

層流自由対流熱伝達と固体壁内熱伝導の干渉

宮本 政英*・澄川 順二**

Effect of Wall Heat Conduction on Laminar Free Convection From a Vertical Flat Plate

Masahide MIYAMOTO and Junji SUMIKAWA

Abstract

In this report, following problem of steady conjugate heat transfer with conduction and free convection is treated by analytical method, to which the local similarity solution is applied.

The left side surface of vertical flat plate with finite thickness is maintained at uniform temperature or uniform heat flux, and the right side surface is in contact with fluid in which laminar free convection heat transfer takes place.

The differences of thermal condition between each surface are made clear by the use of the non-dimensional factor $k_f/k_s \cdot d/l$ for uniform temperature at the left side surface and $k_s/k_f \cdot d/l$ for uniform heat flux.

1. 緒言

あらゆる対流熱伝達の現象は、固体壁内の熱伝導とは不可分の関係にあり、あらかじめ流体と固体壁との界面における温度分布又は熱流束分布を、精確に知ることは困難な場合が多く、界面における温度場の境界条件を既知のものとして解析された、対流熱伝達の結果を、実用上の問題に直接適用することは不合理な場合が生じる。

しかしながら、実際の機器の熱解析にあたっては、便宜上、固体壁内熱伝導を無視した既存の対流熱伝達の解析結果を直接適用することが多く、熱伝導と対流熱伝達の干渉によって生じる、複合対流熱伝達の特性を精確に把握しておくことは、既存の解析結果の実用性を高める上からも望ましく、又直接実際の熱機器について、より精確な温度場を知ることにもなる。

このような要請から、固体～流体複合伝熱の問題を取扱った例は、強制対流熱伝達においては、P. Payver¹⁾、A. V. Luikow²⁾、榊原³⁾ら多くの解析や実験が報告されている。

自由対流熱伝達については、フィンの問題を取扱っ

た Lock and Gunn⁴⁾、内部発熱する垂直固体壁について、Kelleher and Yang⁵⁾、電子機器の冷却に関連して、局部的に発熱する垂直板を取扱った Zinnes⁶⁾、水平円柱に関して Rotem⁷⁾、さらに垂直平板を介して温度の異なる両側の流体に生じる自由対流熱伝達が干渉する問題を Lock and Ko⁸⁾が解析している。

本報告は、固体壁内熱伝導と層流自由対流熱伝達が相互に干渉する問題について、厚さが一様で上下端が断熱された垂直平板固体壁の裏面で、一様な温度分布又は、一様な熱流束分布の条件を与えたとき、固体壁内熱伝導を介して、壁表面に接する流体に熱伝達が行われる場合について解析し、固体～流体複合自由対流熱伝達の特性におよぼす、固体壁厚さとその熱伝導率の影響を明らかにした。

2. 主な記号

- a : 温度伝導率 $= k_f / \rho_f C_{Pf}$ [m²/s]
 $a_0 \sim a_3$: F_f ((54)式) の係数
 $B_0 \sim B_6$: (63), (64) 式の係数
 C : (25) 式の定数項, (37), (38) 式で与えられる。
 D : 無次元固体壁厚さ (2) 式
 d : 固体壁厚さ [m]
 F : 無次元界面温度分布 (3), (4) 式

* 機械工学科

** 大学院機械工学専攻

- G : (5), (6) 式
- G_{rx} : グラスホフ数 $g\bar{\beta}(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2$
- G'_{rl} : グラスホフ数 $g\bar{\beta}(T_0 - T_\infty)l^3/\nu^2$
- G_{rx}^* : 修正グラスホフ数 $g\bar{\beta}q_w x^4/(\nu^2 k_f)$
- G'_{rl}^* : 修正グラスホフ数 $g\bar{\beta}q_0 l^4/\nu^2 k_f$
- g : 重力加速度 [m/s²]
- H_{mn} : 積分値 (65) 式
- h_x : 局所熱伝達率 [w/(m²K)]
- K : 熱伝導率比 (k_s/k_f)
- k : 熱伝導率 [w/(mK)]
- L : 無次元固体壁長さ (1) 式
- l : 固体壁長さ [m]
- N_{ux} : 局所ヌセルト数 (51) 式
- Q : 無次元温度勾配 (36), (45), (46) 式
- q : 熱流束 [w/m²]
- T : 温度 [K]
- ΔT : (5), (6) 式
- U : (66) 式
- u : x 方向速度 [m/s]
- V : (66) 式
- v : y 方向速度 [m/s]
- W : (66) 式
- x : 鉛直方向座標 [m]
- y : 水平方向座標 [m]
- β : (30) 式
- $\bar{\beta}$: 体膨脹係数 [1/K]
- γ : (59), (61) 式
- δ : (60), (62) 式
- θ : 無次元温度
- $\theta'_f(\beta, 0)$: 界面温度勾配
- κ : (24) 式
- ν : 動粘性係数 [m²/s]
- ξ : (25) 式
- ψ : 流れ関数 (23) 式
- 添字
 - f : 流体
 - s : 固体
 - w : 固体～流体界面
 - 0 : 平板固体壁裏面
 - ∞ : 固体壁面から無限遠
 - $*$: L に対する無次元量 (修正グラスホフ数 G_{rx}^* を除く)

3. 複合伝熱を一次元熱移動として取扱った場合

座標系を Fig.1 のようにとる.

