

薄肉開断面部材の非保存的弾性安定問題への 有限要素法の応用

會田 忠義*・岩佐 進悟**・佐賀 孝徳***

Application of Finite Element Method to the Nonconservative Problems
of Elastic Stability of Thin Walled Members with Open Cross-section

Tadayoshi AIDA, Shingo IWASA and Takanori SAGA

Abstract

The differential equations and the corresponding mechanical boundary conditions governing the dynamic instability due to the distributed follower forces are obtained from the principle of virtual work. The finite element method is applied to stability analysis of structural systems subjected to the uniformly distributed and concentrated follower forces. In obtaining the above equations and applying the finite element method, the initial torsional moment M_z^0 is regarded as the nonconservative moment. Initial stress matrices K_{Np} and K_{Nq} due to nonconservative component of follower force are derived.

1. ま え が き

従動力を受ける梁柱の安定問題は、循環系に属する非保存的弾性安定問題として、これまでに多くの研究がなされてきた。そのほとんどが2軸対称断面を有する梁柱に対するもので、解析的方法¹⁻⁵⁾、差分法^{6,7)}、アナログ計算機による方法⁸⁾、集中質量系に対する変形法⁹⁾および有限要素法¹⁰⁾により解析されている。薄肉一般断面部材に対する有限要素法の応用として、R. S. Barsoumの研究¹⁰⁾がある。本研究はR. S. Barsoumのそれと類似であるが、次の点で異っている。すなわち、Barsoumは初期ねじりモーメントを保存量として仕事量を算出し、初期応力マトリックスを求めていることおよび従動力は節点に作用するものだけに限定し、これの外力の非保存成分マトリックスを求めている。これに対して、本研究では、初期ねじりモーメントを非保存量として取り扱い、また、従動力は等分布従動力をも想定して、上記の二つのマトリックスを求めている。本研究で取り扱う従動力は、横方向外力および

ねじり外部モーメントは断面のせん断中心に、外部曲げモーメントおよび軸方向外力は断面の重心に作用するものである。本法によりLeipholzモデルのように分布従動力を受ける問題の解析が可能になる。本研究においては、線形化した有限変位理論を適用し、仮想仕事の原理を用いて理論式を誘導し、これより有限要素法を説明した。本論文の最後に、従動力を受ける2軸対称断面柱および溝形断面柱の適用例を示した。

2. 有限振幅振動時の仮想仕事方程式

2.1 仮想仕事方程式

Fig. 1に示すような一構造要素に注目する。ここに

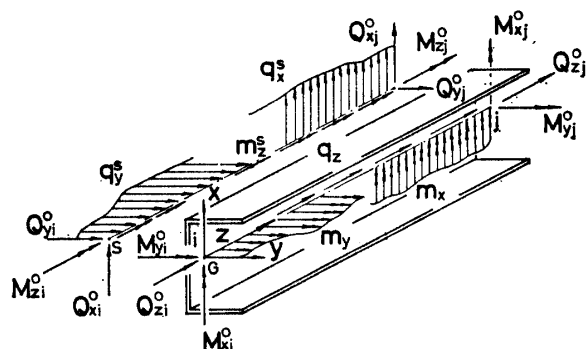


Fig.1 Initial loading condition.

* 土木工学科
** 福岡市
*** 徳山高専

図のように断面重心 G に座標原点を置き、 x および y 軸を断面主軸に、 z 軸を重心軸に一致させる。

今、Fig. 1 のように外力 ($q_x^s, q_y^s, q_z, m_x, m_y, m_z, m_\omega$)、材端 i に材端力 ($Q_{xi}^s, Q_{yi}^s, Q_{zi}^s, M_{xi}^s, M_{yi}^s, M_{zi}^s, M_{\omega i}^s$) および材端 j に材端力 ($Q_{xj}^s, Q_{yj}^s, Q_{zj}^s, M_{xj}^s, M_{yj}^s, M_{zj}^s, M_{\omega j}^s$) が作用し、静的に平衡な状態を想定する。ここで、 m_ω は重心に関する外部そりモーメントであり、 M_ω は重心に関するそりモーメントである。

この状態において、要素内のある断面のせん断中心 S に、 x 方向変位 u_s^s 、 y 方向変位 v_s^s および z 軸まわりの回転角 θ^s が、重心 G に z 方向変位 w_G^s が生ずるとき、同断面内の任意点の x, y および z 方向変位 u^s, v^s および w^s は次式で表わされる。

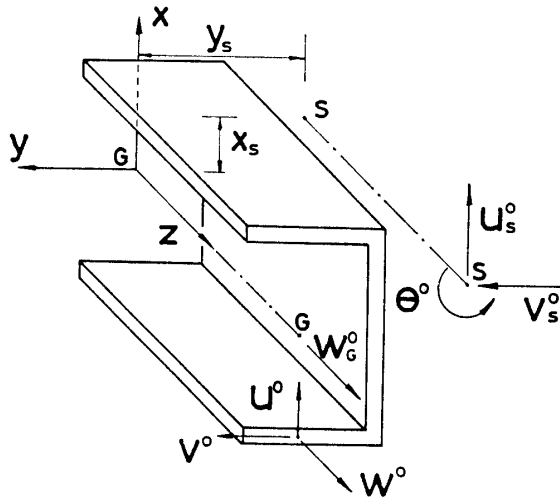


Fig.2 Displacements of member with open cross-section.

$$\left. \begin{aligned} u^s &= u_s^s - (y - y_s)\theta^s \\ v^s &= v_s^s + (x - x_s)\theta^s \\ w^s &= w_G^s - xu_s^{s'} - yv_s^{s'} + \omega_s\theta^{s'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ω_s はせん断中心に関するそり関数である。このとき、ひずみおよび応力は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^s &= \epsilon_y^s = \gamma_{xy}^s = 0 \\ \epsilon_z^s &= w_G^{s'} - xu_s^{s''} - yv_s^{s''} + \omega_s\theta^{s''} \\ \gamma_{yz}^s &= \theta^{s'} \{ \partial\omega_s / \partial y + (x - x_s) \} \\ \gamma_{zx}^s &= \theta^{s'} \{ \partial\omega_s / \partial x - (y - y_s) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^s &= \sigma_y^s = \tau_{xy}^s = 0 \\ \sigma_z^s &= E\epsilon_z^s, \tau_{yz}^s = G\gamma_{yz}^s, \tau_{zx}^s = G\gamma_{zx}^s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

上記初期応力状態に外力が与えられ有限振幅振動の状態を想定する。この場合、外力は材の変形とともに従動するとし、材端力は上記の材端力に振動時の材端力 ($Q_{xi}, Q_{yi}, Q_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, M_{\omega i}$) ならびに ($Q_{xj}, Q_{yj}, Q_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{\omega j}$) が付加され

