

# 非保存トルクを受ける柱の弾性安定性について

會田 忠義\*・末岡 彰\*\*

## Elastic Stability of Columns Subjected to the Nonconservative Torque

Tadayoshi AIDA and Akira SUEOKA

### Abstract

Equations of motion of the column subjected to the nonconservative torque were derived considering the deformation of axis in this paper. Eigenvalue curves and vibration modes of the columns with boundary conditions of four kinds, which were subjected to the concentrated axial torque, concentrated tangential torque, uniformly distributed axial torque and uniformly distributed tangential torque, were evaluated from above equations of motion and nonconservative instability of them became evident. Furthermore, it became clear that the columns of case II-(a) and IV-(a) occurred the unstable phenomenon of divergence form and the columns subjected to the uniformly distributed torque occurred the unstable one of flutter form.

### 1. まえがき

軸トルクを受ける柱の座屈に関する研究は A.G. Greenhill<sup>1)</sup> により始まり、円形断面に相当する 2 軸対称断面をもつ柱の座屈公式は Greenhill の公式として広く用いられてきた。Greenhill は静的解析法により臨界値を求めたため、一部の境界条件については、柱が非保存系となるため誤った結果を与えることとなり Ziegler<sup>2)</sup> および Troesch<sup>3)</sup> により動的解析法を用いて修正されてきた。

軸トルクは偶力を発生させる力により性質の異なるものとなり、Ziegler<sup>4)</sup> は柱に作用するトルクを軸トルク (axial torque), 接線トルク (tangential torque), 準接線トルク (quasitangential torque), 半接線トルク (semitangential torque) などに分類している。ここで、後者の二つのタイプは保存荷重であるが、前者の二つのタイプは柱の境界条件により非保存荷重となり得る。

集中軸トルク, 準接線トルクあるいは半接線トルクを受ける種々の境界条件をもつ柱に対する Greenhill 公式の座屈係数は、現在のところ、既述の円断面に相当する 2 軸対称断面についてのみ明らかにされている<sup>5)</sup>。柱断面の直交主軸に関する曲げ剛性が異なる柱に対す

る安定性は明らかにされていない。さらに、本研究で取り扱うような集中接線トルク, 等分布軸トルクあるいは接線トルクに対する安定性も明らかにされていない。

本研究は Fig.1 に示すトルクと境界条件をもつ柱を対象とし、変形の影響を考慮した柱の曲げ振動の運動方程式を導き、差分法を用いて固有値曲線と振動モードの変化状態を求め安定性を調べたものである。調査に当たって、断面主軸に関する曲げ剛性の変化にともなう挙動も明らかにした。

### 2. 運動方程式と境界条件

初期ねじれない柱がトルクを受け Fig.2 のように変位して、たわみ振動している状態を想定する。図中の  $(x, y, z)$  は全体座標軸,  $(\xi, \eta, \zeta)$  は柱の S 点の断面主軸および接線方向に一致させた主軸座標軸である。

今,  $s_0 \sim s$  点でつりあい式を立てると (Fig.3 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}(s_0) + \int_{s_0}^s \mathbf{q}(t) dt + \mathbf{K}(s) &= 0 \\ \mathbf{M}(s_0) + \mathbf{M}(s) + \{ \mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}(s) \} \times \mathbf{K}(s_0) + \int_{s_0}^s \mathbf{m}(t) dt \\ + \int_{s_0}^s \{ \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s) \} \times \mathbf{q}(t) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