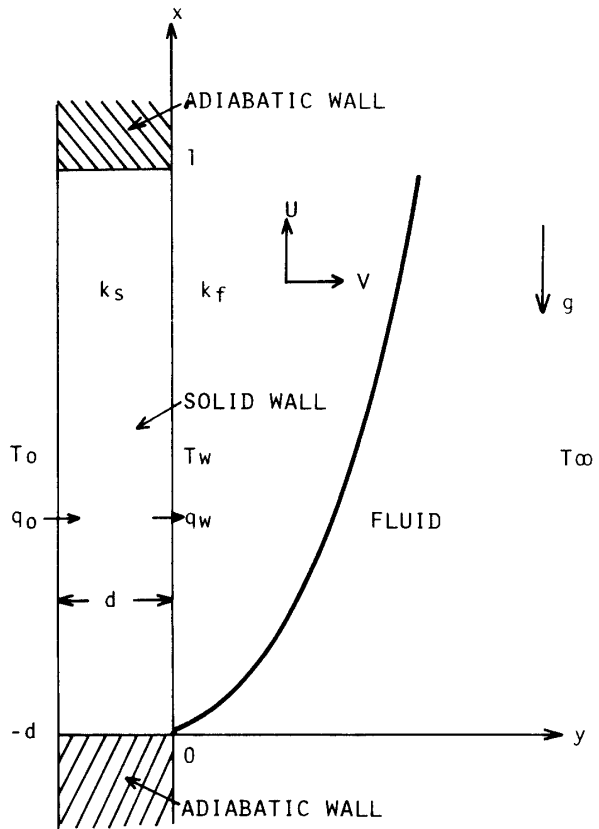


Fig. 1 Coordinate system

無次元量を次のように定義する.

長さについては,

$$X = Gx, \quad Y = Gy, \quad L = Gl, \quad D = Gd \quad (1)$$

$$x^* = \frac{X}{L}, \quad y^* = \frac{Y}{L}, \quad d^* = \frac{D}{L} \quad (2)$$

であり, 界面温度については流体側と固体側とで, それぞれ次の様にする.

流体側について

$$F_f = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T} \quad (3)$$

固体側について

$$\left. \begin{aligned} F_s &= \frac{T_w - T_0}{\Delta T} \quad (\text{一様裏面温度}) \\ F_s &= \frac{T_w}{\Delta T} \quad (\text{一様裏面熱流束}) \end{aligned} \right\} (4)$$

である. ただし,

一様裏面温度の場合には,

$$\left. \begin{aligned} G &= \left(\frac{g\bar{\beta}(T_0 - T_\infty)}{\nu^2} \right)^{1/3} \\ \Delta T &= T_0 - T_\infty \end{aligned} \right\} (5)$$

とし,

一様裏面熱流束の場合には,

$$\left. \begin{aligned} G &= \left(\frac{g\bar{\beta} \cdot q_0}{\nu^2 k_f} \right)^{1/4} \\ \Delta T &= \left(\frac{g\bar{\beta} k_f^3}{\nu^2 q_0^3} \right)^{-1/4} \end{aligned} \right\} (6)$$

とする。

さて、固体壁厚さとその熱伝導率が複合層流自由対流熱伝達の特性におよぼす影響を、簡単に予測するために、次のような仮定をもうけて、固体と流体の界面の温度分布を求める。

- i) 固体壁内熱伝導は、壁面に垂直方向のみとする。
- ii) 対流熱伝達の特性は、界面温度分布の変形によっては影響されない。

以上の仮定によって求められる界面温度分布は、本問題のいわば第0次近似の解とみなすことができる。

壁面に垂直方向の熱流束は

$$q = \frac{k_s}{d}(T_0 - T_w) = h_x(T_w - T_\infty) \quad (7)$$

従って

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_w - T_\infty} - 1 = \frac{k_f}{k_s} \frac{d}{x} N_{ux} \quad (8)$$

となる。

- 1) 一様裏面温度分布の場合 ($T_0 = \text{const.}$)

無次元界面温度分布は

$$F_f = \frac{1}{1 + A(P_r)D/K F_f^{1/4} X^{-1/4}} \quad (9)$$

ただし $A(P_r)$ は一様界面温度分布の既存解に含まれる係数である ($N_{ux} = A(P_r) \cdot G_{rx}^{1/4}$)。

従って裏面の温度が一様であっても、界面温度分布は、一様でなくなり、右辺分母における。

$$A' = A(P_r) \frac{D}{K} X^{-1/4} = \frac{k_f}{k_s} \frac{d}{x} A(P_r) G_{rx}^{1/4} \quad (10)$$

が大きい程界面温度が低下することがわかる。

このため x の小さい方向に固体壁内を、熱が流れ (9) 式とは厳密には異なる温度分布になる。又 (10) 式で与えられる A' は、固体壁内熱伝導の影響が、裏面と界面の温度分布の形の相異として現れているとするなら、影響の強さを示す無次元のパラメーターになり、与えられた流体については、 x が小さい程、 D/K (固体壁面に垂直方向の熱抵抗に相当する) が大きい程影響が大きくなる。

- 2) 一様裏面熱流束の場合 ($q_0 = \text{const.}$)

(8) 式より

$$\frac{-F_s}{F_f} = \frac{k_f}{k_s} \frac{d}{x} N_{ux} \quad (11)$$

(7) 式より

$$-F_s = D/K \quad (12)$$

故に

$$F_f = \frac{X}{N_{ux}} = \frac{X^{1/5}}{B(P_r)} \quad (13)$$

ただし $B(P_r)$ は一様界面熱流束分布の既存解に

含まれる係数である ($N_{ux} = B(P_r) G_{rx}^{*1/5}$)