る。振動時の材端力の方向は初期応力状態における材端力のそれと近似的に同じであると仮定する。

振動時において、要素内のある断面のせん断中心 S に変位 u_s, v_s および回転角 θ が、重心 G に w_G が生ずるとき、同断面内の任意点の変位 u, v および w は式 (1) と同様にして、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s)\theta \\ v &= v_s + (x - x_s)\theta \\ w &= w_G - xu_s' - yv_s' + \omega_s\theta' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

このとき、ひずみは断面の変形を無視するとき、

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

であるが、その他のひずみについては非線形項まで考慮すると、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \bar{\epsilon}_x + \epsilon_x^* \\ \gamma_{yz} &= \bar{\gamma}_{yz} + \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{zx} &= \bar{\gamma}_{zx} + \gamma_{zx}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}_x, \bar{\gamma}_{yz}$ および $\bar{\gamma}_{zx}$: 線形ひずみ、

$\epsilon_x^*, \gamma_{yz}^*$ および γ_{zx}^* : 非線形ひずみ。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= w_G' - xu_s'' - yv_s'' + \omega_s\theta'' \\ \bar{\gamma}_{yz} &= \theta' \{ \partial\omega_s / \partial y + (x - x_s) \} \\ \bar{\gamma}_{zx} &= \theta' \{ \partial\omega_s / \partial x - (y - y_s) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^* &= [\{ u_s' - (y - y_s)\theta' \}^2 + \{ v_s' + (x - x_s)\theta' \}^2] / 2 \\ \gamma_{yz}^* &= -\theta \{ u_s' - (y - y_s)\theta' \} \\ \gamma_{zx}^* &= \theta \{ v_s' + (x - x_s)\theta' \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、非線形項中 ($\partial w / \partial z$) に関する項を無視している。

応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_z &= E\epsilon_z, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

有限振幅振動状態のある時刻 t において、 $\delta u_s, \delta v_s, \delta\theta$ および δw_G の仮想変位が与えられたときの仮想仕事方程式を求める。

(慣性力の仮想仕事量)

材の単位体積質量を μ とするとき、慣性力の仮想仕事量は次の通りである。式中、 A は材の断面積、 V は材の体積を表わす。

$$\begin{aligned} & -\mu \int_V (\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) dV \\ & = -\int_0^L \{ m(\ddot{u}_s + y_s\ddot{\theta})\delta u_s + m(\ddot{v}_s - x_s\ddot{\theta}) \\ & \quad \times \delta v_s + m\ddot{w}_G\delta w_G + \mu I_{xx}\ddot{u}_s'\delta u_s' + \mu \\ & \quad \times I_{yy}v_s'\delta v_s' + (\mu I_{ps}\ddot{\theta} + m y_s\ddot{u}_s - m \\ & \quad \times x_s\ddot{v}_s)\delta\theta + \mu I_s^{\omega}\ddot{\theta}'\delta\theta' \} dz \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 $m = \mu A, I_{xx} = \int_A x^2 dA,$

$$I_{yy} = \int_A y^2 dA, I_{ps} = I_{xx} + I_{yy} + A(x_s^2 + y_s^2),$$

$$I_s^{\omega} = \int_A \omega_s dA.$$

(内力の仮想仕事量)

$$-\int_V \{ (\sigma_z^s + \sigma_z) \delta \epsilon_z + (\tau_{yz}^s + \tau_{yz}) \delta \gamma_{yz} \}$$

$$\begin{aligned}
 &+(\tau_{xz}^0 + \tau_{zx}^0)\delta\gamma_{zx}\}dV = -\delta\pi_0^0 - \int_V(\sigma_z^0 \\
 &\times \delta\varepsilon_z^* + \tau_{yz}^0\delta\gamma_{yz}^* + \tau_{zx}^0\delta\gamma_{zx}^*)dV - \int_V(\sigma_z \\
 &\times \delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dV - \int_V(\sigma_z \\
 &\times \delta\varepsilon_z^* + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}^* + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}^*)dV \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

上式の右辺の第1項 $\delta\pi_0^0$ は初期応力の仮想仕事量である。

$$\delta\pi_0^0 = \int_V(\sigma_z^0\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}^0\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}^0\delta\gamma_{zx})dV \dots\dots\dots(12)$$

式(11)の第4項は高次の項であることより、ここでは無視する。第2および3項は次のように書き表わされる。

$$\begin{aligned}
 &\int_V(\sigma_z^0\delta\varepsilon_z^* + \tau_{yz}^0\delta\gamma_{yz}^* + \tau_{zx}^0\delta\gamma_{zx}^*)dV \\
 &= \int'_0[Q_x^0\{(u_s' + y_s\theta')(\delta u_s' + y_s\delta\theta') + (v_s' \\
 &- x_s\theta')(\delta v_s' - x_s\delta\theta') + \gamma_z^0\delta\theta'\} - M_z^0 \\
 &\times (\theta'\delta u_s' + u_s'\delta\theta' - 2\beta_z\theta'\delta\theta') - M_y^0(\theta' \\
 &\times \delta v_s' + v_s'\delta\theta' + 2\beta_x\theta'\delta\theta') + 2M_\omega^0\beta_\omega \\
 &\times \theta'\delta\theta' + Q_x^0\{\beta_x(\theta'\delta\theta + \theta\delta\theta') + \theta\delta v_s' \\
 &+ v_s'\delta\theta\} + Q_y^0\{\beta_y(\theta'\delta\theta + \theta\delta\theta') - \theta\delta u_s' \\
 &- u_s'\delta\theta\} - M_z^0\beta_\omega(\theta'\delta\theta + \theta\delta\theta')]dz \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

ここで、 $Q_x^0 = \int_A \tau_{xz}^0 dA$, $Q_y^0 = \int_A \tau_{yz}^0 dA$,
 $Q_z^0 = \int_A \sigma_z^0 dA$, $M_x^0 = \int_A \sigma_x^0 y dA$, $M_y^0 = \int_A \sigma_y^0 x dA$, $M_\omega^0 = \int_A \sigma_x^0 \omega_s dA$, $M_z^0 = -\partial M_\omega^0 / \partial z$
 $\gamma_z^0 = (I_{xx} + I_{yy})/A$, $\beta_x = -x_s + (I_{120} + I_{300})/2I_{xx}$, $\beta_y = -y_s + (I_{030} + I_{210})/2I_{yy}$,
 $\beta_\omega = (I_{021} + I_{201})/2I_\omega^0$, $I_{lmn} = \int x^l y^m \omega_s^n dA$,
 $\int_V(\sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dV =$
 $\int'_0(EA w_G' \delta w_G' + EI_{xx} u_s'' \delta u_s'' + EI_{yy} v_s'' \delta v_s'' + EI_\omega^0 \theta'' \delta \theta'' + GK\theta' \delta \theta')dz \dots\dots\dots(14)$

