in long bar.

応力の時間経過を图示したものであるが、この場合減衰は空間の離散化と積分スキームによる効果が重なり合って生じるものと予想される。しかし減衰の特性は先の Fig. 1 に示された値のステップ数乗で与えられ

る値とほぼ等しくなっている。この場合系は振動状態にあるとみると系のエネルギーは結果的には外部へ伝播しないことと同等になるため、空間の離散化によって平均化によるみかけの減衰は生じず、減衰は先に示した  $|Z|$  の値でほぼ与えられることになると思われる。また  $\gamma$  の値の増加により、短波長の波の減衰の大きくなる状況が明らかに示されている。

次に正弦波一波長分が離散化された棒中を伝播する場合の伝播にともなう波形の変化を Fig. 4 に示す。左端に示したものは理想的な状態において伝播すべき波形（入力波形）である。図からみられるように伝播する波の波長がある程度長い ( $l=10\Delta x$ , 周期にして  $20\Delta t$ ) 場合、 $\gamma=0.5$  であれば伝播にともない若干の波形変化はあるがほとんどみかけの減衰は生じない。そして  $\gamma$  の増加とともに伝播する波形はなだらかとなり、かつ減衰する。しかし  $l=6\Delta x, 4\Delta x$  程度の波ではスキームの非減衰を与える  $\gamma=0.5$  に対しても大きな波形変化が生じることがわかる。この場合波の後尾部分に大きな乱れを生じ、波長の短い波の伝播解析の困難さを示している。 $l=2\Delta x$  となると10ステップの伝播によってすでに入力波形を推測することが困難となり、60ステップの伝播ではたとえ  $\gamma=0.5$  に対してもその振幅は非常に小さくなる。ここでこの減衰特性の  $\gamma$  の値による変化をみると、 $\gamma$  の増加はこの減衰特性を顕著にしており、特に波長の短い波に対してその効果は明らかである。

以上のように step 応力など非常に高周波の成分から低周波の成分までを含んだパルスが離散化された系を伝播する場合には時間に関する積分スキームに減衰

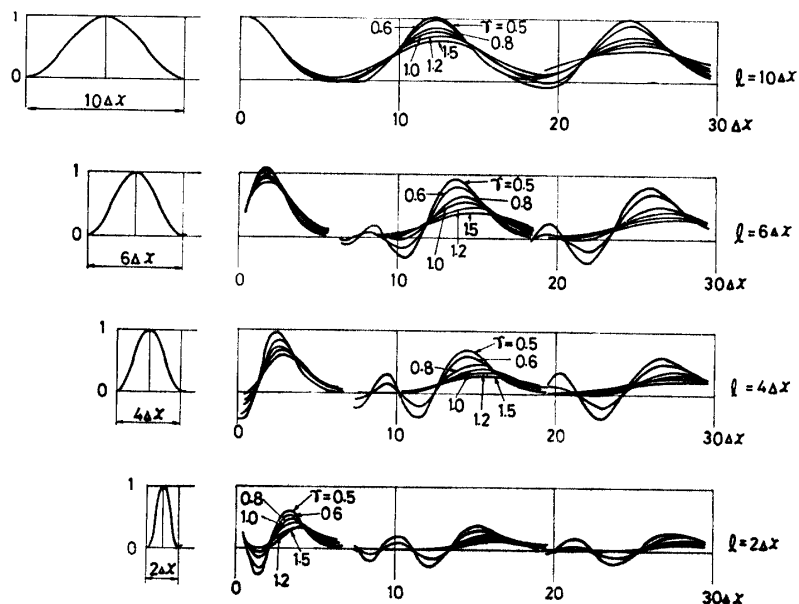


Fig. 4 Damping of a pulse in a bar.

がなくとも散逸が生じることがわかる。また実際の数値計算においては数値計算スキームの選び方によってパルス成分の波長による選択的減衰の程度を変化させることが可能となり、これによりオーバーシュートを小さくした、元の波形に比較的近い波の伝播を実現する方法が考えられる。

4-3 棒中の step 荷重の伝播

一般的な波動伝播解析のための基礎的資料を得るため step 荷重を受ける棒の波動伝播解析を行った。時間に関する積分は Newmark の方法において  $\gamma$  の値を変化させて行っている。

棒端に大きさ 1 の step 荷重が作用する場合の第 1 番目の要素内応力の時間経過を  $\gamma$  の種々の値に対して示したものが Fig. 5 である。棒端に step 荷重が作用するとき最初の要素内の応力は通常大きく振動する。これが順次棒中へ伝播していくことになるため、この応力変化を問題にすることには意味がある。図より  $\gamma$