従って、この場合には、無次元界面温度分布は固体壁厚さやその熱伝導率には無関係に、一定で界面一様熱流束の場合の温度分布になることがわかる。

さて固体壁内熱伝導の影響を見積るためには、(14) 式で与えられる温度分布によって生じる x 方向の熱流 q_s を考えてみる。

近似的に

$$q_s = k_s d \frac{d}{dx} \left(\frac{T_0 + T_w}{2} \right) \quad (14)$$

従って

$$\frac{q_s}{l q_0} = \frac{1}{5} \frac{k_s}{k_f} \frac{d}{l} G_{rx}^{*1/5} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{B(P_r)} \frac{DK}{L} X^{-4/5} = B' \quad (16)$$

となる。(16) 式で与えられる B' が大きい程、裏面と界面の熱流束分布の相異が大きくなる。 B' は x が小さい程又 DK (固体壁内を平行に熱が流れる時の熱抵抗の逆数に相当する) が大きい程大になり、 K は一様裏面温度の場合とは逆に作用する。

さて、一般的に、一様裏面温度、一様裏面熱流束いずれの場合も、界面における温度分布や熱流束の分布は、一様界面温度と一様界面熱流束の温度分布の中間の値をとることは、以上の考察から容易に推測することができる。

4. 基礎方程式およびその解析

4.1 基礎方程式と境界条件

流体側について定常層流自由対流熱伝達の基礎方程式 (連続の式、境界層の運動方程式およびエネルギー方程式) は、次の様になる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \bar{\beta} (T_f - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (18)$$

$$u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \quad (19)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} y=0 : & \quad u=v=0, & T_f &= T_w \\ y=\infty : & \quad u=\partial u/\partial y=0, & T_f &= T_\infty \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

($0 \leq x \leq l, y \geq 0$)

固体側の基礎方程式 (熱伝導方程式) は、

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned}
 x=0: \quad \partial T_s / \partial x = 0, \quad x=l: \quad \partial T_s / \partial x = 0 \\
 y=0: \quad T_s = T_w \\
 y=-d: \quad T_s = T_0 \\
 \text{(一様裏面温度の場合)} \\
 -k_s \partial T_s / \partial y = q_0 \\
 \text{(一様裏面熱流束の場合)} \\
 (0 \leq x \leq l, \quad -d \leq y \leq 0)
 \end{aligned} \right\} (22)$$

4.2 流体側基礎方程式の解析

Kao⁹⁾ の用いた手法を適用して流体側の基礎方程式を解析する。流れ関数 ψ を導入し

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (23)$$

(x, y) 座標に代わり、次の様な (ξ, η) 座標を導入する。

$$\xi = \int_0^{x^*} F_f dx^* \quad (24)$$

$$\eta = C \cdot \frac{F_f^{1/2}}{\xi^{1/4}} y^* \quad (25)$$

(26), (27) 式で定義される無次元流れ関数及び無次元温度を導入する。

$$f(\xi, \eta) = \frac{F_f^{1/2} \psi}{4C\nu\xi^{3/4}} \quad (26)$$

$$\theta_f(\xi, \eta) = \frac{T_f - T_\infty}{\Delta T \cdot F_f} \quad (27)$$

(18), (19) 式を (24)~(27) 式を用いて変形すると、運動方程式 (28) 式、エネルギー方程式 (29) を得る。

$$\begin{aligned}
 f''' + (3-2\beta)ff'' - 2f'^2 + \theta_f \\
 = 4\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Pr} \theta_f'' + (3-2\beta)f\theta_f' - 4\beta f' \theta_f \\
 = 4\xi \left(f' \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi} - \theta_f' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (29)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\beta = \frac{\xi}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \quad (30)$$

であり、ダッシュは η による微分である。

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned}
 f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, \infty) = 0 \\
 \theta_f(\xi, \infty) = 0, \quad \theta_f(\xi, 0) = 1
 \end{aligned} \right\} (31)$$

Kao⁹⁾ は (28), (29) 式を精度良く解く手法 (局所非相似解) を提案し、2, 3 の例についてその解を示しているが、本問題に直接適用するのは煩雑なため困難であり、固体壁裏面で一様温度あるいは一様熱流束を与えた場合、界面では一様温度と一様熱流束の中間の

温度分布になることが知られているから、(28), (29) 式の右辺が小さいとして無視して得られる次の方程式

$$f''' + (3-2\beta)ff'' - 2f'^2 + \theta_f = 0 \quad (32)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_f'' + (3-2\beta)f\theta_f' - 4\beta f' \theta_f = 0 \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned}
 f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, \infty) = 0 \\
 \theta_f(\xi, \infty) = 0, \quad \theta_f(\xi, 0) = 1
 \end{aligned} \right\} (34)$$

を解いて得られる局所相似解を用いることができる。Kao⁹⁾ は、 $Pr = 0.7$ の場合について、(32), (33) 式の解を求めている。本解析においては、 $\theta_f'(\beta, 0)$ の値を β の関数として表わすことが必要であり、その計算値は、Kao の結果から (35) 式により、良い精度をもって近似出来る。

$$\begin{aligned}
 \theta_f'(\beta, 0) = -4.9950 \times 10^{-1} - 2.7778 \times 10^{-1} \beta \\
 + 4.0321 \times 10^{-2} \beta^2 + 2.4702 \times 10^{-3} \beta^3 \quad (35)
 \end{aligned}$$

一様界面温度のとき、 $\beta = 0$

一様界面熱流束のとき、 $\beta = 1/6$

となるが、(35) 式で近似したときの精度は、これらの場合には、0.1% 以内となる。

(35) 式によって界面における無次元温度勾配は、次式で表わされる。

$$Q_f = -C \cdot F_f^{3/2} \cdot \xi^{-1/4} \cdot \theta_f'(\beta, 0) \quad (36)$$