ここで、

$\mathbf{M}(s_0), \mathbf{M}(s)$  :  $s_0, s$  点の材端モーメント,

\* 土木工学科

\*\* 建設省九州地方建設局

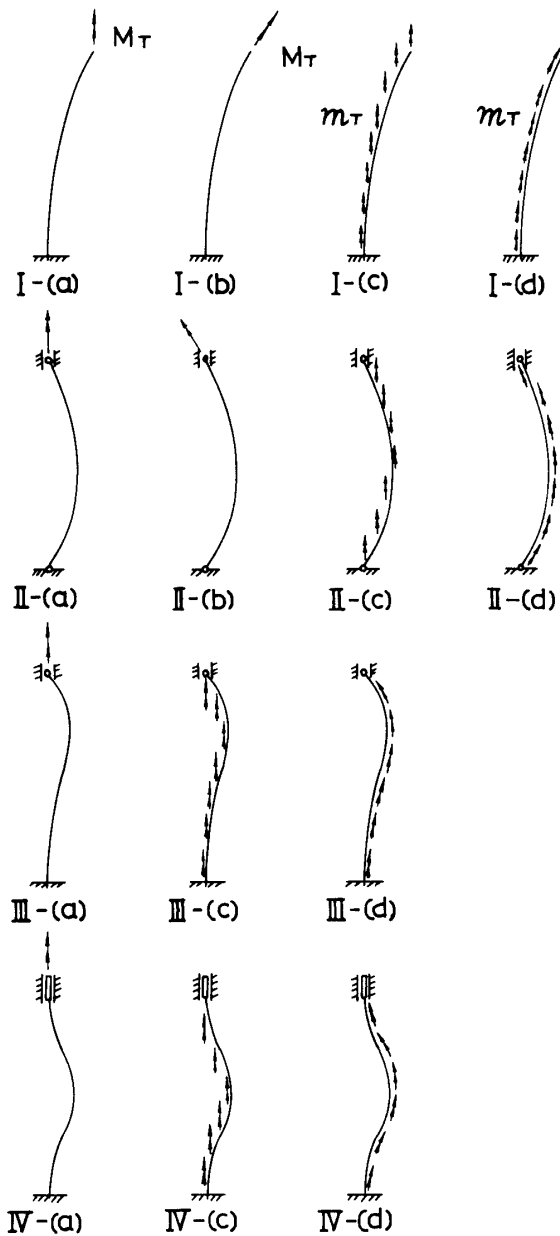


Fig. 1 Columns subjected to the torque

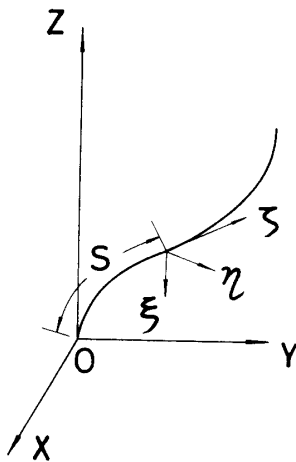


Fig. 2 Coordinates of system

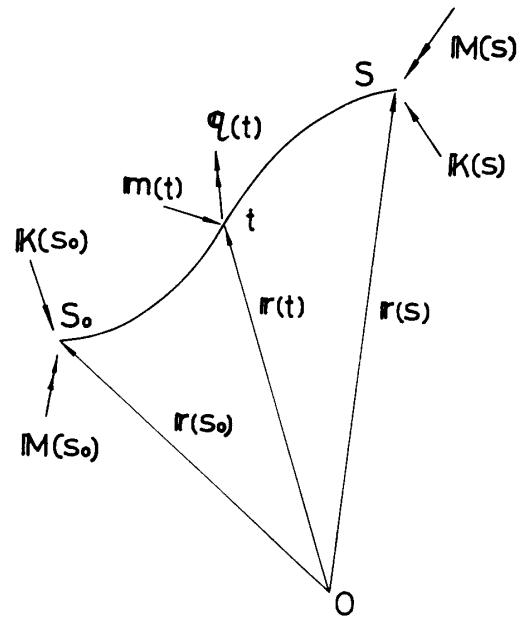


Fig. 3 Forces and moments acting on the Column

$K(s_0), K(s)$  :  $s_0, s$  の材端力,  
 $m(t)$  :  $t$  点の分布外部モーメント,  
 $q(t)$  : " の分布荷重,  
 $r(s_0), r(t), r(s)$  : 各点の位置ベクトル.

式(1)を  $s$  で微分し,  $M(s), K(s), m(s)$  および  $q(s)$  を次のように全体座標軸方向成分で表わすとき,

$$M(s) = (M_x, M_y, M_z), \quad K(s) = (K_x, K_y, K_z)$$

$$m(s) = (m_x, m_y, m_z), \quad q(s) = (p_x, p_y, p_z)$$

次のように整理される.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{ds} + p_x &= 0, & \frac{dM_x}{ds} + v_y K_z - v_z K_y + m_x &= 0 \\ \frac{dK_y}{ds} + p_y &= 0, & \frac{dM_y}{ds} - v_x K_z + v_z K_x + m_y &= 0 \\ \frac{dK_z}{ds} + p_z &= 0, & \frac{dM_z}{ds} + v_x K_y - v_y K_x + m_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで,  $(v_x, v_y, v_z)$  は単位接線ベクトルの成分を表わす.

一方, 曲げモーメントおよびねじりモーメントは,  $\alpha$  および  $\beta$  をそれぞれ  $\xi$  および  $\eta$  軸に関する曲げ剛性,  $\nu$  をねじり剛性とするとき, 微小変形に対して次の式を満たす.

$$M_\xi = \alpha \chi_\xi, \quad M_\eta = \beta \chi_\eta, \quad M_\zeta = \nu \chi_\zeta \quad (3)$$

$\chi_\xi$  および  $\chi_\eta$  はそれぞれ  $\xi$  および  $\eta$  軸に関する曲率,  $\chi_\zeta$  はねじり率である.

全体座標系における諸量を主軸座標系の諸量に変換する座標変換マトリックスを次式で表わす.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s & -v_y \sin \omega s - v_x \cos \omega s \\ -\sin \omega s & \cos \omega s & v_x \sin \omega s - v_y \cos \omega s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

上式中、 $\omega$  はねじり率であり、本問題ではトルクのみで、軸力が作用しない場合を取り扱うので、 $K_z = p_z = 0$ 、 $M_z = M_c = \nu\omega$ 、 $\chi_z = \chi_c = \omega$ 、 $v_z = 1.0$  とする。すると、(3) 式より全体座標系におけるモーメントは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \alpha\chi_x - \alpha\omega v_x + \nu\omega v_x \\ M_y &= \beta\chi_y - \beta\omega v_y + \nu\omega v_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= -\frac{dv_y}{ds} + \omega v_x \\ \chi_y &= \frac{dv_x}{ds} + \omega v_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、たわみ変形の小さいことより、以下  $s$  を  $z$  で置きかえ、 $v_x = dx/dz$ 、 $v_y = dy/dz$  とする。せん断力  $K_x$  および  $K_y$  は

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -\frac{dM_y}{dz} - m_y = -\beta \frac{d^3x}{dz^3} + m_x \frac{dy}{dz} \\ &\quad - \nu\omega \frac{d^2y}{dz^2} - m_y \\ K_y &= \frac{dM_x}{dz} + m_x = -\alpha \frac{d^3y}{dz^3} - m_z \frac{dx}{dz} + \nu\omega \frac{d^2x}{dz^2} + m_x \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

