

熱 輻 射 と 対 流 を 伴 う 熱 伝 導

村川 勝弥*・栗間 諄二*・石川 辰郎**

Heat Conduction Combined with Thermal Radiation and Convection

Katsuhisa MURAKAWA, Junji KURIMA and Tatsuro ISHIKAWA

Abstract

The Jacobi elliptic functions are applied to heat conduction problem combined with thermal radiation and convection which has not been solved ever.

The use of elliptic function is confirmed by the application to flat plate and cylinder.

The non-linear boundary condition of the second kind is able to be reduced to the linear condition of the first kind which is very simple, by the application of the Jacobi elliptic functions.

1. 緒 言

非定常温度分布は熱応力, 熱衝撃, 熱疲労等を考える場合に必ず存在するが, 今迄の研究のほとんどは線型境界条件下での一定物性値問題に限定されていた。このような条件下での熱伝導境界値問題は数学的な解析¹⁾²⁾³⁾も可能で, ラプラス変換, ベッセル関数, グリーン関数等を用いて厳密解をえている。しかし, 条件が複雑になると, 変数が多くなったり, 高次化したりするので数学的解析⁴⁾は非常に困難となり, 電子計算機を用いての数値的手法⁵⁾が考えられ, 時間的にも精度的にも良い結果⁶⁾⁷⁾を出している。

本論文では, 非線型境界条件をもつ熱伝導問題を数値的に解析する方法として, 中空円柱に於て, 内表面温度が周期的に変化し, 外表面温度が輻射と対流の共存する熱伝達に支配される円筒温度分布を楕円関数を用いる事によって研究した。この楕円関数の使用は, 平板での研究に於て, B. Gay⁸⁾の数値結果との比較, 又, 外表面が対流だけに支配される場合での, 差分法による数値解との比較により考慮された。この結果は Appendix に示す。

記 号

T : 温度
 T_0 : 初期温度
 r : 円管の半径方向距離
 r_1 : 円管の内半径

r_2 : 円管の外半径
 τ : 時間
 ω_0 : 周期
 κ : 温度伝導率
 λ : 熱伝導率
 α : 熱伝達率
 δ : ステファン・ボルツマン係数
 ε : 熱輻射率
 θ : 無次元温度
 ω : // 周期
 t : // 時間
 x : // 距離
 R_1 : // 内半径
 h : ビオー数
 c : 温度定数
 sn : Jacobi の楕円関数
 cn : //
 dn : //
 K : 第一種完全楕円積分
 k : 母数
 k' : 補母数

2. 解 析

円筒内壁温度が周期的に変化し, 外表面で熱輻射と対流による熱伝達を伴う場合の熱伝導基礎方程式及び諸条件は次のようになる。

基礎式

* 機械工学科

** 宇部興産 宇部鉄工所

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

初期条件

$$\tau = 0, \quad T = T_0 \quad (2)$$

境界条件

$$r = r_1, \quad T - T_0 = f(\tau) = c \sin \omega_0 \tau \quad (3)$$

$$r = r_2, \quad -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda}(T - T_0) + \varepsilon \frac{\sigma}{\lambda}(T - T_0)^4 \quad (4)$$

(1) ~ (4) の解析に当って、次のような無次元数を用いる。

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad x = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}, \quad h = \frac{\alpha(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

$$t = \frac{\kappa \tau}{(r_2 - r_1)^2}, \quad N = \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda}(r_2 - r_1)T_0^3$$

すると、基礎方程式及び諸条件は次のようになる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x + R_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5)$$

$$t = 0, \quad \theta = 0 \quad (6)$$

$$x = 0, \quad \theta = f(t) = c \sin \omega t \quad (7)$$

$$x = 1, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta + N\theta^4 \quad (8)$$

ここで第2種の非線型境界条件を簡単にするため、次のような変数で変換を行う。

$$v = \frac{\partial \theta}{\partial x} + h\theta + N\theta^4 \quad (9)$$

すると(5) ~ (8)式は次のように変る。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x + R_1} \frac{\partial v}{\partial x} - 12N\theta^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

$$t = 0, \quad v = 0 \quad (11)$$

$$x = 0, \quad v = \psi(t) = ch \sin \omega t + c^4 N \sin^4 \omega t \quad (12)$$

$$x = 1, \quad v = 0 \quad (13)$$

(10) ~ (13) 式を解法するに当り、解 v を次のようにおく。

$$v = \psi(t) \operatorname{cn}\{Kx, k(t)\} \quad (14)$$

$$k(0) = 1$$

これは

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \operatorname{cn} + \frac{\psi \partial \operatorname{cn}}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\psi K \operatorname{sn} \cdot \operatorname{dn} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\psi K^2 \operatorname{cn}(\operatorname{dn}^2 - k^2 \operatorname{sn}^2) \quad (17)$$