ただし、

$$Q_f = \frac{L}{k_f \Delta T G} q_w$$

以上の式およびこれ以後の式において、

一様裏面温度の場合については、

$$\left. \begin{aligned}
 F_f = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T} \\
 C = \left(\frac{q \bar{\beta} \Delta T L^3}{4\nu^2 G^3} \right)^{1/4} \\
 \Delta T = T_0 - T_\infty
 \end{aligned} \right\} (37)$$

であり、

一様裏面熱流束の場合については、

$$\left. \begin{aligned}
 F_f = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T} \\
 C = \left(\frac{q \bar{\beta} \Delta T L^3}{4\nu^2 G^3} \right)^{1/4} \\
 \Delta T = \left(\frac{q \bar{\beta} k_f^3}{\nu^2 q_0^3} \right)^{-1/4}
 \end{aligned} \right\} (38)$$

である。

4.3 固体側基礎方程式の解析

固体側熱伝導方程式 (21) 式、一様裏面温度の場合には (39) 式、一様裏面熱流束の場合には (40) 式で無次元化すると、いずれの場合も (41) 式となる。

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{\Delta T} \quad (39)$$

$$\theta_s = \frac{T_s}{\Delta T} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (41)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x^* = 0 : \partial \theta_s / \partial x^* &= 0 \\ x^* = 1 : \partial \theta_s / \partial x^* &= 0 \\ y^* = 0 : \theta_s &= F_s \\ y^* = -d^* : \theta_s &= 0 \text{ (一様裏面温度)} \\ &- \partial \theta_s / \partial y^* = Q_0 \text{ (一様裏面熱流束)} \end{aligned} \right\} (42)$$

ただし、

$$Q_0 = \frac{L}{k_s \Delta T G} \cdot q_0$$

境界条件(42)の下で(41)式の解は、一様裏面温度の場合(43)式、一様裏面熱流束の場合(44)式で与えられる。¹⁰⁾

$$\theta_s = \left(\frac{y^*}{d^*} + 1 \right) \int_0^1 F_s dx^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi(y^* + d^*))}{\sinh n\pi d^*} \times \cos n\pi x^* \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \quad (43)$$

$$\theta_s = -Q_0 y^* + \int_0^1 F_s dx^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\pi(y^* + d^*))}{\cosh n\pi d^*} \cos n\pi x^* \times \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \quad (44)$$

次に、無次元温度勾配は、一様裏面温度の場合(45)式、一様裏面熱流束の場合(46)式となる。

$$Q_s = -\frac{1}{d^*} \int_0^1 F_s dx^* - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \coth n\pi d^* \times \cos n\pi x^* \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \quad (45)$$

$$Q_s = Q_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \tanh n\pi d^* \times \cos n\pi x^* \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \quad (46)$$

ただし、

$$Q_s = \frac{L}{k_s \Delta T G} \cdot q_w$$

4.4 流体側の解と固体側の解の接合

界面において流体と固体の温度が等しいこと、および熱流束が等しいことから、一様裏面温度の場合には、

$$\left. \begin{aligned} F_s &= F_f - 1 \\ Q_f &= KQ_s \end{aligned} \right\} (47)$$

であり、一様裏面熱流束の場合には、

$$\left. \begin{aligned} F_s &= F_f + \frac{T_\infty}{\Delta T} \\ Q_f &= KQ_s \end{aligned} \right\} (48)$$

である。従って、本問題は次の方程式に帰着される。一様裏面温度の場合については、

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{x^*} F_f dx^* \right)^{-1/4} F_f^{3/2} \left[-4.9950 \times 10^{-1} - 2.7778 \times 10^{-1} \right. \\ & \times \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right) + 4.0321 \times 10^{-2} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^2 \\ & \left. + 2.4702 \times 10^{-3} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^3 \right] \\ & = -\frac{K}{C} \left[\frac{1}{d^*} \int_0^1 F_s dx^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \coth n\pi d^* \right. \\ & \left. \times \cos n\pi x^* \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \right] \quad (49) \end{aligned}$$

となり、一様裏面熱流束の場合については、

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{x^*} F_f dx^* \right)^{-1/4} F_f^{3/2} \left[-4.9950 \times 10^{-1} - 2.7778 \times 10^{-1} \right. \\ & \times \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right) + 4.0321 \times 10^{-2} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^2 \\ & \left. + 2.4702 \times 10^{-3} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^3 \right] \\ & = \frac{K}{C} \left[-Q_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n\pi \tanh n\pi d^* \right. \\ & \left. \times \cos n\pi x^* \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \right] \quad (50) \end{aligned}$$

となる。以上、(49)、(50)式で得られる F_f を用いて、熱伝達の特性は次式で求められる。

局所ヌセルト数は、

$$\begin{aligned} N_{ux} &= \frac{h_x x}{k_f} \\ &= -\frac{x}{T_w - T_\infty} \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (51) \end{aligned}$$

で定義され、次式の様にかける。

$$\frac{N_{ux}}{G_{rx}^{1/4}} = -\frac{\theta_f'(\beta, 0)}{\sqrt{2}} \left[\frac{F_f x^*}{\xi} \right]^{1/4} \quad (52)$$