したがって、たわみ振動の運動方程式は式(2)において、 $p_x = -\mu\partial^2x/\partial t^2$ 、 $p_y = -\mu\partial^2y/\partial t^2$  ( $\mu$ : 柱の単位長さの質量) とおくことにより次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^4x}{\partial z^4} + \nu\omega \frac{\partial^3y}{\partial z^3} - 2m_x \frac{\partial^2y}{\partial z^2} - \frac{dm_x}{dz} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \\ + \frac{dm_y}{dz} = 0 \\ \mu \frac{\partial^2y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4y}{\partial z^4} - \nu\omega \frac{\partial^3x}{\partial z^3} + 2m_z \frac{\partial^2x}{\partial z^2} + \frac{dm_z}{dz} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \\ - \frac{dm_x}{dz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

境界条件は式(5)、(6) および (7) を用いて、次のように表わすことができる。

- $z=0$  において、
- ヒンジ端...  $x=y=M_x=M_y=0$
- 固定端...  $x=y=\partial x/\partial z=\partial y/\partial z=0$
- $z=l$  において、
- 自由端および集中軸トルクを受ける自由端...  $K_x=K_y=M_x=M_y=0$
- 集中接線トルクを受ける自由端...  $K_x=K_y=0$
- $M_x=M_T \cdot \partial x/\partial z$ ,  $M_y=M_T \cdot \partial y/\partial z$
- ヒンジ端および集中軸トルクを受けるヒンジ端...  $x=y=M_x=M_y=0$
- 集中接線トルクを受けるヒンジ端...  $x=y=0$
- $M_x=-M_T \partial x/\partial z$ ,  $M_y=-M_T \partial y/\partial z$
- 固定端...  $x=y=\partial x/\partial z=\partial y/\partial z=0$

### 3. 解析結果と検討

式(8)の解析には柱長を10等分割し、分割要素の中央に質量を集中させ差分法を適用した。解析に当り、曲げ剛性の比を  $\delta = \alpha/\beta$  とし、次に示す無次元振動数および無次元トルクを用いた。

$$\begin{aligned} \text{無次元振動数} \cdots \xi &= \mu l^4 \theta^2 / \beta \\ \text{無次元集中トルク} \cdots \eta_M &= M_T l / \beta \\ \text{無次元分布トルク} \cdots \eta_m &= m_T l^2 / \beta \end{aligned}$$

ここで、 $\theta$  は固有円振動数を表わす。

解析手順は次の通りである。初めに与えられた  $M_T$  あるいは  $m_T$  に対する固有円振動数を求め固有値曲線 ( $\eta \sim \xi$ ) を描く。固有値曲線より不安定はダイバージェンス形かあるいはフラッタ形を判別し、安定から不安定にいたる振動モードの変化状態を調べる。以下各柱に対する解析結果を示す。

#### 3.1 一端固定他端自由柱

集中軸トルク (Case(a))、集中接線トルク (Case(b))、等分布軸トルク (Case(c))、および等分布接線トルク (Case(d)) 作用時の固有値曲線を Fig. 4, 5, 6 および 7 に示す。図より明らかなように、いずれの場合もフラッタ形不安定を起し、 $\delta=1.0$  の場合はゼロでない極く小さいトルクが作用すると、不安定となった。トルクの増加にともなう振動モードの推移を  $\delta=2.0$  の場合について Fig. 8 に示したが、いずれの荷重に対しても類似で、断面の弱軸まわりの曲げと強軸まわりの曲げの一次モードの変形結合により不安定となることが明らかとなった。

#### 3.2 両端ヒンジ柱

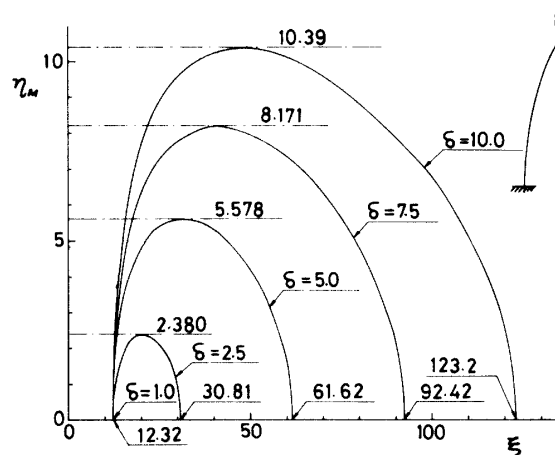


Fig. 4 Eigenvalue curves for column of case 1-(a)

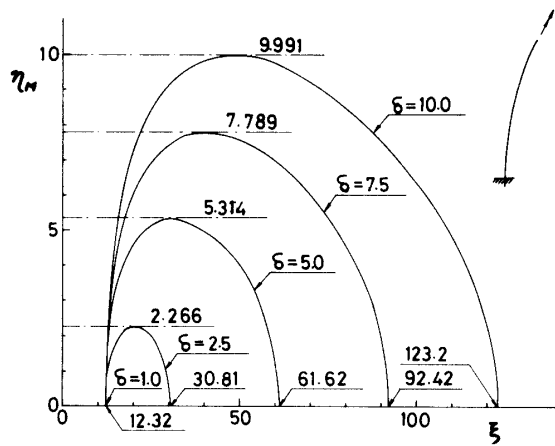


Fig. 5 Eigenvalue curves for column of case I -(b)