ここで、 $K = \int_A [(\partial\omega_s/\partial x - (y - y_s))^2 - \{\partial\omega_s/\partial y + (x - x_s)\}^2] dA$

以上の内力の仮想仕事量の中には初期ねじりモーメント M_z^0 の仕事量が含まれていない。ここでは H. Ziegler に従い、 M_z^0 を非保存量と見なし次の仮想仕事量を式(11)に付加する。

$$\int'_0 M_z^0 (v_s' \delta u_s'' - u_s' \delta v_s'') dz \dots\dots\dots(15)$$

(外力の仮想仕事量)

要素のある断面のせん断中心 S が (u_s, v_s, θ) だけ変位するとともに $(-v_s', u_s', \theta)$ だけ回転し、重心 G が (u_G, v_G, w_G) だけ変位するとともに $(-v_G', u_G', \theta)$ だけ回転するとき、外力が従動力であることから、分布外力は次のように変化する (Fig. 3 参照)。

$$\begin{aligned}
 (q_x^0, 0, 0) &\longrightarrow (q_x^0, q_x^0\theta, -q_x^0 u_s') \\
 (0, q_y^0, 0) &\longrightarrow (-q_y^0\theta, q_y^0, -q_y^0 v_s') \\
 (0, 0, q_z) &\longrightarrow (q_z u_G', q_z v_G', q_z) \\
 (m_x, 0, 0) &\longrightarrow (m_x, m_x\theta, -m_x u_G') \\
 (0, m_y, 0) &\longrightarrow (-m_y\theta, m_y, -m_y v_G')
 \end{aligned}$$

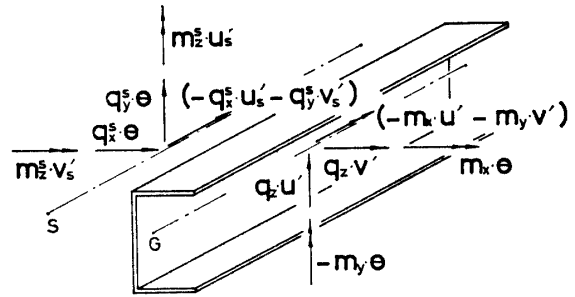


Fig. 3 Additional distributed forces by follow.

$(0, 0, m_x^0) \longrightarrow (m_x^0 u_G', m_x^0 v_G', m_x^0)$
 ただし、外部そりモーメントは従動しないものとする。
 分布外力の仮想仕事量は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 &\int'_0 (q_x^0 \delta u_s + q_y^0 \delta v_s + q_z \delta w_G - m_x \delta v_G' \\
 &+ m_y \delta u_G' + m_z \delta \theta + m_\omega \delta \theta') dz + \int'_0 \{-q_x^0 \\
 &\times \theta \delta u_s + q_x^0 \theta \delta v_s + (-q_x^0 u_s' - q_y^0 v_s') \delta w_s \\
 &+ q_z u_G' \delta u_G + q_z v_G' \delta v_G - m_y \theta (-\delta v_G') \\
 &+ m_x \theta \delta u_G' + (-m_x u_G' - m_y v_G') \delta \theta \\
 &- m_x^0 u_s' \delta v_s' + m_x^0 v_s' \delta u_s'\} dz = \delta\pi_{a1}^0 \\
 &+ \int'_0 [-q_y^0 \theta + q_z (u_s' + y_s \theta')] \delta u_s + \{m_x \theta \\
 &+ m_x^0 v_s' + x_s (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s')\} \delta u_s' + \{q_x^0 \\
 &\times \theta + q_z (v_s' - x_s \theta')\} \delta v_s + \{m_y \theta - m_x^0 u_s' \\
 &+ y_s (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s')\} \delta v_s' - \{q_x^0 v_s' + q_y^0 \\
 &\times v_s'\} \delta w_G + \{y_s q_z (u_s' + y_s \theta') - x_s q_z (v_s' \\
 &- x_s \theta') - m_x (u_s' + y_s \theta') - m_y (v_s' - x_s \theta')\} \\
 &\times \delta \theta + \{-\omega_n(x_s, y_s) (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') - m_y \theta x_s \\
 &+ m_x \theta y_s\} \delta \theta' dz \dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\delta\pi_{a1}^0$ は初期分布外力の仮想仕事量で、式(16)の左辺の第1積分項を示す。 $\omega_n(x_s, y_s)$ は重心に関するそり関数のせん断中心位置の値を表わす。

$m_x^0 = m_\omega + m_x x_s + m_y y_s$
 m_x^0 はせん断中心に関する外部そりモーメントである。
 (材端力の仮想仕事量)

$$\begin{aligned}
 &(Q_x^0 + Q_{xi}) \delta u_{Si} + (Q_x^0 + Q_{xj}) \delta u_{Sj} \\
 &(M_{xi}^0 + M_{xi}) (-\delta v_{Gi}') + (M_{xj}^0 + M_{xj}) \\
 &\times (-\delta v_{Gj}') + (Q_{yi}^0 + Q_{yi}) \delta v_{Si} + (Q_{yj}^0 \\
 &+ Q_{yj}) \delta v_{Sj} + (M_{yi}^0 + M_{yi}) \delta u_{Gi}' + (M_{yj}^0 \\
 &+ M_{yj}) \delta u_{Gj}' + (Q_{zi}^0 + Q_{zi}) \delta w_{Gi} \\
 &+ (Q_{zj}^0 + Q_{zj}) \delta w_{Gj} + (M_{zi}^0 + M_{zi}) \delta \theta_i \\
 &+ (M_{zj}^0 + M_{zj}) \delta \theta_j + (M_{\omega_i}^0 + M_{\omega_i}) \delta \theta_i' \\
 &+ (M_{\omega_j}^0 + M_{\omega_j}) \delta \theta_j' = \delta\pi_{a2}^0 + (Q_{xi} \delta u_{Si} \\
 &+ Q_{xj} \delta u_{Sj} + Q_{yi} \delta v_{Si} + Q_{yj} \delta v_{Sj} - M_{xi} \delta v_{Si}' \\
 &- M_{xj} \delta v_{Sj}' + M_{yi} \delta u_{Si} + M_{yj} \delta u_{Sj} \\
 &+ Q_{zi} \delta w_{Gi} + Q_{zj} \delta w_{Gj} + M_{zi} \delta \theta_i + M_{zj} \delta \theta_j' \\
 &+ M_{\omega_i}^0 \delta \theta_i' + M_{\omega_j}^0 \delta \theta_j') = \delta\pi_{a2}^0 + (Q_x \delta u_s
 \end{aligned}$$

$$+Q_v \delta v_s - M_x \delta v_s' + M_y \delta u_s' + Q_z \delta w_G + M_x \delta \theta + M_x^0 \delta \theta' |'_0 \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $\delta \pi_{a_2}^0$ は初期荷重時の材端力の仮想仕事量である。

$$M_x^0 = M_x + M_x x_s + M_y y_s$$

仮想仕事方程式は慣性力の仮想仕事量式(10)、内力の仮想仕事量式(11)および(15)、外力の仮想仕事量式(16)ならびに材端力の仮想仕事量式(17)の和がゼロに等しいことより得られ、初期荷重状態における仮想仕事方程式

$$-\delta \pi_i^0 + \delta \pi_{a_1}^0 + \delta \pi_{a_2}^0 = 0 \dots\dots\dots (18)$$