円筒の外表面 $x = 1$ について考えると(15) ~ (17)式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \psi Y \frac{\partial k}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\psi K k' \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (20)$$

又

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -(hX + NX^4) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで

$$X(t) = \theta(x = 1), \quad Y = \frac{\partial \operatorname{cn}}{\partial k}$$

従つて、(10)式は(18) ~ (21)式より

$$\frac{dt}{dk} = \frac{-\psi Y}{\frac{1}{1 + R_1} \psi K k' + 12NX^4(h + NX^3)^2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\therefore t = \int_k^1 \frac{\psi Y}{\frac{1}{1 + R_1} \psi K k' + 12NX^4(h + NX^3)^2} dk \quad \dots\dots\dots (23)$$

次に、 $x = 1$ で $\theta(x) = \theta(1 - a)$ を Taylor 展開すると(5)式は

$$\frac{dX}{dt} = -\psi K k' - h - 4NX^3 + \frac{X}{1 + R_1}(h + NX^3) \quad \dots\dots\dots (24)$$

(22)式と(24)式より

$$\frac{dX}{dk} = \frac{-\psi Y \left\{ -\psi K k' - h - 4NX^3 + \frac{X}{1 + R_1}(h + NX^3) \right\}}{\frac{1}{1 + R_1} \psi K k' + 12NX^4(h + NX^3)^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

∴

$$X = \int_k^1 \frac{\psi Y \left\{ -\psi K k' - h - 4NX^3 + \frac{X}{1 + R_1}(h + NX^3) \right\}}{\frac{1}{1 + R_1} \psi K k' + 12NX^4(h + NX^3)^2} dk \quad \dots\dots\dots (26)$$

(23)と(26)の両式は、 t と X の二つの未知関数をもつ非線型 Volterra 型積分方程式である。この連立方程式は Simpson の 1/3 法則を適用することによって数値積分で解法される。

3. 数値計算および結果

第2種の非線型境界条件をもつ(5) ~ (8)式は Jacobi の楕円関数で解かれ、次に(8)式は $(\theta)_{x=1} = X(t)$ で置換されているが、 $X(t)$ はこの場合、 t の既知関数であるので、 $x = 1$ の位置では、時間 t を与えれば温度 θ が求まる。即ち、(5) ~ (8)式は第一種の境界条件の問題に変えて取り扱う事が出来る。

数値計算は熱輻射と対流が共存する円筒外表面 $r=r_2$ の位置について行い、中空円柱の材料として炭素鋼を使用した。 $c=1$ 、 $\omega_0=2\pi$ として、炭素鋼の温度伝導率 $\kappa=0.036$ (m²/h) の場合の数値結果を Fig. 1 に表わし、外表面が対流だけに支配される場合と比較した。このグラフにおいて対流だけの温度曲線に比べて熱輻射と対流の共存の場合に温度が低く出ているのは、当然ながら熱輻射による壁面からの熱伝達によるものである。

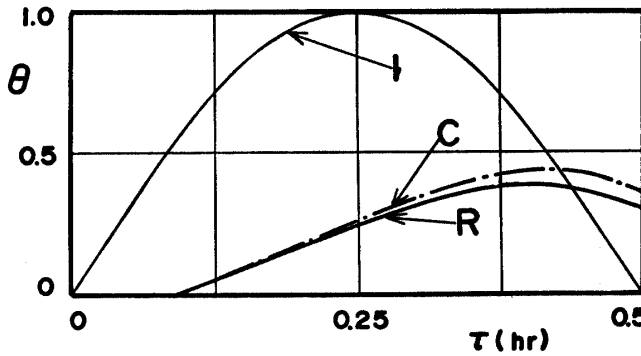


Fig. 1 Temperature profile of Iron.
 I ($r=r_1$),
 C ($r=r_2$) = Convection only
 R ($r=r_2$) = Thermal Radiation and Convection
 $r_1=0.05\text{m}$ $r_2=0.20\text{m}$ $h=1.0$ $N=10$

4. 結 言

熱輻射と対流が共存している第2種の非線型境界条件問題は、普通の有限差分法や積分方程式を用いると多変数や高次の連立方程式になり数値計算が非常に複雑になるが、楕円関数を用いる事によって簡単な第一種の線型境界条件問題に変換でき、数値計算が非常に単純化される。