ここで、

$$G_{rx} = \frac{g \bar{\beta} (T_w - T_\infty) x^3}{\nu}$$

である。また、一様裏面熱流束の場合には、裏面熱流束 q_0 に対する界面熱流束 q_w の比 q_w/q_0 を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \frac{q_w}{q_0} &= \frac{1}{K} \frac{Q_f}{Q_0} \\ &= -\frac{C}{KQ_0} \frac{F_f^{3/2} \theta_f'(\beta, 0)}{\xi^{1/4}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_f^{3/2} \theta_f'(\beta, 0)}{(L\xi)^{1/4}} \quad (53)$$

次に、(49), (50) 式より未知の界面温度分布 F_f を求めることを考えてみよう。 F_f が x^* に関する三次式で表わされると仮定し、その係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を決定する。(Yang⁵⁾ は、 F_f を x^{*n} ($n=1, 2, \dots$) の形に展開しているが、本解析では、解を求めるべき基礎方程式 (49), (50) 式は、極めて複雑な非線形微積分方程式であって、必然的な展開の形式を定めることが困難であるため、もっとも単純な形式を採用した.)

$$F_f = a_0 + a_1 x^* + a_2 x^{*2} + a_3 x^{*3} \quad (54)$$

(54) 式を、(49), (50) 式に代入し、係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を決定するために、余弦関数の直交性を利用する。すなわち、基礎方程式の両辺に $\cos j\pi x^*$ ($j=0, 1, 2, 3$) を乗じて、 x^* について積分すると、

$$\int_0^1 Q_f dx^* = K \int_0^1 Q_s dx^* \quad (55)$$

$$\int_0^1 Q_f \cos j\pi x^* dx^* = K \int_0^1 Q_s \cos j\pi x^* dx^* \quad (56)$$

従って、(55) 式から

$$\int_0^1 \left[\left(\int_0^{x^*} F_f dx^* \right)^{-1/4} F_f^{3/2} \left[-4.9950 \times 10^{-1} - 2.7778 \times 10^{-1} \times \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right) + 4.0321 \times 10^{-2} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^2 + 2.4702 \times 10^{-3} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^3 \right] \right] dx^* = \frac{K}{C} \gamma \quad (57)$$

(56) 式から、

$$\int_0^1 \left[\left(\int_0^{x^*} F_f dx^* \right)^{-1/4} F_f^{3/2} \left[-4.9950 \times 10^{-1} - 2.7778 \times 10^{-1} \times \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right) + 4.0321 \times 10^{-2} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^2 + 2.4702 \times 10^{-3} \left(\frac{\int_0^{x^*} F_f dx^* dF_f}{F_f^2} \frac{dF_f}{dx^*} \right)^3 \right] \right] \cos n\pi x^* dx^* = \frac{n\pi K \delta}{C} \int_0^1 F_s \cos n\pi x^* dx^* \quad (58)$$

が得られる。

一様裏面温度の場合には、(57) 式右辺は、

$$\gamma = \frac{1}{d^*} \int_0^1 \int_0^1 F_s dx^* dx^* \quad (59)$$

であり、(58) 式においては、

$$\delta = \coth n\pi d^* \quad (60)$$

となる。

一様裏面熱流束の場合には、同様に

$$\begin{aligned} \gamma &= -Q_0 \\ &= -\frac{L}{K} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\delta = \tanh n\pi d^* \quad (62)$$

となる。

$x^* < 1$ であるから、(57), (58) 式の左辺をマクローリン展開し、項別積分を行なうと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} B_0 a_0^{5/4} + \frac{4}{7} B_1 a_0^{1/4} a_1 + \frac{4}{11} (B_2 a_0^{-3/4} a_1^2 + B_3 a_0^{1/4} a_2) \\ & + \frac{4}{15} (B_4 a_0^{-7/4} a_1^3 + B_5 a_0^{-3/4} a_1 a_2 + B_6 a_0^{1/4} a_3) \\ & = \frac{K}{C} \gamma \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & B_0 a_0^{5/4} H_{0n} + B_1 a_0^{1/4} a_1 H_{1n} + (B_2 a_0^{-3/4} a_1^2 + B_3 a_0^{1/4} a_2) H_{2n} \\ & + (B_4 a_0^{-7/4} a_1^3 + B_5 a_0^{-3/4} a_1 a_2 + B_6 a_0^{1/4} a_3) H_{3n} \\ & = \frac{K \delta}{C n \pi} \left[(a_1 + 2a_2 + \frac{3((n\pi)^2 - 2)}{(n\pi)^2} a_3) \cos n\pi - a_1 + \frac{6}{(n\pi)^2} a_3 \right] \end{aligned} \quad (64)$$

$B_0 \sim B_6$ の値は、Table.1 に示されている。 $H_{0n} \sim H_{3n}$ は (65) 式で与えられ、ガウス・ルジャンドル法により数値積分を行なった。それを Table.2 に示す。

$$H_{mn} = \int_0^1 x^{* \frac{4m-1}{4}} \cos n\pi x^* dx^* \quad (65)$$

($m=0, 1, 2, 3, n=1, 2, 3$)

(63), (64) 式から、 a_1, a_2, a_3 を決定する。このため次の様に置き換える。

Table.1 Values of B_n in Equation (63), (64) ($n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

B_0	-4.9950×10^{-1}
B_1	-9.6459×10^{-1}
B_2	-3.8125×10^{-2}
B_3	-1.2632
B_4	-7.5942×10^{-2}
B_5	5.5636×10^{-2}
B_6	-1.5514

Table.2 Values of H_{mn} in Equation (65) ($m=0, 1, 2, 3, n=1, 2, 3$)