を考慮するとき、次のように整理される。

$$\begin{aligned} & - \int'_0 \{ m(\ddot{u}_s + y_s \ddot{\theta}) \delta u_s + m(\ddot{v}_s - x_s \ddot{\theta}) \delta v_s \\ & + m \ddot{w}_G \delta w_G + \mu I_{xx} \ddot{u}_s' \delta u_s' + \mu I_{yy} \ddot{v}_s' \delta v_s' \\ & + (\mu I_{yz} \ddot{\theta} + m y_s \ddot{u}_s - m x_s \ddot{v}_s) \delta \theta + \mu I_{xx}^0 \\ & \times \ddot{\theta}' \delta \theta' \} dz - \int'_0 [Q_x^0 \{ (u_s' + y_s \theta') (\delta u_s' \\ & + y_s \delta \theta') + (v_s' - x_s \theta') (\delta v_s' - x_s \delta \theta') \\ & + \gamma_z^0 \theta' \delta \theta' \} - M_x^0 (\theta' \delta u_s' + u_s' \delta \theta' \\ & - 2 \beta_y \theta' \delta \theta') - M_y^0 (\theta' \delta v_s' + v_s' \delta \theta' \\ & + 2 \beta_x \theta' \delta \theta') + 2 M_x^0 \beta_w \theta' \delta \theta' + Q_x^0 \{ \beta_x \\ & \times (\theta' \delta \theta + \theta \delta \theta') + \theta \delta v_s' + v_s' \delta \theta \} \\ & + Q_y^0 \{ \beta_y (\theta' \delta \theta + \theta \delta \theta') - \theta \delta u_s' - u_s' \delta \theta \} \\ & - M_x^0 \beta_w (\theta' \delta \theta + \theta \delta \theta') + M_x^0 (v_s' \delta u_s'' \\ & - u_s' \delta v_s'')] dz - \int'_0 (EA w_G' \delta w_G' + EI_{xx} \\ & \times u_s'' \delta u_s'' + EI_{yy} v_s'' \delta v_s'' + EI_{zz}^0 \delta \theta'' \\ & + GK \theta' \delta \theta') dz + \int'_0 [-q_z^0 \delta u_s' + q_z (u_s' \\ & + y_s \theta') \delta u_s' + \{ m_x \theta + m_z^0 v_s' + x_s (q_x^0 \\ & \times u_s' + q_y^0 v_s') \} \delta u_s' + \{ q_x^0 \theta + q_z (v_s' \\ & - x_s \theta') \} \delta v_s + \{ m_y \theta - m_z^0 u_s' + y_s (q_x^0 \\ & \times u_s' + q_y^0 v_s') \} \delta v_s - (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') \delta w_G \\ & + \{ y_s q_z (u_s' + y_s \theta') - x_s q_z (v_s' - x_s \theta') \\ & - m_x (u_s' + y_s \theta') - m_y (v_s' - x_s \theta') \} \delta \theta \\ & + \{ -\omega_n (x_s, y_s) (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') + (m_x y_s \\ & - m_y x_s) \theta \} \delta \theta'] dz + (Q_x \delta u_s + Q_y \delta v_s \\ & - M_x \delta v_s' + M_y \delta u_s' + Q_z \delta w_G + M_x \delta \theta \\ & + M_x^0 \delta \theta') |'_0 = 0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

2.2 平衡方程式と境界条件

式(19)の仮想仕事方程式において、仮想変位の独立性より次の平衡方程式と境界条件を得る。

(平衡方程式)

$$\begin{aligned} & m(\ddot{u}_s + y_s \ddot{\theta}) - \mu I_{xx} \ddot{u}_s'' + EI_{xx} u_s'''' \\ & - \{ Q_x^0 (u_s' + y_s \theta') \}' + (M_x^0 \theta)'' + (M_x^0 v_s')'' \\ & + q_y^0 \theta - q_z (u_s' + y_s \theta') + \{ m_x \theta + m_z^0 v_s' \\ & + x_s (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') \}' = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & m(v_s - x_s \ddot{\theta}) - \mu I_{yy} v_s'' + EI_{yy} v_s'''' \\ & - \{ Q_y^0 (v_s' - x_s \theta') \}' + (M_y \theta)'' - (M_y^0 u_s')'' \\ & - q_x^0 \theta - q_z (v_s' - x_s \theta') + \{ m_y \theta - m_z^0 u_s' \\ & + y_s (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') \}' = 0 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu I_{yz} \ddot{\theta} + m y_s \ddot{u}_s - m x_s \ddot{v}_s - \mu I_{zz}^0 \ddot{\theta}'' \\ & + EI_{zz}^0 \theta'''' - GK \theta'' + \{ -Q_z^0 (y_s u_s' - x_s v_s') \\ & + Q_x^0 (\gamma_z^0 + x_z^0 + y_z^0) \theta' - 2(M_x^0 \beta_y - M_y^0 \beta_x \\ & + M_x^0 \beta_w) \theta' \}' + M_x^0 u_s'' + M_y^0 v_s'' \\ & - (Q_x^0 \beta_x + Q_y^0 \beta_y - M_x^0 \beta_w) \theta' - q_z y_s (u_s' \\ & + y_s \theta') + q_z x_s (v_s' - x_s \theta') + m_x (u_s' + y_s \theta') \\ & + m_y (v_s' - x_s \theta') + \{ -\omega_n (x_s, y_s) (q_x^0 u_s' \\ & + q_y^0 v_s') + (m_x y_s - m_y x_s) \theta \}' = 0 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$m \ddot{w}_G - EA w_G'' + q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s' = 0 \dots\dots\dots (23)$$