$= 0.5$  に対しては若干の減衰はあるが 40 ステップ近くになっても大きな振動がみられる。これに対して  $\gamma = 0.8$  では 20 ステップでほぼ振動はなくなり、 $\gamma = 1.5$  では 2 ステップ目からほぼ初等理論で与えられる応力に達しているのがみられる。このことより少くとも最初の要素の応力を step 荷重に追従させるためには大きな  $\gamma$  を用いることが有効であることがわかる。

Fig. 6 に 10, 20, 40, 70 各ステップにおける棒中の応力波形を示す。減衰のない ( $\gamma = 0.5$ ) スキームでは応力の振動はなくなることなく続く。さらに波頭直後のオーバーシュートの大きさは伝播とともにほとんど減衰しない。波頭の立ち上がり勾配は伝播とともにしだいにゆるやかになる。 $\gamma$  が増加すると波頭直後のオーバーシュートの大きさは伝播とともに小さくなりまたそれに続く応力の振動も小さくなる。そして  $\gamma = 0.8$  以上となるとオーバーシュートは 20 ステップをすぎればほとんどみられなくなる。しかし  $\gamma$  の値が増加すると波頭部分の応力勾配は波の進行とともにゆるやかになり、 $\gamma = 1.5$  に対する 40, 70 ステップの図をみれば明白である。

この波頭部分の応力勾配がなだらかとなることはある程度やむを得ないこととして、これをできるだけ抑え、かつオーバーシュート、振動を小さくするために各節点において  $\gamma$  の値を変化させる。すなわちその例として棒端で  $\gamma = 1.5$  とし、順に 1.4, 1.3, ... と低下させ、第 8 番目以降の節点で  $\gamma = 0.8$  として計算したものが図中に示してある。この方法ではステップ数が大きくなると波頭勾配のゆるやかとなる現象は生じるが、 $\gamma$  の値を全体として大きくとるものよりゆるやかさの程度は小さく、有効な方法であると思われる。なお、 $\gamma = \text{const.}$  とする部分（棒の入力端からある程

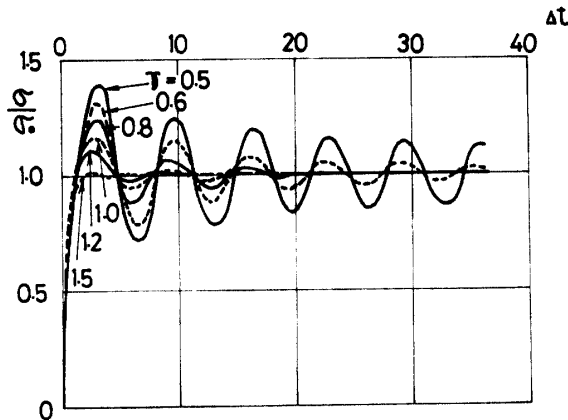


Fig. 5 Stress in the first element with different  $\gamma$  value.

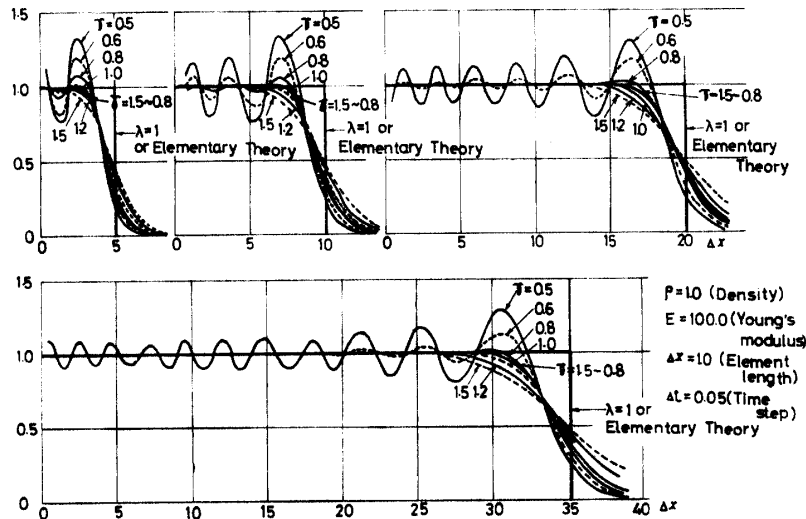


Fig. 6 Stress distribution in a bar at each time step.