$m \setminus n$	1	2	3
0	2.2015×10^{-1}	1.1219×10^{-1}	8.9917×10^{-2}
1	-1.8887×10^{-1}	-1.5185×10^{-2}	-2.5164×10^{-2}
2	-2.0659×10^{-1}	4.0598×10^{-2}	-2.1030×10^{-2}
3	-1.8654×10^{-1}	7.1510×10^{-2}	-2.9596×10^{-2}

$$U = \frac{a_1}{a_0}, \quad V = \frac{a_2}{a_0}, \quad W = \frac{a_3}{a_0} \quad (66)$$

従って (63) 式 ($n=0$) は、次の様になる。一様裏面温度の場合には、

$$\begin{aligned} & a_0^{\frac{5}{4}} \left[\frac{4}{3} B_0 + \frac{4}{7} B_1 U + \frac{4}{11} (B_2 U^2 + B_3 V) \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{15} (B_4 U^3 + B_5 UV + B_6 W) \right] \\ & = \frac{\sqrt{2} K}{d^*} \cdot L^{-\frac{3}{4}} \cdot a_0 \left(1 + \frac{1}{2} U + \frac{1}{3} V + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{4} W \right) - \frac{\sqrt{2} K}{d^*} L^{-\frac{3}{4}} \end{aligned} \quad (67)$$

となり、一様裏面熱流束の場合には、

$$\begin{aligned} & a_0^{\frac{5}{4}} \left[\frac{4}{3} B_0 + \frac{4}{7} B_1 U + \frac{4}{11} (B_2 U + B_3 V) \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{15} (B_4 U^3 + B_5 UV + B_6 W) \right] \\ & = -\sqrt{2} L^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (68)$$

となる。(64) 式 ($n=1, 2, 3$) は次の様になる。

$$\begin{aligned} & a_0^{\frac{1}{4}} \left[B_0 H_{0n} + B_1 H_{1n} U + (B_2 U^2 + B_3 V) H_{2n} \right. \\ & \quad \left. + (B_4 U^3 + B_5 UV + B_6 W) H_{3n} \right] \\ & = \frac{K \delta}{C n \pi} \left[(U + 2V + \frac{3((n\pi)^2 - 2)}{(n\pi)^2} W) \right. \\ & \quad \left. \times \cos n\pi - U + \frac{6}{(n\pi)^2} W \right] \end{aligned} \quad (69)$$

(69) 式は、(70) 式の様に変形する。

$$\begin{aligned} & \left[B_1 H_{1n} a_0^{\frac{1}{4}} + (1 - \cos n\pi) \frac{K \delta}{C n \pi} \right] U \\ & + \left[B_3 H_{2n} a_0^{\frac{1}{4}} - 2 \cos n\pi \frac{K \delta}{C n \pi} \right] V \\ & + \left[B_6 H_{3n} a_0^{\frac{1}{4}} + \frac{(3(2 - (n\pi)^2) \cos n\pi - 6)}{(n\pi)^2} \frac{K \delta}{C n \pi} \right] W \end{aligned}$$

$$= -a_0^{\frac{1}{4}} \left[B_0 H_{0n} + B_2 H_{2n} U^2 + (B_4 U^3 + B_5 UV) H_{3n} \right] \quad (70)$$

一様裏面温度の場合には、(67)式、一様裏面熱流束の場合には、(68)式より、 U, V, W の初期値、あるいは、(70)式で得られる U, V, W の値を代入し、 a_0 の値を求める。(70)式右辺の U, V, W には、初期値、あるいは、前回の値を代入し、右辺を定数とする多元連立一次方程式をガウス消去法にて、新たな U, V, W の値を求める。これらの U, V, W の値を(67)、(68)式に代入し a_0 の値を求め、以下同じことをそれぞれの値の変化率が 10^{-5} 以下になるまで繰り返し、 a_0, a_1, a_2, a_3 の収束値が求められる。

5. 数値計算の結果と考察

流体に空気 ($Pr=0.7$) を用い、一様裏面温度の場合には、 $Gr'_{rl}=10^9, 5 \times 10^3 \leq K \leq 5, 10^{-2} \leq D/L \leq 8 \times 10^{-1}$ の範囲で、組み合わせとして、 $10^{-3} \leq D/(KL) \leq 10^{-2}$ の範囲で計算を行ない、 $D/(KL)=10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 10^{-2}$ について、界面温度分布、局所ヌセルト数分布を求めた。一様裏面熱流束の場合には、 $Gr'_{rl}=10^{10}, 5 \times 10^{-3} \leq K \leq 3 \times 10, 10^{-2} \leq D/L \leq 5 \times 10^{-1}$ の範囲で、組み合わせとして、 $2 \times 10^2 \leq KD/L \leq 3$ の範囲で計算を行ない、 $KD/L=2 \times 10^2, 10, 3$ について界面温度分布、局所ヌセルト数分布、熱流束比 (53) 式) を求めた。