(境界条件)

$$\begin{aligned} & [\mu I_{xx} \ddot{u}_s' - EI_{xx} u_s'''' + Q_x^0 (u_s' + y_s \theta') \\ & - (M_x^0 \theta)' - (M_x^0 v_s')' - \{ m_x \theta + m_z^0 v_s' \\ & + x_s (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') \} - Q_x] \delta u_s |'_0 = 0 \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$(EI_{xx} u_s'' + M_x^0 v_s' - M_y) \delta u_s' |'_0 = 0 \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} & [\mu I_{yy} \ddot{v}_s' - EI_{yy} v_s'''' + Q_y^0 (v_s' - x_s \theta') \\ & - (M_y \theta)' + (M_x^0 u_s')' - \{ m_y \theta - m_z^0 u_s' \\ & + y_s (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') \} - Q_y] \delta v_s |'_0 = 0 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$(EI_{yy} v_s'' - M_x^0 u_s' + M_z) \delta v_s' |'_0 = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{aligned} & [\mu I_{zz}^0 \ddot{\theta}' - EI_{zz}^0 \theta'''' + GK \theta' + Q_z^0 \{ y_s u_s' \\ & - x_s v_s' + (\gamma_z^0 + x_z^0 + y_z^0) \theta' \} - M_x^0 u_s' \\ & - M_y^0 v_s' + 2(M_x^0 \beta_y + M_y^0 \beta_x + M_x^0 \beta_w) \theta' \\ & + (Q_x^0 \beta_x + Q_y^0 \beta_y - M_x^0 \beta_w) \theta - \{ -\omega_n (x_s, y_s) \\ & \times (q_x^0 u_s' + q_y^0 v_s') + (m_x y_s - m_y x_s) \theta \} \\ & - M_x] \delta \theta |'_0 = 0 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$$(EI_{zz}^0 \theta'' - M_x^0) \delta \theta' |'_0 = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$(EA w_G' - Q_z) \delta w_G |'_0 = 0 \dots\dots\dots (30)$$

3. 有限要素法の適用

3.1 要素の剛性方程式

要素の変位関数として、次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_s &= H(z) A u_s e^{\lambda t}, \\ v_s &= H(z) A v_s e^{\lambda t}, \\ w_G &= J(z) B w_G e^{\lambda t}, \\ \theta &= H(z) A \theta e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 λ は特性指数であり、

$$H(z) = \{1, z, z^2, z^3\}$$

$$J(z) = \{1, z\}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{array} \right] \dots\dots\dots (32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \\
 u_S &= \{\bar{u}_{Si}, \bar{u}_{Si}', \bar{u}_{Sj}, \bar{u}_{Sj}'\}^T \\
 v_S &= \{\bar{v}_{Si}, \bar{v}_{Si}', \bar{v}_{Sj}, \bar{v}_{Sj}'\}^T \\
 w_G &= \{\bar{w}_{Gi}, \bar{w}_{Gi}'\}^T \\
 \theta &= \{\theta_i, \theta_i', \theta_j, \theta_j'\}^T
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

式(33)中、右辺の各要素は材端*i*あるいは*j*の変位および回転角の振幅を表わす。

変位関数(31)を仮想仕事方程式(19)に代入し整理すると、

$$\delta d^T (\lambda^2 [m] d + [k] d + [k_G] d - [k_N] d - f) e^{2\lambda x} = 0 \dots\dots\dots(34)$$

上式中、 $[k_N]$ を求めるに当り、分布外力を材軸方向に一様に分布するものと仮定する。

ここで、

$$d^T = \{u_S^T, v_S^T, w_G^T, \theta^T\} \dots\dots\dots(35)$$

質量マトリックス $[m]$:

$$[m] = \begin{bmatrix} (mk_S^0 + \mu I_{xx} k_S^0) & 0 \\ 0 & (mk_S^0 + \mu I_{yy} k_S^0) \\ 0 & 0 \\ m y_S k_S^0 & -m x_S k_S^0 \\ 0 & m y_S k_S^0 \\ 0 & -m x_S k_S^0 \\ m \bar{k}_S^0 & 0 \\ 0 & (\mu I_{pz} k_S^0 + \mu I_{\omega}^0 k_S^0) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(36)$$

剛性マトリックス $[k]$

$$[k] = \begin{bmatrix} EI_{xx} k_S^0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} k_S^0 & 0 \\ 0 & 0 & EA \bar{k}_S^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (EI_{\omega}^0 k_S^0 + GK k_S^0) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(37)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 k_S^0 &= A^T k_{00} A, & k_S^0 &= A^T k_{11} A, \\
 k_S^0 &= A^T k_{22} A, & \bar{k}_S^0 &= B^T \bar{k}_{00} B, \\
 \bar{k}_S^0 &= B^T k_{11} B.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

$$\left. \begin{aligned}
 k_{mn} &= \int_0^l (H(z)^{(m)})^T H(z)^{(n)} dz \\
 k_{mn} &= \int_0^l (J(z)^{(m)})^T J(z)^{(n)} dz
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

$(m, n = 0, 1, 2)$

初期応力マトリックス $[k_G]$

$$[k_G] = \begin{bmatrix} k_G^{Qz} & (k_G^{Mz})^T \\ -(k_G^{Mz})^T & k_G^{Qz} \\ 0 & 0 \\ (y_S k_G^{Qz} - k_G^{Mz} - k_G^{Qv}), & (-x_S k_G^{Qz} - k_G^{Mv} + k_G^{Qx}) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &0 \quad \{y_S k_G^{Qz} - k_G^{Mz} - (k_G^{Qv})^T\} \\
 &0 \quad \{-x_S k_G^{Qz} - k_G^{Mz} + (k_G^{Qx})^T\} \\
 &0 \quad 0 \\
 &0 \quad k_G^*
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 k_G^* &= k_G^{Qz} (\gamma_0^2 + x_S^2 + y_S^2) + \beta_x \{k_G^{Qx} + (k_G^{Qx})^T \\
 &\quad - 2k_G^{Mv}\} + \beta_y \{k_G^{Qy} + (k_G^{Qy})^T + 2k_G^{Mx}\} \\
 &\quad - \beta_{\omega} \{k_G^{Mz\omega} + (k_G^{Mz\omega})^T - 2k_G^{M\omega}\} \dots\dots\dots(41)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 k_G^{Qx} &= A^T k_{01}^{Qx} A, & k_G^{Qy} &= A^T k_{01}^{Qy} A, \\
 k_G^{Qz} &= A^T k_{11}^{Qz} A, & k_G^{Mz} &= A^T k_{11}^{Mz} A, \\
 k_G^{Mv} &= A^T k_{11}^{Mv} A, & k_G^{Mx} &= A^T k_{12}^{Mx} A, \\
 k_G^{M\omega} &= A^T k_{11}^{M\omega} A, & k_G^{Mz\omega} &= A^T k_{10}^{Mz\omega} A
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

$$k_{mn}^F = \int_0^l (H(z)^{(m)})^T F(z) (H(z)^{(n)}) dz = (k_{mn}^F)^T \dots\dots\dots(43)$$