Jacobi の楕円関数を用いての数値計算は、最終的に母数 k の決定で求められるが、この解析には精度の良いテータ関数が使用できる。

文 献

- 1) Carslaw and Jaeger: 'Conduction of heat in solids, OXFORD (1950)
- 2) M. N. Özisik: Boundary value problems of heat conduction: Int. Textbook co. (1968)
- 3) 川下研介: 熱伝導論 オーム社 (1968)
- 4) 川下研介他: 日本機械学会論文集 42-355, 857 (1971)
- 5) D. L. Collatz: The numerical treatment of differential equations. Springer-Verlag (1966)
- 6) 片山, 斎藤: 日本機械学会論文集 34-263, 1224 (1968)

- 7) 片山, 斎藤: 日本機械学会論文集 39-317, 242 (1973)
- 8) B. Gay: Int. Heat & Mass Transfer 8, 507 (1965)

Appendix

[1] 平板の場合

有限厚さの平板に於て外表面が断熱されていて、内表面が熱輻射を伴う時の無次元熱伝導方程式及び条件は次のようになる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1a)$$

$$t = 0, \quad \theta = 1 \dots\dots\dots (2a)$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = N\theta^4 \dots\dots\dots (3a)$$

$$x = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (4a)$$

境界条件 (3a) は非線型であり右辺の $N\theta^4$ のため数学的に解析する事は困難である。この問題は、B. Gay⁸⁾ 等によって解かれている。

境界条件を簡単にするため

$$v = -\frac{\partial \theta}{\partial x} + N\theta^4 \dots\dots\dots (5a)$$

で (1a) ~ (4a) を変数変換すると

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 12N\theta^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \dots\dots\dots (6a)$$

$$t = 0, \quad v = 1 \dots\dots\dots (7a)$$

$$x = 0, \quad v = 0 \dots\dots\dots (8a)$$

$$x = 1, \quad v = k(t) \dots\dots\dots (9a)$$

これらの式を解くため、Jacobi の楕円関数を用いて v を次のように定める。

$$v = k(t) \cdot sn \{ Kx, k(t) \} \dots\dots\dots (10a)$$

$$k(0) = 1$$

よって

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t} \cdot sn + k \frac{\partial sn}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} \dots\dots\dots (11a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = K^2 k \{ 2k^2 sn^3 - (1+k^2)sn \} \dots\dots\dots (12a)$$

又

$$y = \frac{\partial sn}{\partial k}$$

とおくと

$$y = -k \cdot cn \int_0^x \left(\frac{sn^2}{dn}\right) dx - k^2 cn \int_0^x \left(\frac{sn}{dn}\right) y dx \dots\dots\dots (13a)$$

y についての方程式 (13a) は Volterra 型の積分方程式である。

今、 $x=1$ の位置についてだけの温度を考えるならば、 $x=1$ で $sn=1$ 、 $cn=0$ なので (13a) 式より

$(\partial sn/\partial k) = 0$ である.

よって, (11a), (12a) 式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t} \dots\dots\dots (14a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = K^2 k(k^2 - 1) \dots\dots\dots (15a)$$

(14a), (15a) 式より (6a) 式は

$$\frac{dk}{dt} = K^2 k(k^2 - 1) \dots\dots\dots$$

$$\therefore t = \int_k^1 \frac{1}{K^2 k(k^2 - 1)} dk \dots\dots\dots (16a)$$

$$x = 0, \quad v = \phi(t) = ch \sin \omega t \dots\dots\dots (24a)$$

$$x = 1, \quad v = 0 \dots\dots\dots (25a)$$

(22a) ~ (25a) 式の解法に当り, Jacobi の楕円関数 cn を用いて次のように表わす.

$$v = \phi(t) cn \{Kx, k(t)\} \dots\dots\dots (26a)$$

$$k(0) = 1$$

又 $\frac{\partial cn}{\partial k} = Y$ とおくと

$$Y = k sn \int_0^x \frac{sn^2}{dn} dx + k^2 sn \int_0^x \frac{cn}{dn} Y dx \dots (27a)$$

今, $x=1$ の位置についてだけ考えると, $cn=0, sn=1, dn=k'$ であるから, (26a) (27a) 式を用いて (22a) 式は次のようになる.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{-Kk'}{(1+R_1)Y} \dots\dots\dots (28a)$$

$$\therefore t = \int_k^1 \frac{(1+R_1)Y}{Kk'} dk \dots\dots\dots (29a)$$

(29a) 式を Simpson の 1/3 則で数値積分して, $t-k$ の関係を与える.