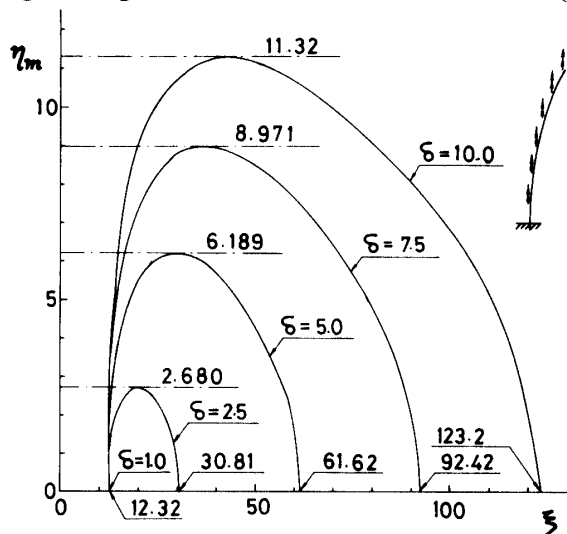


Fig.6 Eigenvalue curves for column of case I -(c)

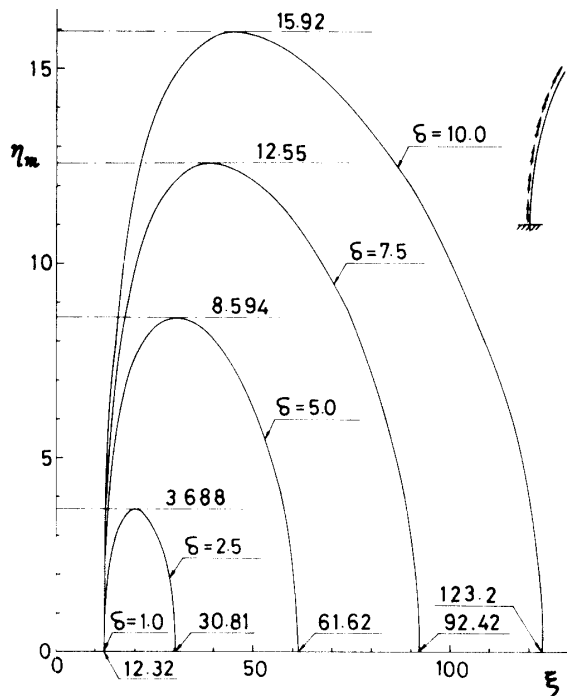


Fig.7 Eigenvalue curves for column of case I -(d)

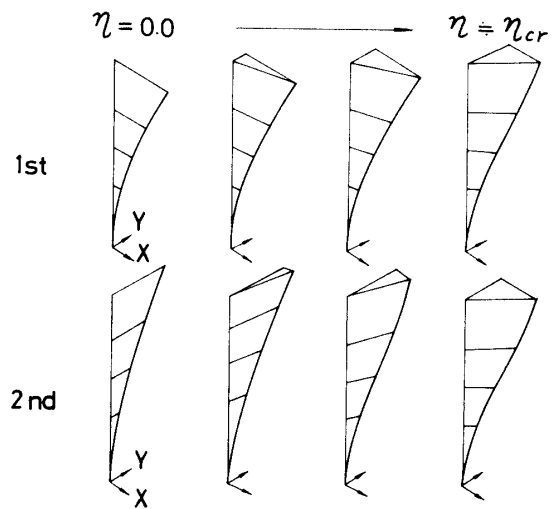
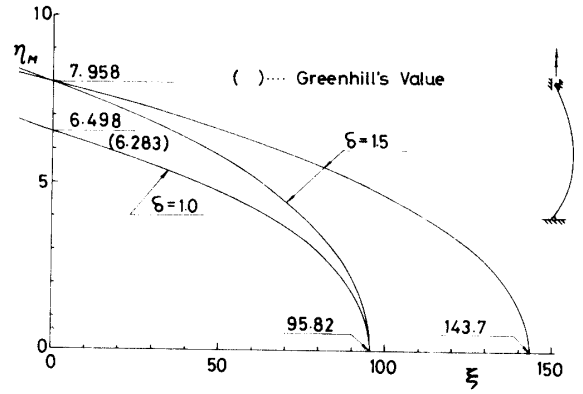
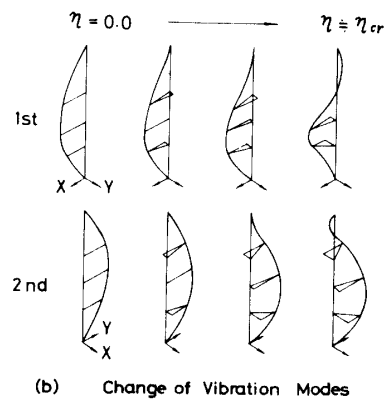


Fig. 8 Change of vibration modes for column of case I

上記四つのケースのトルク作用時の固有値曲線を Fig. 9 (a), 10(a), 11(a) および 12(a) に示す. 集中軸トルクに対しては Fig. 9 (a) より明らかなようにダイバージェンス形不安定を起すが, 他のトルクに対しては, いずれもフラッタ形不安定を起し, フラッタ形