$(m, n = 0, 1, 2)$

等分布従動力の非保存成分マトリックス $[k_N]$:

$$[k_N] = \begin{bmatrix} (q_x k_N^1 + q_x^2 x_S k_N^2) \\ (q_x^2 y_S - m_x^2) k_N^2 \\ -q_x^2 \bar{k}_N^1 \\ \{(q_x y_S - m_x) k_N^1 - \omega_n(x_S, y_S) q_x^2 k_N^2\} \\ (q_x^2 x_S + m_x^2) k_N^2 & 0 \\ (q_x k_N^1 + q_x^2 y_S k_N^2) & 0 \\ -q_y^2 \bar{k}_N^1 & 0 \\ \{(-q_x x_S - m_y) k_N^1 - \omega_n(x_S, y_S) q_y^2 k_N^2\} & 0 \\ \{-q_y^2 k_N^0 + q_x y_S k_N^1 + m_x (k_N^1)^T\} \\ \{q_x^2 k_N^0 - q_x x_S k_N^1 + m_y (k_N^1)^T\} \\ 0 \\ \{(q_x y_S^2 + q_x x_S^2 - m_x y_S - m_y x_S) k_N^1 + (m_x y_S - m_y x_S) (k_N^1)^T\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(44)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 k_N^0 &= A^T k_{00} A, & k_N^1 &= A^T k_{01} A, \\
 k_N^2 &= A^T k_{11} A, & \bar{k}_N^1 &= B^T \bar{k}_{01} A
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

$$\bar{k}_{mn}^0 = \int_0^l (J(z)^{(m)})^T (H(z)^{(n)}) dz \dots\dots\dots(46)$$

$(m, n = 0, 1, 2)$

$$f^T = \{U^T, V^T, W^T, \theta^T\} \dots\dots\dots(47)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \{\bar{Q}_{xi}, \bar{M}_{vi}, \bar{Q}_{xj}, \bar{M}_{vj}\}^T \\
 V &= \{\bar{Q}_{yi}, -\bar{M}_{xi}, \bar{Q}_{yj}, -\bar{M}_{xj}\}^T \\
 W &= \{\bar{Q}_{zi}, \bar{Q}_{zj}\}^T
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

$$\theta = \{\bar{M}_{xi}, \bar{M}_{\omega i}, \bar{M}_{xj}, \bar{M}_{\omega j}\}^T$$

式(48)の右辺の各要素は材端*i*あるいは*j*の材端力の振幅を表わす。

式(34)が仮想変位 δd および時刻*t*に無関係に成立するための条件より、次の剛性方程式が得られる。

$$(\lambda^2[m] + [k] + [k_G] - [k_N])d = f \dots\dots\dots (49)$$

上式の左辺が構造物の節点の平衡条件に用いられる節価節点力である。

骨組構造物において、いくつかの部材が接合されている節点では、一般に、せん断中心および重心は一致しない場合が多い。この場合、接合部において接合される各部材の材端面上で、それぞれの部材に共通な点(節点)を考え、この節点で力の伝達を、すなわち、平衡を考えねばならない。式(49)で与えられた等価節点力は上述の通り、断面の重心に作用するものとせん断中心に作用するものがあり、直ちに、節点の平衡条件には用いられない。今、材端*i*の端面上の*a*(x_a, y_a)および材端*j*の端面上の*b*(x_b, y_b)に作用する等価節点力を求めると下記の通りである¹¹⁾。

$$F = (\lambda^2[M] + [K] + [K_G] - [K_N])d_{ab} \dots\dots\dots (50)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} d_{ab}^T &= \{u_{ab}^T, v_{ab}^T, w_{ab}^T, \theta\} \\ u_{ab} &= \{\bar{u}_{ai}, \bar{u}_{ai}', \bar{u}_{bj}, \bar{u}_{bj}'\}^T \\ v_{ab} &= \{\bar{v}_{ai}, \bar{v}_{ai}', \bar{v}_{bj}, \bar{v}_{bj}'\}^T \\ w_{ab} &= \{\bar{w}_{ai}, \bar{w}_{bj}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

u_{ab}, v_{ab} および w_{ab} の各要素は材端*i*の*a*点あるいは材端*j*の*b*点の変位の振幅を表わす。

$$\left. \begin{aligned} [M] &= [T_{ab}]^T [m] [T_{ab}] \\ [K] &= [T_{ab}]^T [k] [T_{ab}] \\ [K_G] &= [T_{ab}]^T [k_G] [T_{ab}] \\ [K_N] &= [T_{ab}]^T [k_N] [T_{ab}] \\ F &= [T_{ab}]^T f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & t_{yS} \\ 0 & I & 0 & t_{xS} \\ t_x & t_y & I & t_\omega \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

I: 単位行列

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \begin{bmatrix} 0 & x_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_b \end{bmatrix}, & t_y &= \begin{bmatrix} 0 & y_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_b \end{bmatrix} \\ t_{yS} &= \begin{bmatrix} y_{aS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{aS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{bS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{bS} \end{bmatrix}, & t_{xS} &= - \begin{bmatrix} x_{aS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{aS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{bS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{bS} \end{bmatrix} \\ t_\omega &= - \begin{bmatrix} 0 & \omega_{na} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{nb} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (54)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{aS} &= x_a - x_S, & x_{bS} &= x_b - x_S \\ y_{aS} &= y_a - y_S, & y_{bS} &= y_b - y_S \\ \omega_{na} &= \omega_n(x_a, y_a), & \omega_{nb} &= \omega_n(x_b, y_b) \end{aligned} \right\}$$

ここで、 ω_{na} および ω_{nb} は重心に関するそり関数の材端面上の*a* および *b* 点におけるその値である。

3.2 従動力を受ける節点の平衡方程式

薄肉断面の単一材の曲げねじり問題において、Saint-Venantのねじりだけでなく、そり拘束による影響を考慮しなければならない。しかし、材長が長くなると、そり拘束の影響は材端部のみに限られ、材の大部分に対しては、Saint-Venantのねじりのみを考慮すればよいことは周知の通りである(一様でない分布ねじりモーメントを受ける場合も、Saint-Venantねじりだけでなく、そり拘束による付加ねじりモーメントも考慮すべきである)。薄肉断面材からなる骨組構造物においても、全体の変形を考察する限りでは、そり拘束の影響を無視して解析しても実際の挙動と差異がないことが知られている。