次に, $x=1$ の位置で $\theta(x)=\theta$ (1-a) を Taylor 展開して (17a) 式に代入すると

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{1}{1+R_1} + h \right) hX - \phi Kk' \dots\dots\dots (30a)$$

ただし $X = (\theta)_{x-1}$

(28a) と (30a) より

$$\frac{dX}{dk} = - \left\{ \left(\frac{1}{1+R_1} + h \right) hX - \phi Kk' \right\} \frac{(1+R_1)Y}{Kk'}$$

$$\therefore X = \int_k^1 \left\{ \left(\frac{1}{1+R_1} + h \right) \frac{h(1+R_1)}{Kk'} \right\} X Y - \phi(1+R_1)Y \} dk \dots\dots\dots (31a)$$

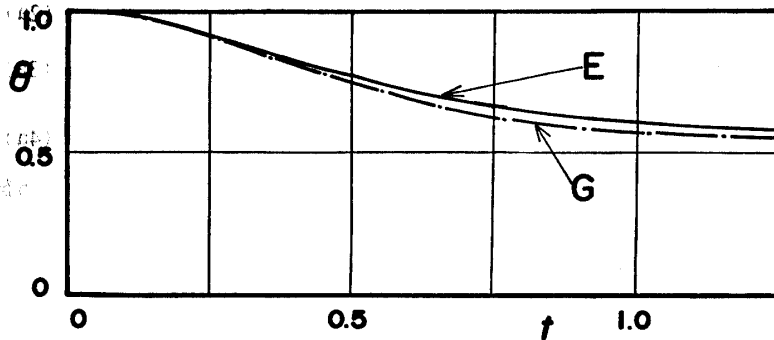


Fig. 2 Comparison.
E=Solution by Elliptic Function
G=Solution by B. Gay
 $x=1.0 \quad N=10$

この (16a) 式の数値計算に Simpson の 1/3 法則を用いてえた結果と B. Gay⁸⁾ の結果の比較を Fig. 2 に示す.

〔2〕 対流だけを伴う円管の場合

中空円筒に於て内表面で温度が周期的に変化して, 外表面は対流熱伝達だけに支配される場合の無次元熱伝導方程式及び諸条件は次のようになる.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x+R_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \dots\dots\dots (17a)$$

$$t = 0, \quad \theta = 0 \dots\dots\dots (18a)$$

$$x = 0, \quad \theta = f(t) = c \sin \omega t \dots\dots\dots (19a)$$

$$x = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \dots\dots\dots (20a)$$

境界条件を簡単にするため

$$v = \frac{\partial \theta}{\partial x} + h\theta \dots\dots\dots (21a)$$

とおくと, (17a) ~ (20a) 式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x+R_1} \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots (22a)$$

$$t = 0, \quad v = 0 \dots\dots\dots (23a)$$

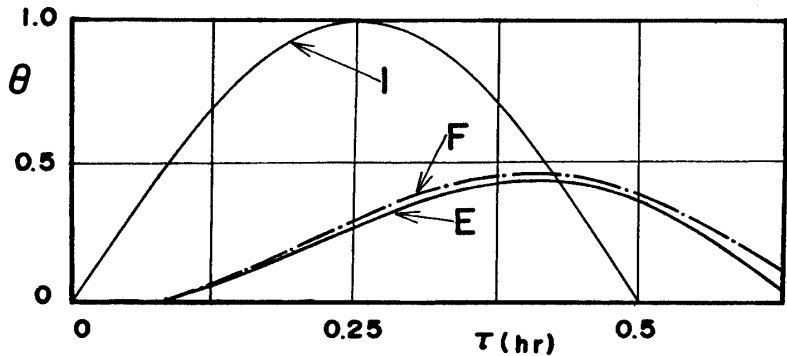


Fig. 3 Comparison
I ($r=r_1$),
E ($r=r_2$) = Solution by Elliptic Function
F ($r=r_2$) = Solution by Finite-Difference Method.
 $r_1=0.05m, r_2=0.15m, h=1.0$

(31a) 式を数値積分して $X-k$ の関係を求め、そして (29a) 式の結果とから、 $X-t$ の関係をえる。

Fig. 3 に外表面 $x=1$ の位置での数値計算結果の温度分布を表わすが、これは中空円柱の材料としては、温度伝導率 $\kappa=0.036$ (m^2/h) の炭素鋼を用い、

$c=1$, $\omega_0=2\pi$ のものである。尚、この Fig. 3 に於て有限差分法による数値結果との比較を行なっている。

(昭和52年10月15日受理)