(a) Eigenvalue Curves



(b) Change of Vibration Modes

Fig. 9 Eigenvalues curves and vibration modes for column of case II -(a)

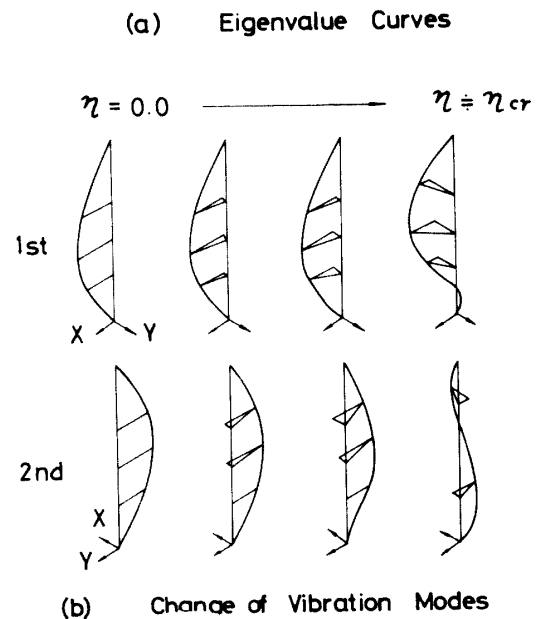
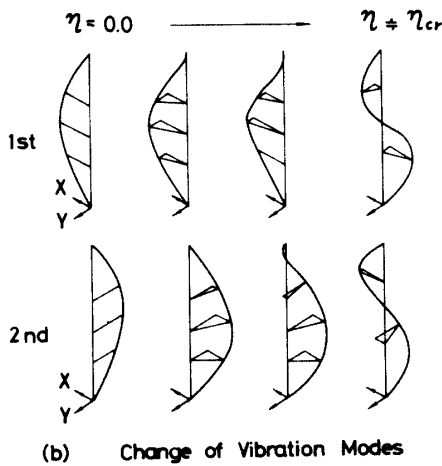
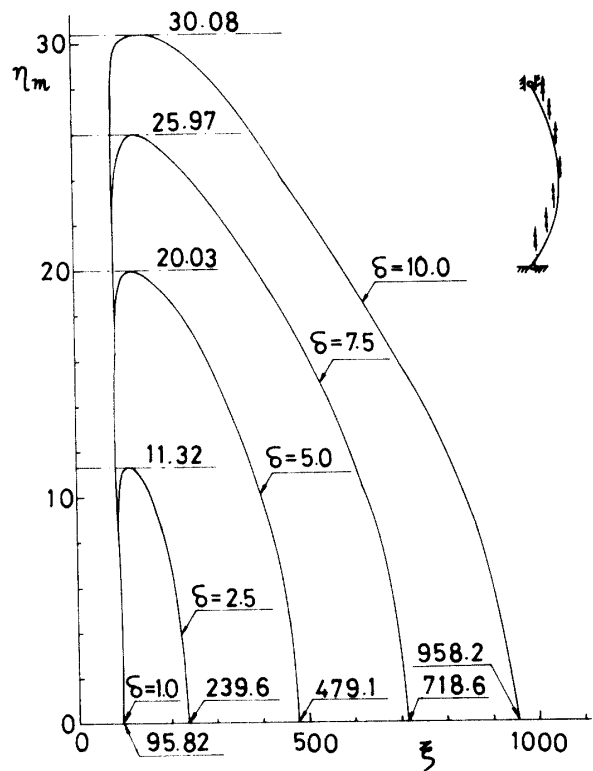
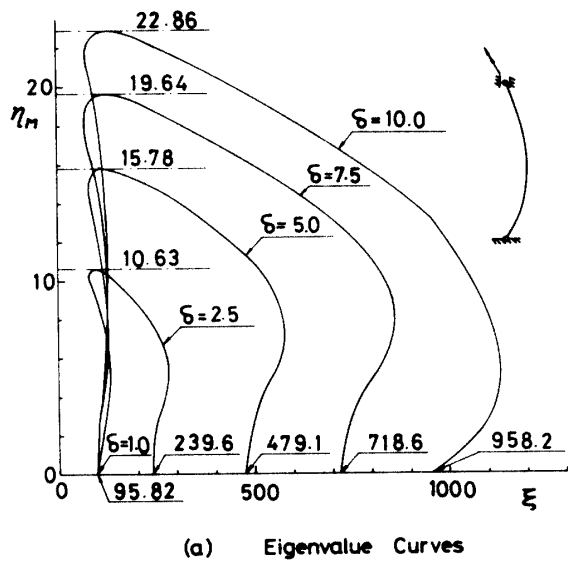


Fig. 10 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case II-(b)

Fig. 11 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case II-(c)

不安定を起す場合はいずれも  $\delta=1.0$  の場合はゼロでない極く微小のトルクにより不安定となることが明らかになった。トルクの増加にともなう振動モードの推移はトルク作用状態で多少異なり、 $\delta=2.0$  の場合を Fig. 9 (b), 10(b), 11(b) および 12(b) に示す。いずれの場合も断面の弱軸まわりの曲げの 1 次モードと強軸まわりの曲げの 1 次モードの変形結合により不安定となった。Fig. 9 (a) 中、 $\delta=1.0$  についての臨界値は Greenhill の値をも同時に記入してある。