以上の観点から、分布ねじりモーメントを受け受る場合も含め、近似的取扱いとして Saint-Venant のねじりのみを考慮した場合の平衡方程式を求める。

等価節点力(50)を次式に書き直す。

$$\left\{ \begin{matrix} F_i \\ F_j \end{matrix} \right\} = (\lambda^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [M_2] \\ [M_2] & [M_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [G_{i1}] & [G_{i2}] \\ [G_{j2}] & [G_{j1}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [N_{i1}] & [N_{i2}] \\ [N_{i2}] & [N_{i1}] \end{bmatrix}) \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (55)$$

ここで、

$$\begin{aligned} d_i &= \{\bar{u}_{ai}, \bar{v}_{ai}, \bar{w}_{ai}, -\bar{v}_{ai}', \bar{u}_{ai}', \bar{\theta}_i\}^T \\ d_j &= \{\bar{u}_{bj}, \bar{v}_{bj}, \bar{w}_{bj}, -\bar{v}_{bj}', \bar{u}_{bj}', \bar{\theta}_j\}^T \end{aligned}$$

F_i および F_j は、それぞれ材端*i*および*j*の材端力で、 d_i および d_j の要素の変位に対応する。これより、部材*i**j*の材端*i*の材端力 F_i は

$$F_i = (\lambda^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [M_2] \\ [M_2] & [M_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [G_{i1}] & [G_{i2}] \\ [G_{j2}] & [G_{j1}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [N_{i1}] & [N_{i2}] \\ [N_{i2}] & [N_{i1}] \end{bmatrix}) \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (56)$$

構造物の節点に作用する集中従動力は部材の端面の共通点(前述の*a*あるいは*b*点)に作用するものとする。初期荷重として節点*i*の共通点に R_i なる力が作用するとき、

$$R_i = \{P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}\}^T \dots\dots\dots (57)$$

従動により R_i' なる力が付加される。節点*i*の共通点の全体座標軸方向の変位および回転角の振幅を次のように表わすとき、

$$D_i = \{\bar{\delta}_{xi}, \bar{\delta}_{yi}, \bar{\delta}_{zi}, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \dots\dots\dots (58)$$

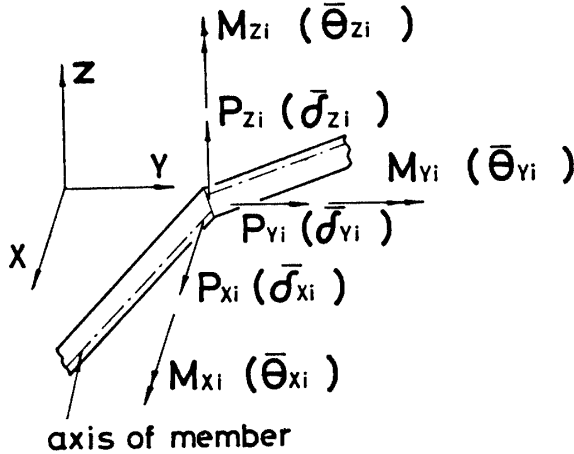


Fig. 4 Nodal forces and displacements.

R_i' は次式で表わされる。(Fig. 5 参照)

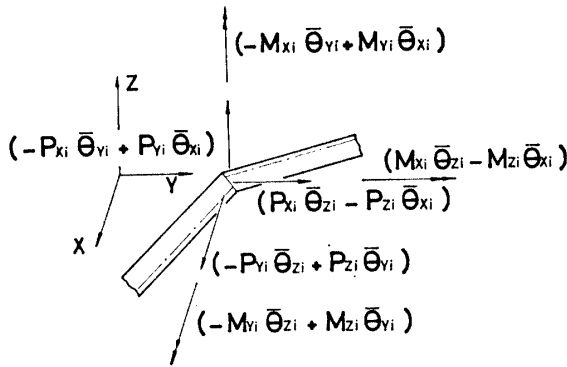


Fig. 5 Additional nodal forces by follow.

$$R_i' = \begin{pmatrix} 0 & P_{zi} & -P_{yi} \\ -P_{zi} & 0 & P_{xi} \\ P_{yi} & -P_{xi} & 0 \\ 0 & M_{zi} & -M_{yi} \\ -M_{zi} & 0 & M_{xi} \\ M_{yi} & -M_{xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{\theta}_{zi} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(59)$$

節点 i の共通点の有限振幅振動状態の平衡方程式は全体座標系から部材 ij の局部座標系への座標変換マトリックスを $[T_{ij}]$ で表わすとき、次式で表わされる。

$$\sum_j [T_{ij}]^T F_j - R_i' = 0 \dots\dots\dots(60)$$

\sum_j は節点 i に連結される部材の和を表わす。上式は次式に整理される。

$$\sum_j (\lambda^2 [[\bar{M}_1][\bar{M}_2]] + [[\bar{S}_1][\bar{S}_2]] + [[\bar{G}_{i1}][\bar{G}_{i2}]] - [[\bar{N}_{i1}][\bar{N}_{i2}]] \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} - [R_i] D_i = 0 \dots\dots\dots(61)$$

ここで、

$$[\bar{Q}] = [T_{ij}]^T [Q] [T_{ij}] \left. \begin{matrix} Q = M_p, S_p, G_{ip}, N_{ip} (p=1, 2) \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

$$[R_i] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & P_{zi} & -P_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & -P_{zi} & 0 & P_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & P_{yi} & -P_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{zi} & -M_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & -M_{zi} & 0 & M_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & M_{yi} & -M_{xi} & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(63)$$

式 (61) を構造物の各節点に適用することにより、次の構造物全体の剛性方程式が得られる。

$$(\lambda^2 [M] + [K] + [K_G] - [K_{Nq}] - [K_{Np}]) D = 0 \dots\dots\dots(64)$$

ここで、

- D : 構造物全体の変位ベクトル,
- $[M]$: 構造物全体の質量マトリックス,
- $[K]$: " 剛性マトリックス,
- $[K_{Nq}]$: 構造物全体の等分布従動力の非保存成分マトリックス,
- $[K_{Np}]$: 構造物全体の集中従動力の非保存成分マトリックス,

$$[K_{Np}] = \begin{pmatrix} [R_1] & & & \\ & [R_2] & \dots & 0 \\ & & & [R_N] \\ 0 & & & \end{pmatrix} \dots\dots\dots(65)$$

式 (64) より、次の特性方程式が得られる。

$$|\lambda^2 [M] + [K] + [K_G] - [K_{Nq}] - [K_{Np}]| = 0 \dots\dots\dots(66)$$

式 (66) から、一連の従動力に対する固有値 λ が得られ、固有値曲線が求められ、非保存弾性安定問題の解析が可能になる。

4. 解析例

4.1 長方形断面柱

柱長を 5 等分割して本解析法を適用し、臨界値を求めた結果を Table 1 に示す。結果の表示に当り、次の無次元量を用いた。

$$\eta_p = pl^2/EI, \quad \eta_q = ql^3/EI, \\ \eta_M = \mathfrak{M}l/EI, \quad \eta_m = ml^2/EI$$

p : 柱の頂部に作用する集中従動力, q : 等分布接線従動力, \mathfrak{M} : 柱の頂部に作用する集中接線従動トルク, m : 等分布接線従動トルク, l : 柱長, EI : 弱軸に関する曲げ剛性。