度以上離れた部分)において  $r=0.6$  とおくとその部分では振動が現われ、 $r=0.6$  で振動なく伝播するにはまだ波頭勾配が急すぎることを示している。

また弾性波動の解析において  $\lambda(=c\Delta t/\Delta x)=1$  とおく方法は多くの制約があり、必ずしも一般的な方法とはいえないが、要素分割を等しくした1次元の波動伝播解析では初等理論による解と一致することから併せて図に示している。

4-4 2次元問題における波動伝播

2次元波動伝播問題の解析例の1として Fig. 7 に示す有限幅の帯の一端に等分布 step 荷重を与えた場合

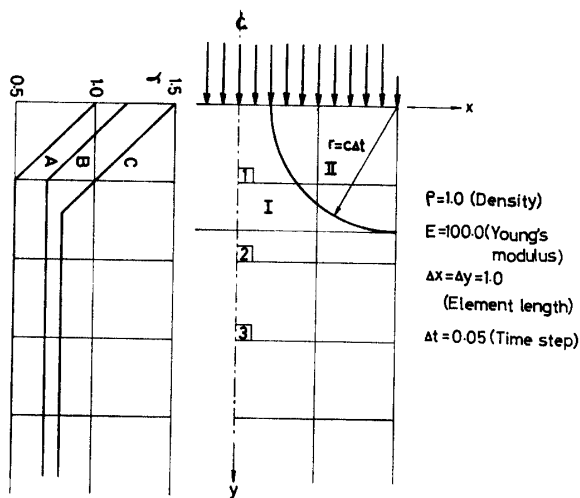


Fig. 7 Rectangular two-dimensional long block impacted at one end.

を解析した。要素分割は正方形とし、平面ひずみ問題として扱っている。この問題の解は図中の領域 I と II とに分けられ、領域 I では縦波のみの影響を受け、領域 II では自由端からの反射波の影響をも受けることになる。

図中 1, 2, 3 の要素の  $\sigma_y$  を図示したものが Fig. 8 である。この問題は1次元問題に近く、そのため先に述べた  $\lambda=1$  とおく方法が良い解を与えるであろうことが予想される。そこでこの方法による結果を併せて示している。いまこの方法がほぼ正解を与えるとして他の方法の結果と比較する。

位置による  $r$  の値の変化は 載荷端より順に 1.5~0.8, 1.2~0.7, 1.0~0.5 の3通りと全体を通じて  $r=0.5$  としたものを示している。全体を通じて  $r=0.5$  とした場合および中央差分法による解は予想されるように大きなオーバーシュート、振動を示し、解として用いることは一般に困難であろう。また  $r$  の値を変化させる方法では載荷端から遠ざかるにしたがって応力

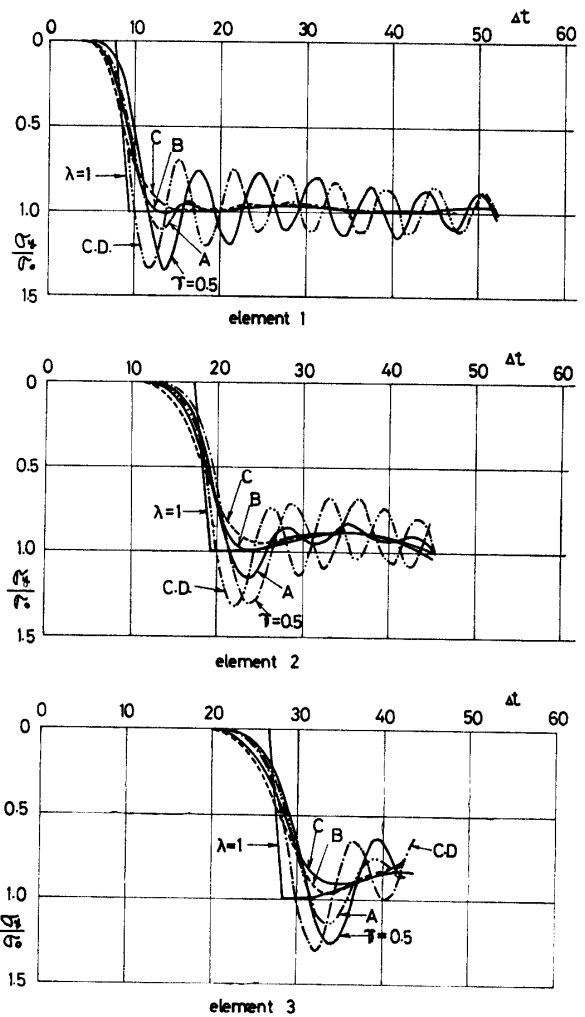


Fig. 8 Change of  $\sigma_y$  value in each element.