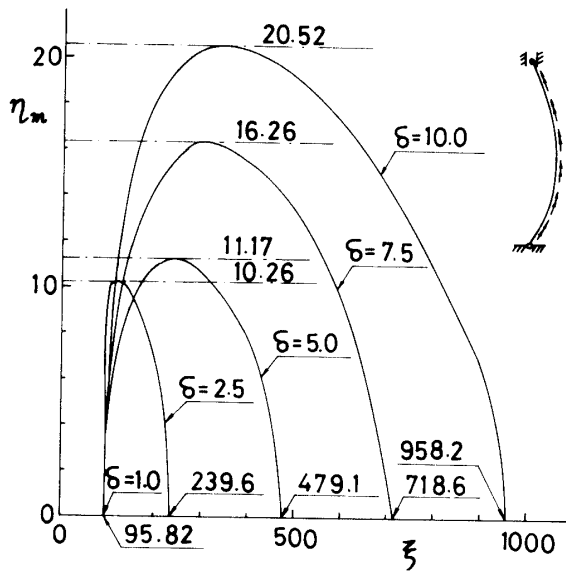
### 3.3 一端固定他端ヒンジ柱

集中軸トルク、等分布軸トルクおよび等分布接線トルク作用時の固有値曲線と振動モードの推移状態 ( $\delta=2.0$ ) を Fig. 13, 14 および 15 に示す。この場合はいずれのトルク作用状態でもフラッタ形不安定を起すことが明らかになった。また、振動モードは断面の弱軸

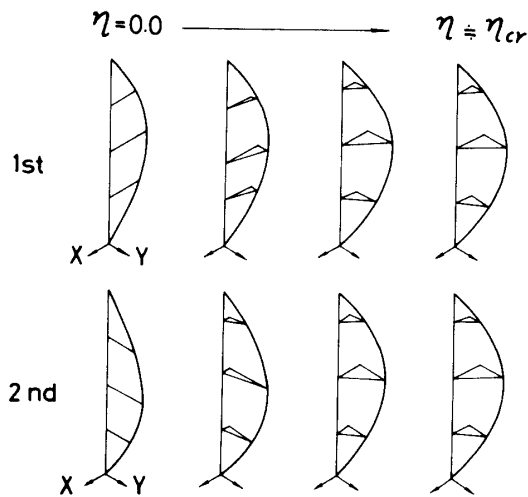
ならびに強軸まわりの曲げの 1 次モードの変形結合により不安定化することが明らかになった。

### 3.4 両端固定柱

集中軸トルク、等分布軸トルクおよび等分布接線トルク作用時の固有値曲線を Fig. 16 (a), 17(a) および 18 に示す。図より明らかなように、集中軸トルクによ



(a) Eigenvalue Curves



(b) Change of Vibration Modes

Fig. 12 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case II-(d)

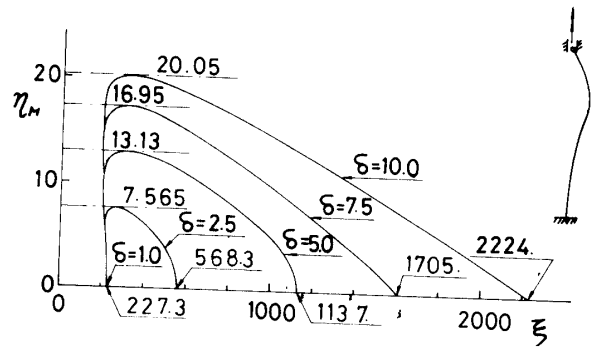
ってダイバージェンス形不安定を起すが、等分布トルクによってはフラッタ形不安定を起す。これらの場合の振動モードの推移の一部 ( $\delta=2.0$ ) を Fig. 16(b) および 17(b) に示す。特に、等分布接線トルク作用時の振動モードの変化は Fig. 17(b) と類似であったので図示していない。いずれの場合においても、 $\delta$  が小さい場合は断面の弱軸まわりの曲げの1次モードと強軸まわりの曲げの1次モードの変形結合により不安定となったが、 $\delta$  が7.0付近より大きくなると、1次モードは断面の弱軸まわりの対称1次モードであるが、2次モードは同軸まわりの逆対称1次モードになり、 $\delta$

が小さい場合とモードの変化状態が変わった。Fig. 16 (a) 中、 $\delta=1.0$  の場合の臨界値には Greenhill の値をも同時に記入してある。

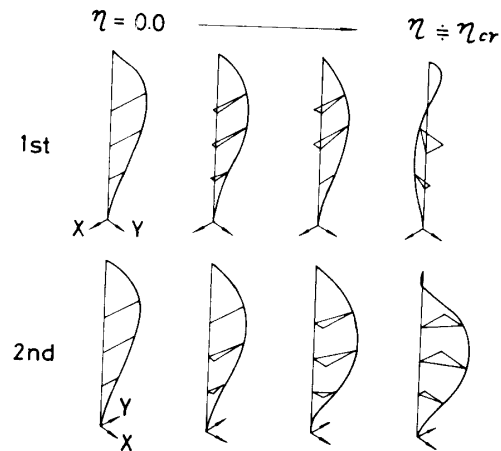
本研究では柱を10等分割し、各要素の中心に質量を集中させて運動方程式を差分法により解析したが、10等分割した場合の無荷重状態の柱の自然振動数は厳密解に対して、Table 1 に示す程度の誤差をもつ。たわみ曲線の変曲点の数が増えるにしたがって、誤差が大きくなる。したがって、トルク作用時においても同様のことが予測されるので、臨界荷重 $\eta$ についても同等の誤差が生ずるものと考えられる。