Fig.2には、比較のため(9)式で与えられる一次元熱伝導の解が示されているが、いずれも界面温度は、 X の大きい所では一次元熱伝導の結果に近く、わずか

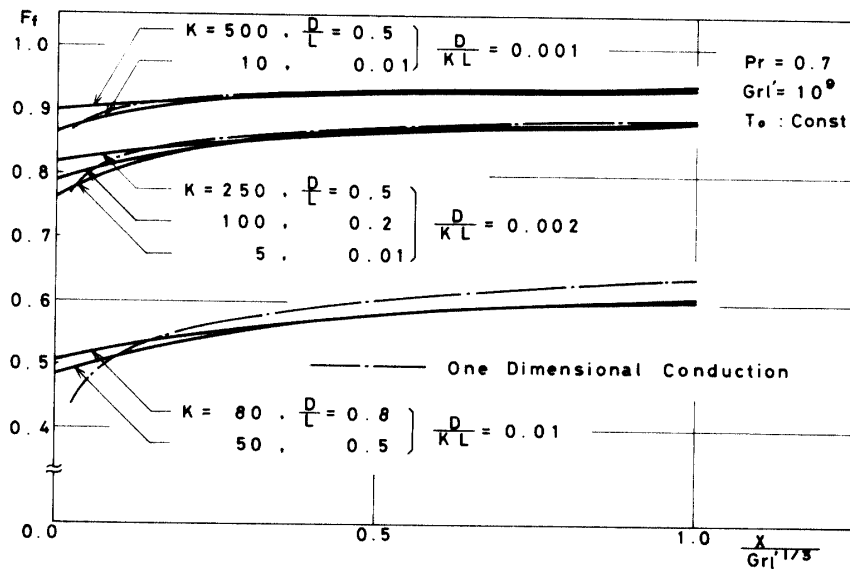


Fig. 2 Effect of the non-dimensional factor $D/(KL)$ on interfacial temperature profiles (Constant temperature at the left side surface of flat plate)

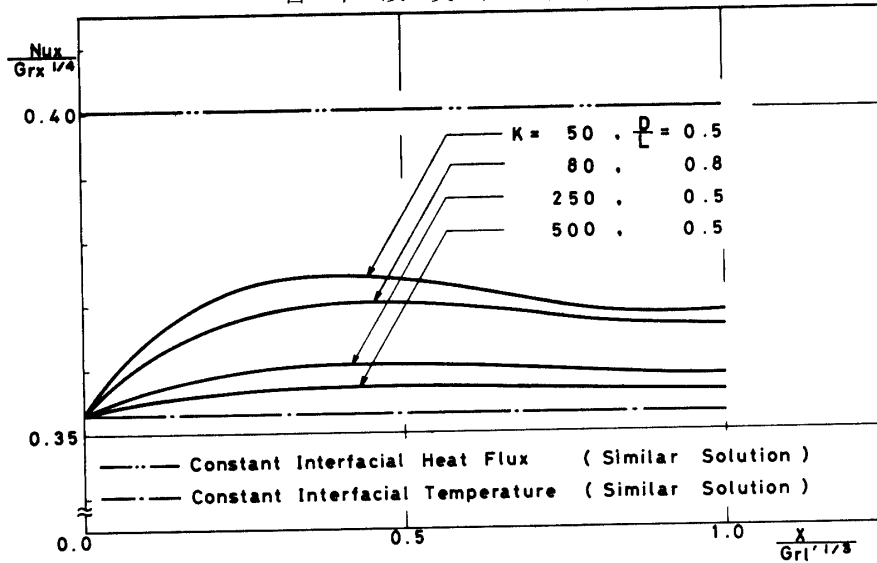


Fig. 3 Effect of the non-dimensional factor $D/(KL)$ on local Nusselt number profiles (Constant temperature at the left side surface of flat plate)

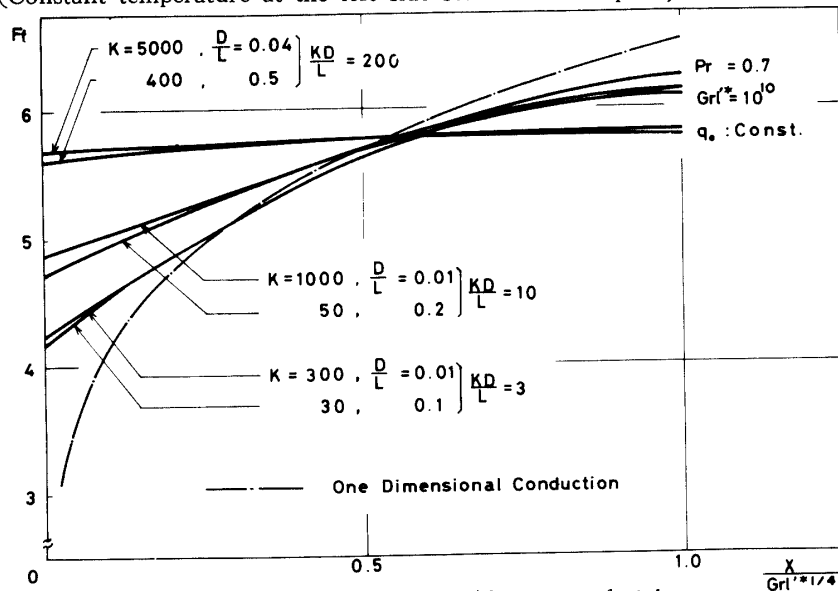


Fig. 4 Effect of the non-dimensional factor KD/L on interfacial temperature profiles (Constant heat flux at the left side surface of flat plate)

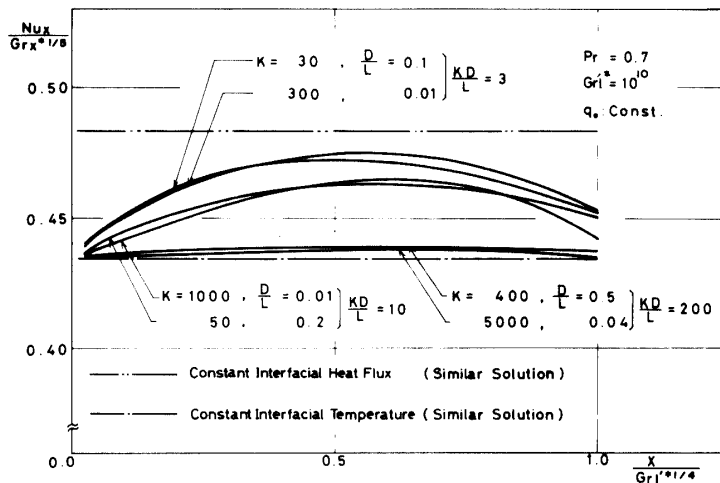


Fig. 5 Effect of the non-dimensional factor KD/L on local Nusselt number profiles (Constant heat flux at the left side surface of flat plate)