の立ち上りがなだらかとなり、正解から外れる傾向にあると思われるが、 $r$  の値を 1.2~0.7 とした場合の解が全体を通じて比較的合理的と思われるようである。

Newmark の方法による解は予想されるとおり  $r=0.5$  の場合中央差分による方法とくらべてかなりの位相速度の低下を示す。また  $r$  の値を大きくした場合にも位相速度の低下を示しているかのようなのであるがこれは  $r$  の増大により短波長成分の減衰が大きくなるため結果として速度が低下したように見える部分が多いと考えられる。

2次元波動伝播問題の解析例の2として半無限体における波動伝播を考え、Fig. 9 のように半無限体表面に有限幅の step 荷重が作用する場合を解析する。この場合先の問題とは異なり、深さの増加とともに波は拡がり、波頭応力は小さくなる。Fig. 10 には前と同じ  $r$  の値および  $\lambda=1$  とした場合の結果を示している。この問題を1次元的に近似することは困難であり、 $\lambda=1$  とする方法にもかなりの乱れがみられ、これを正



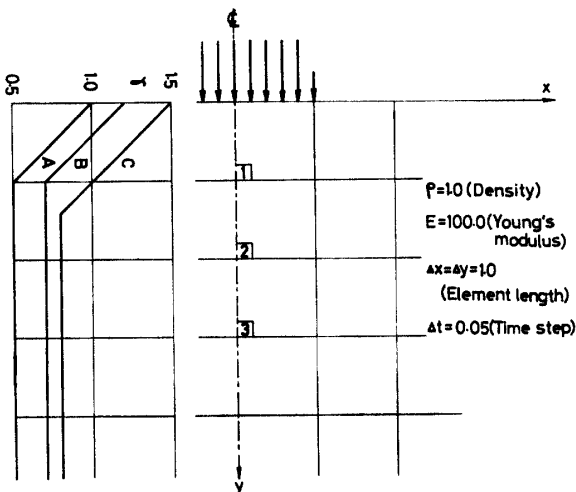


Fig. 9 Partly impacted two-dimensional half space.

ここで用いてきた  $\gamma$  の値を変化させる方法は波動中の短周期成分を選択減衰させて step 状のパルスの伝播をうまく表わそうとする方法である。そのため波動の主成分が鋭いスパイク状のパルスとなる場合には 4-2 に示したように主成分そのものを減衰させてしまうことになる。今の問題のように深さの増加とともに波動がしだいに鋭いパルス状となることが予想される場合には計算中にパルスに鋭さがなくなる傾向が助長され、ピーク値における誤差の増加が考えられる。しかしこのことは離散化して数値解析を行なう場合にはある程度やむを得ないことであろう。

5. おわりに

本研究は step 荷重を受ける構造中の波動伝播解析を通常の時間に関する数値積分スキームを用いて行った場合に現われるオーバーシュートや振動を小さくし、比較的初等理論で与えられる解に近い結果を得るための方法として Newmark の方法において定数  $\gamma$  を変化させる方法を提案した。

検討の結果以下のことを結論として得た。

1. 通常の時間に関する数値積分スキームを用いて波動伝播解析を行うと波頭直後に大きなオーバーシュートが生じ、かつ振動が継続する。また初等理論の波速よりも速く伝播する部分が現われ、伝播にともないだらかな立ち上りを示すようになる。
2. Newmark の方法において  $\gamma$  の値を適当に変化させる方法は比較的汎用性があると考えられる。この方法によると  $\gamma$  の選び方によりオーバーシュートはほぼ完全になくすることができる。しかし  $\gamma=0.5$  の場合とくらべて波頭勾配が若干ゆるやかになる。
3. Newmark の方法で  $\gamma=0.5$  とすると位相速度の遅れを生じるが、 $\gamma$  の値を大きくすると位相速度は初等理論のそれに近づく。そのため短波長成分の減衰にもかかわらず  $\gamma=0.8$  ではみかけの位相速度に著しい低下はみられない。
4. 鋭いパルス状の波動伝播を空間に離散化して解析するには伝播にともなうパルスの鈍化という問題があるが、 $\gamma$  の値を大きくする方法はパルスをさらに鈍化させる方向に作用し、誤差を大きくする可能性がある。