Table 1 Errors of Natural frequency calculated by finite difference method

boundary condition	1st mode	2nd mode
Free-Fix	0.16	1.89
Pin-Pin	0.82	3.25
Pin-Fix	2.21	5.63
Fix-Fix	3.93	8.28



(a) Eigenvalue Curves



(b) Change of Vibration Modes

Fig. 13 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case III-(a)

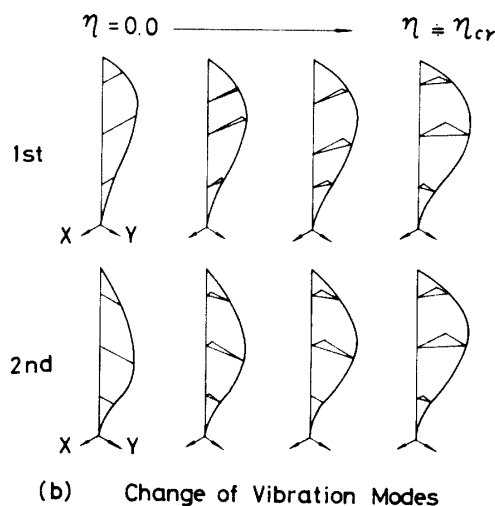
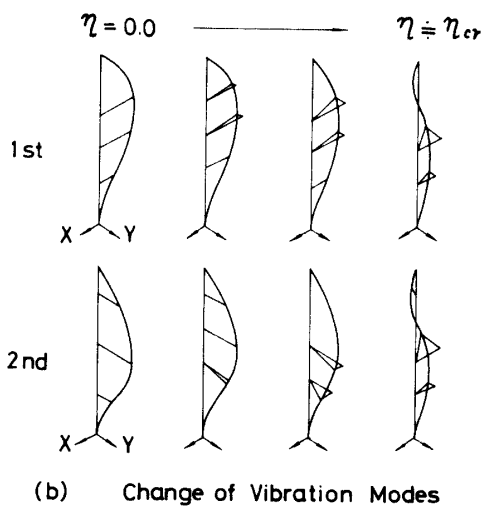
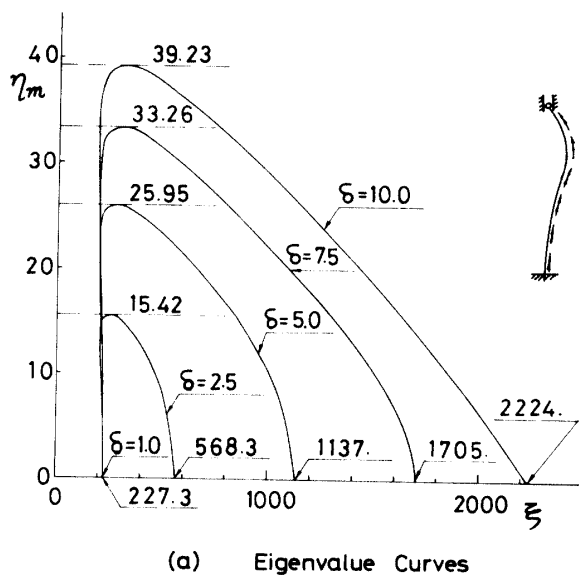
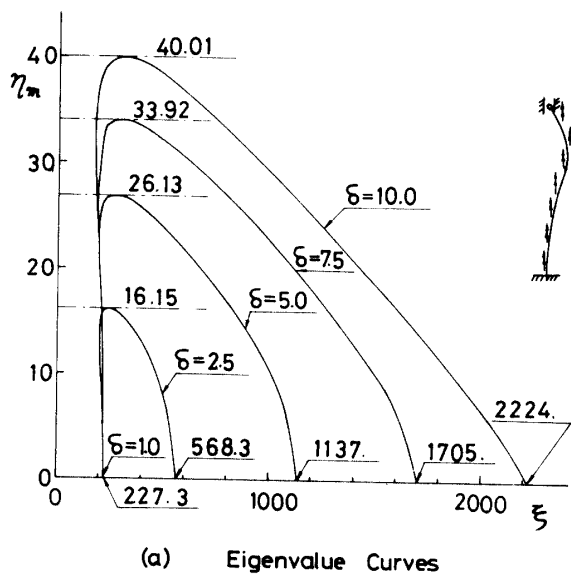


Fig. 14 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case III-(c)

Fig. 15 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case III-(d)

### 3.5 結果の検討

集中トルク作用時は Case II-(a) および IV-(a) のみにダイバージェンス形不安定が起り、その他のケース、特に、等分布トルク作用時はすべてフラック形不安定を起すことが明らかになった。

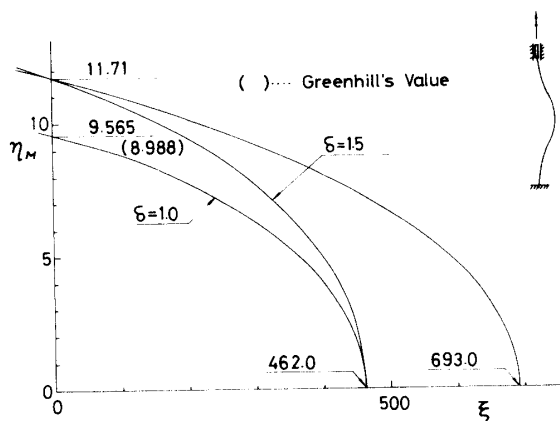
Case II-(a) および IV-(a) については、 $\delta=1.0$  の場合、Greenhill の値と比較が可能であり、両端ヒンジの場合は3.5%、両端固定の場合は6.3%の差異が生じている。これは臨界値近傍の振動モードが曲げ振動の2次モードに類似していることから Table 1 に示す差分法の誤差よりうなずける結果である。