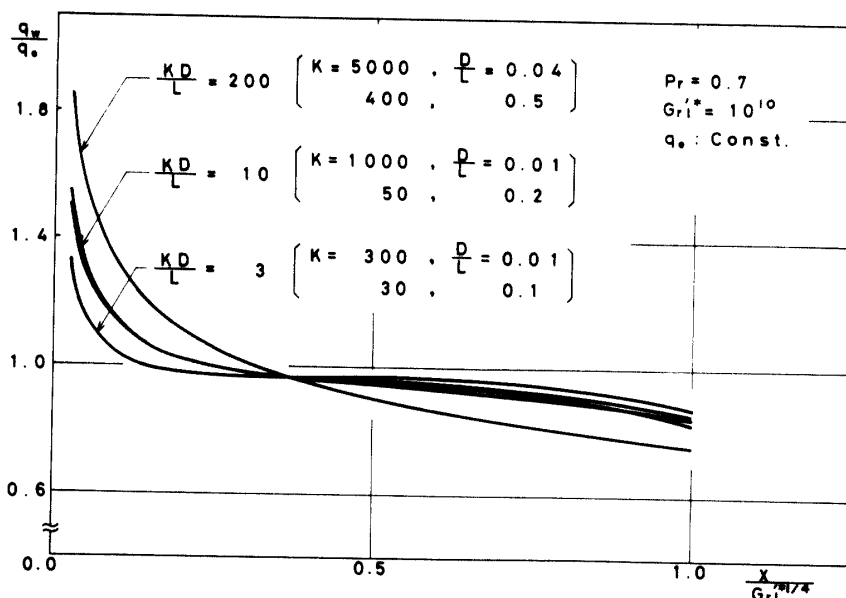


Fig. 6 Effect of the non-dimensional factor KD/L on q_w/q_0 profiles (Constant heat flux at the left side surface of flat plate)

に低目の値を示しているが、 X の小さい所ではその差が大きい。また、(10)式で予測された無次元量 $D/(KL)$ が、界面温度分布を決定する主要な因子であることがわかる。

Fig.3の局所ヌセルト数分布は、一樣界面温度と一樣界面熱流束の中間にあるが、無次元量 $D/(KL)$ の違いによる差は顕著ではない。

Fig.4, Fig.5, Fig.6は、一樣裏面熱流束の場合についての界面温度分布、局所ヌセルト数分布、熱流束比分布を示す。いずれの場合も KD/L が主要な因子であることがわかる。すなわち、この因子が大きい程、界面における状態は、一樣界面熱流束からずれ、一樣界面温度の状態に近づいている。

6. 結 言

固体壁内熱伝導と層流自由対流熱伝達が相互に干渉する固体～流体複合熱伝達の特性におよぼす、固体壁厚さとその熱伝導率の影響を明らかにすることを試み、得られた結果をとりまとめると次の様になる。

1) 一樣裏面温度、一樣裏面熱流束いずれの場合も、界面における温度分布と局所ヌセルト数分布は、一樣界面温度と一樣界面熱流束の温度分布、局所ヌセルト数分布の中間の値をとる。

2) 固体壁厚さとその熱伝導率の影響を示す主要な無次元量は、一樣裏面温度では、 $D/(KL)$ 、すなわち、 $(k_f/k_s) \cdot (d/l)$ の形で、界面における温度場は相関づけられる。

3) 固体壁厚さとその熱伝導率の影響を示す主要な無次元量は、一樣裏面熱流束では、 KD/L 、すなわち、 $(k_s/k_f) \cdot (d/l)$ の形で、界面における温度場は相関づけられる。

4) いずれの場合も、その無次元量が大きい程、界面における状態が、裏面において与えられた熱条件からずれる程度は大きくなる。

5) 一次元熱伝導によって求められた界面温度分布は、 X の大きい所では、わずかだけ高目の温度を与えるが、 X が小さくなると、その差は、より大きくなる。

最後に、昭和52年度卒業研究として一樣裏面熱流束の場合の計算を担当していただきました、機械工学科秋吉孝紀君に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) P. Payver: Int. J. Heat Mass Transfer, 20, 431 (1977)
- 2) A.V. Luikov: Int. J. Heat Mass Transfer, 17, 257 (1974)
- 3) 榊原三樹男, 森茂, 谷本明: 化学工学, 37, 73 (1973)
- 4) G.S.H. Lock and J.C. Gunn: J. Heat Transfer, 90, 63 (1967)
- 5) M.D. Kelleher and K.T. Yang: Applied Scientific Research, 17, 249 (1967)
- 6) A.E. Zinnes: J. Heat Transfer, 92, 528 (1970)
- 7) Zeev Rotem: Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1679 (1972)
- 8) G.S.H. Lock and R.S. Ko: Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 2087 (1973)

9) T. Kao, T. Domoto and H. G. Elrod: J. Heat Transfer, **99**, 72 (1977)

10) H.S. Carslaw and J.C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, (1959) p.166

(昭和53年 4 月 15 日 受理)