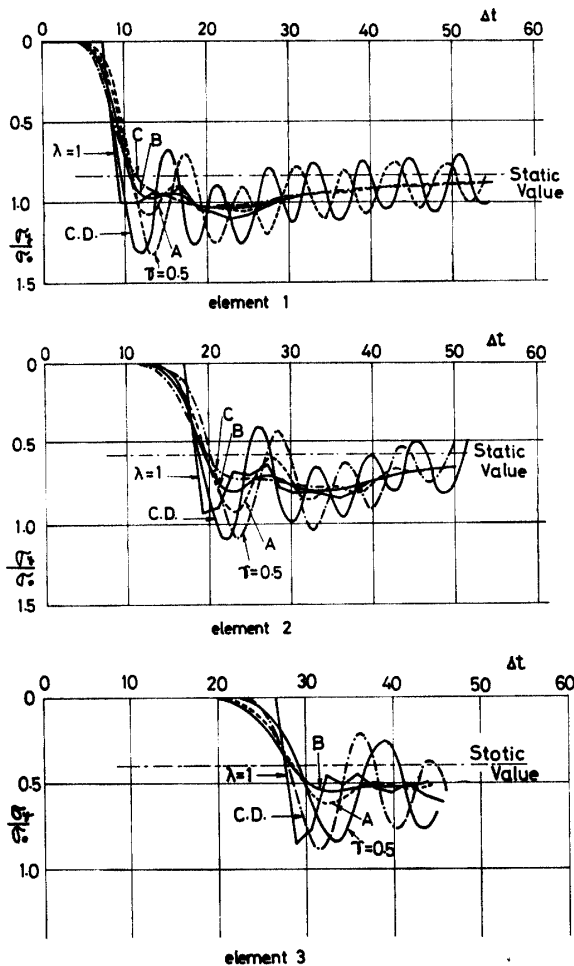


Fig. 10 Change of  $\sigma_y$  value in each element.

解として扱おうには無理があるようである。無限体中の球孔からの波の伝播等<sup>13)</sup>を考慮するとき波の振動はみられず、中央差分法や  $\gamma=0.5$  とした Newmark の方法による解は正しいとは考えられず、この場合も  $\lambda$  の値を 1.2~0.7 とした解が比較的合理的と思われる。

参考文献

1) Costantino, C. J.: "Finite Element Approach to Stress Wave Problems" Proc. A.S.C.E., EM 93, 153 ~176 (1967)

- 2) 桜井春輔, 小島省三: 有限要素法の波動伝播問題への適用について, 第5回マトリックス構造解析法研究発表論文集, (1971) p. 338~343
- 3) 工藤洋三, 中川浩二: 過渡応答解析における逐次積分法の比較について, 山口大学工学部研究報告 **28**, No. 2, 39~44 (1978)
- 4) Huges, T.J.R. et al.: "A finite element method for a class of contact-impact problems", Computer methods in applied mechanics and engineering, **8**, 249~276 (1976)
- 5) 河島佑男: 動的応答解析, コンピューターによる構造工学講座 II-4-A, 培風館 (1972)
- 6) 塩尻弘雄, 中村秀治: 構造解析における動的応答解析の一方法について, 土木学会論文報告集, No. 246, 21~33 (1976)
- 7) Newmark, N.M.: "A method of computation for structural dynamics", Proc. A.S.C.E., EM **85**, 67~94 (1959)
- 8) たとえば Clough, R.W. and K.J. Bathe: "Finite Element analysis of dynamic response," Oden et al. eds. Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, Univ. of Alabama Press, 153~179 (1972)
- 9) Hilber, H.M. and T.J.R. Hughes: "Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics", Earthquake Engineering and structural dynamics, **6**, 99~117 (1978)
- 10) Richtmyer, R.D. and K.W. Morton: "Difference method for initial value problems", 2nd ed., Inter. Pub. (1967)
- 11) Bathe K.J. and E.L. Wilson: "Stability and accuracy analysis of direct integration methods", Earthquake Engineering and structural dynamics, **1**, 283~291 (1973)
- 12) 野木達夫: 差分法の安定性, 土木学会編土木工学における数値解析, 基礎編, サイエンス社 p. 66~92 (1974)
- 13) Goudreau, G. L. and R. L. Taylor: "Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics", Computer methods in applied mechanics and engineering, **2**, 69~97 (1972)
- 14) Graff, K. F.: "Wave motion in elastic solids" Ohio State Univ. Press, (1975)

(昭和54年4月13日 受理)