フラッタ形不安定を起す場合はすべて、 $\delta=1.0$  においてゼロでない微小のトルクにより直ちに不定定になる結果が得られた。特に、Case I-(a) および III-(a)

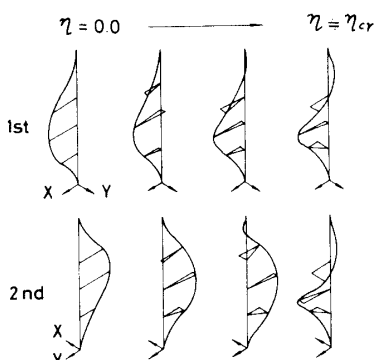
の  $\delta=1.0$  については Ziegler が同一の結果<sup>5)</sup> を与えている。さらに、これらの場合については、 $\delta(\delta \leq 10.0)$  を増加させるにしたがって臨界値は増加する傾向をもつことが明らかになった。

### 4. 結 び

トルクを受け曲げ振動する柱の運動方程式を、変形を考慮することにより求め、集中軸トルク、集中接線トルク、等分布軸トルクおよび等分布接線トルクを受ける4種類の境界条件の柱の固有値曲線と振動モードを求め、非保存的の不安定性を明確にした。特に、Case IV-(a) は保存系であるためダイバージェンス形不安定を起すことは明らかであるが、非保存系に属する Case II-(a) もダイバージェンス形不安定となり、

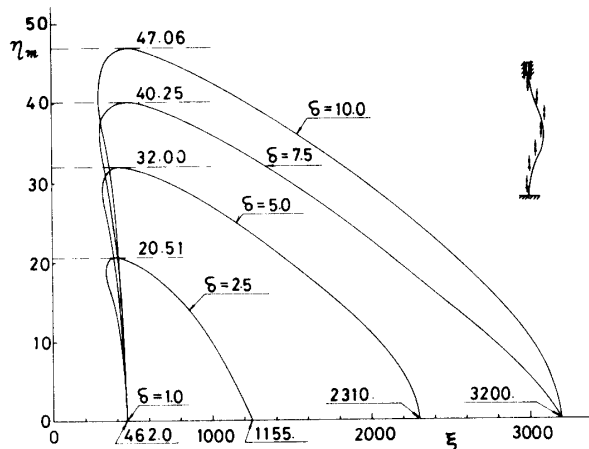


(a) Eigenvalue Curves

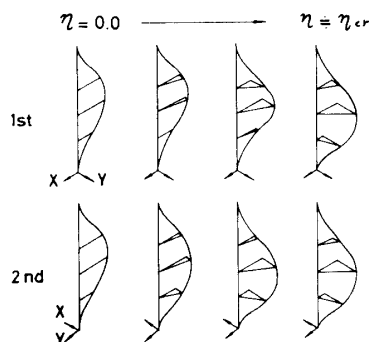


(b) Change of Vibration Modes

Fig. 16 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case N-(a)



(a) Eigenvalue Curves



(b) Change of Vibration Modes

Fig. 17 Eigenvalue curves and vibration modes for column of case N-(c)

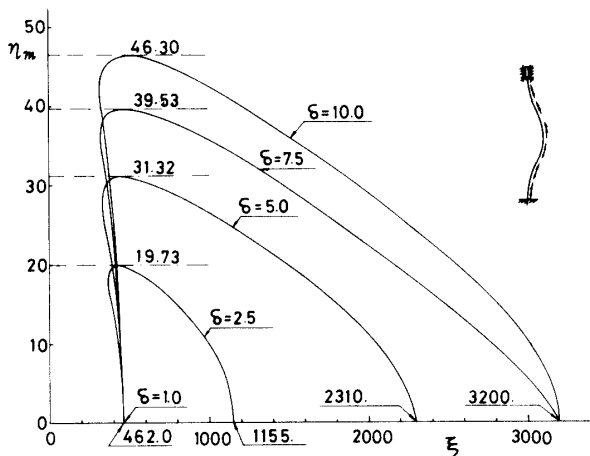


Fig. 18 Eigenvalue curves for case N-(d)

Fig. 9 (a) の固有値が与えられた、この点、他の非保存系に属する Case の不安定性状と異なることが明らかになった。

本研究の数値計算は九州大学大型計算機センタの FACOM M-190 および山口大学電子計算機室の FACOM 230-28 によって行なった。

参考文献

- 1) Greenhill, A.G.: Proc. Inst. Mech. Engrs., (1883), 183.
- 2) Ziegler, H.: Z. angew. Math. Phys., 2, 265(1951).
- 3) Troesch, A.: Ing. Arch., 20, 258 (1952).
- 4) Ziegler, H.: Z. angew. Math. Phys., 3, 96 (1952).
- 5) Ziegler, H.: Principles of Structural Stability, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1977

(昭和 53 年 4 月 15 日 受理)