4.2 溝形断面柱

Fig. 6 に示す断面を有する一端固定他端自由柱の解析結果を示す。Fig. 7 に集中接線従動を受ける柱の、

Table 1 Critical values of columns

Loading Condition	Boundary Condition	F E M $k=5$	F D M ⁷⁾			Displacement ⁹⁾ Method ($k=10$)	Galerkin Method ¹²⁾
			$k=10$	$k=50$	$k=100$		
Concentrated follower force	Fix-Free	$\eta_p=20.01$	19.87	20.04	20.05	19.93	20.05
uniformly distributed follower force	Fix-Free	$\eta_q=40.13$	39.53	40.03	40.05	40.17	40.082
	Fix-Pin	$\eta_q=57.13$	54.96	56.92	56.99	58.83	57.068
	Pin-Pin	$\eta_q=18.96$	18.78	18.95	18.95	19.14	18.956
	Fix-Fix	$\eta_q=80.63$	76.34	80.09	80.22	83.71	80.402
Concentrated follower torque	Fix-Free	$\eta_M=0.710$				0.709	
uniformly distributed follower torque	Fix-Free	$\eta_m=1.157$					

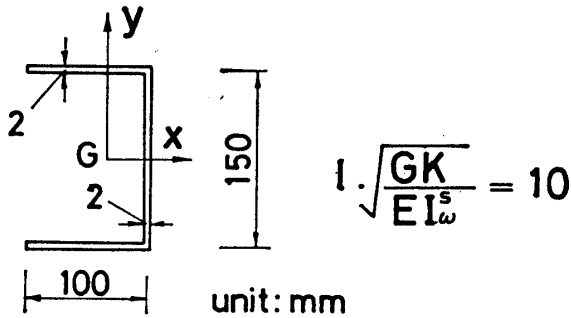


Fig.6 Cross-section of member.

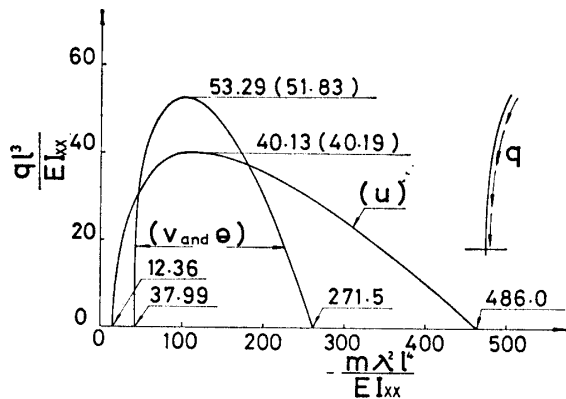


Fig.8 Eigenvalue curves of column subjected to the concentrated follower forces.

Fig. 8 に等分布接線従動力を受ける柱の固有値曲線と臨界値を示す。柱長を 5 等分割して本解析法を適用した結果である。図中の括弧内の値は Galerkin 法の 3 項近似を示す。非載荷時の 1 次と 4 次振動は Fig.6 の y 軸に関する曲げ振動であるが、2 次と 3 次は x 軸に関する曲げと x 軸まわりのねじりの連成振動である。

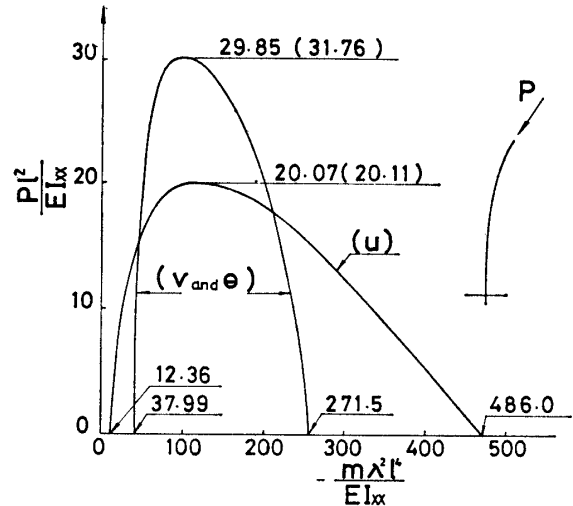


Fig.7 Eigenvalue curves of column subjected to the uniformly distributed follower forces.

いずれの振動も荷重の増加によりフラッタ形不安定を起すことが明らかである。

5. 結 び

分布従動力を受ける薄肉構造材の弾性安定問題の基礎式を仮想仕事の原理を用いて求め、分布従動力および集中従動力を受ける薄肉部材からなる構造物への有限要素法の適用法を示した。ここで、特に、これまで明らかにされていなかった、初期応力マトリックスに付加されるべき、従動力の非保存成分マトリックスの内容を明確にした。有限要素法を従動力を受ける柱に適用し、従来の結果と比較して十分信頼できる結果を得た。しかし、溝形材を有限要素法により解析した結果を Galerkin 法の 3 項近似による結果と比較したと

き曲げ振動に対する臨界値はよい一致が見られたが、曲げとねじりの連成振動に対する臨界値は若干の差異が認められた。変位関数の改良が必要と考えられる。

本研究の数値計算は九州大学大型計算機センターの FACOM M-190 および山口大学電子計算機室の FACOM 230-28 によって行なった。

参 考 文 献

- 1) Bolotin, V.V.: Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, N.Y., 1963.
- 2) Leipholz, H.: Stability Theory, Academic Press, N.Y., 1970.
- 3) Beck, M.: Z. angew. Math. Phys., 3, 225 (1952).
- 4) Leipholz, H.: Z. angew. Math. Phys., 13, 359(1962).
- 5) Hauger, W.: Ing. arch., 35, 221(1966).
- 6) Leipholz, H.: Z. angew. Math. Phys., 13, 581(1962).
- 7) 杉山吉彦らの研究, たとえば, 日本機械学会論文集, 37, 455 (1971).
- 8) 杉山吉彦・藤原直史・関谷 壮: 日本機械学論文集, 37, 931 (1971).
- 9) 會田忠義・波木健一: 土木学会論文報告集, 263, 25 (1977).
- 10) Barsoum, R.S.: Inter. jour. NME., 6, 39 (1973).
- 11) 川井忠彦: 座屈問題解析, コンピュータによる構造工学講座 II-6-B, 培風館 (1974), p.105.
- 12) 森本康幸: 山口大学修士論文, 昭和52年 2月, (昭和53年10月14日受理)