

温度依存性を伴う熱伝導

村川 勝弥*・栗間 諄二*・石川 辰郎**

Heat Conduction with Variable properties

Katsuhisa MURAKAWA, Junji KURIMA, Tatsuro ISHIKAWA

abstract

The influence of temperature-dependent thermophysical properties on a circular hollow pipe are considered, in which the temperature of the inside surface of the pipe varies periodically with the time and the heat transfer is accompanied on the outside surface of the pipe.

The accuracy of numerical calculations and the propagation of errors of numerical calculations are considered and therefore the forward difference quotient is used as the difference quotient of time and the central difference quotient is used as the co-ordinate difference quotient and the authors accomplish the numerical calculations on the heat conduction problem with which accompanies the variations of thermophysical properties with temperature.

記号

T : 温度
 T_0 : 初期温度
 r : 円管の半径方向距離
 r_1 : 円管の内半径
 r_2 : 円管の外半径
 τ : 時間
 κ : 温度伝導率
 λ : 熱伝導率
 α : 熱伝達率
 ν : 動粘性係数
 θ : 無次元温度
 t : 無次元時間
 x : 無次元距離
 R_1 : 無次元内半径
 R_2 : 無次元外半径
 ω_0 : 周期
 ω : 無次元周期
 h : ビオー数
 c : 温度定数
 Nu : ヌセルト数
 Gr : グラスホフ数
 Pr : プラントル数

l : 時間方向のメッシュ間隔
 m : 距離方向のメッシュ間隔
 $U_{i,k}$: メッシュ点 ($x=x_i, y=x_k$) の値
 $f(t) : c \sin \omega t$
 $f_n(T)$ = 温度の間数
 $F_n(\theta)$: 無次元温度の関数

添字

O : 定数
 air : 空気
 ir : 鉄
 i, k : i 番と k 番の節点の値
 n : n 番の値又は表示

1. 緒言

工業上、使用される材質は、極めて高温から低温での広い範囲の温度に、さらされるので材質の温度の影響（温度依存性）に関する研究が盛んである。

アメリカの Purdue 大学では Thermophysical Properties Research Center¹⁾ が設立され、工業上、必要な熱物性値 (thermophysical property) についての広い分野の研究、資料の検討がなされている。特に蒸気工学や伝熱工学で必要な、エンタルピ、エントロピ、内部エネルギー、密度、蒸気圧力、比熱、粘性係

* 機械工学科

** 宇部興産宇部鉄工所

数, 熱伝導率, 温度伝導率, 熱放射率, プラントル数など, 多方面にわたって多くの研究が行われている様子である。

臨界圧力付近では比体積, エンタルピが急に増加したり, 比熱が極めて急激に増大したり, 逆に熱伝達率がわるくなったり, Van der Waals の式の結果と異なる臨界異常が現われたり, 加熱による加速²⁾が生じたり, 亜臨界圧力では知られなかった現象の存在する事も分りはじめてきた。

水の蒸気の比体積 v (m^3/kg) と温度 T ($^{\circ}K$) 圧力 P (kg/m^2) の関係は

$$v = c_1 T/P - c_2 / (T)^{2.7} - (c_3 + c_4 P - c_5 P^5) / (T)^{8.4} - c_6 P^5 / (T)^{30.5} - c_7 P^{25} / (T)^{147}$$

(谷下の式)³⁾

で表わされ, エントロピは

$$S = S_0 (T) - a_1 \ln P - a_2 P / (T)^{3.7} - (a_3 P + a_4 P^2 - a_5 P^6) / (T)^{9.4} - a_6 P^6 / (T)^{31.5} - a_7 P^{26} / (T)^{148}$$

$$S_0 (T) = b_0 + b_1 \ln T + b_2 T - b_3 / T$$

蒸気の比熱は

$$Cp = C_{p0}(T) + c_1 P / (T)^{3.7} + (c_2 P + c_3 P^2 - c_4 P^6) / (T)^{9.4} + c_5 P^6 / (T)^{31.5} + c_6 P^{26} / (T)^{148}$$

$$C_{p0}(T) = c_{0,0} + c_{0,1} T + c_{0,2} / T$$

圧縮水の比体積は

$$v = f_0(T) + f_1(T)P + f_2(T)P^2 + c_1(T/100)^{6.4}(P + c_2)^{-8} + c_3(T/100)^{14.3}(P + c_4)^{-17}$$

$$f_0(T) = a_0 + b_0(T/100) + c_0(T/100)^2 + d_0(T/100)^3 + e_0(T/100)^4 + f_0(T/100)^{27} - g_0(T/100)^{-31}$$

$$f_1(T) = a_1 + b_1(T/100) + c_1(T/100)^2 + d_1(T/100)^3 + e_1(T/100)^4 + f_1(T/100)^8 + g_1(T/100)^{28.34}$$

$$f_2(T) = a_2 + b_2(T/100) + c_2(T/100)^{13} + d_2(T/100)^{15} + e_2(T/100)^{38.3}$$

液状水銀の比熱は

$$c = c_0 - c_1 t + c_2 t^2 - c_3 t^3 \quad (t = ^{\circ}C)$$

液状水銀の比体積は

$$v = v_0(1 + v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + v_4 t^4) [1 - v_5 t(P - c) - v_6(P - c)]$$

の形で表わされる。

気体の粘性係数⁴⁾は

$$\eta = \frac{a\sqrt{T}}{(1 + \frac{b}{T})^{1/2}} \quad [kgs/m^2]$$

気体の熱伝導⁵⁾は

$$\lambda = \frac{A\sqrt{T}}{(1 + \frac{B}{T})^{1/2}} \quad [kcal/mh^{\circ}C]$$

高圧高温水蒸気の熱伝導率⁶⁾は

$$\lambda = \lambda_0 + a(10^{10}P/T^4 - 1)$$

の形で示される。液体の熱伝導率⁷⁾や耐火機の熱伝導率⁸⁾についても温度の複雑な式で示されているのが普通であり一般的である。

しかし空気では簡単のため, 近似的に次のような, べきの形で示されることがある。たとえば, 熱伝導の方程式⁹⁾として次の式を考えてみれば

$$\frac{1}{r^{m-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{m-1} \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\} = \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$m = 1$ (平板) $m = 2$ (円柱)
 $m = 3$ (球), $k = \lambda, k_0 = \lambda_0$

$$k = k_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^s, \quad c_p = c_{p0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^p,$$

$$\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c_{p0}} = \text{const}, \quad (\rho = \text{const})$$

$$\frac{T}{T_0} = U^{1/(p+1)}, \quad \frac{s-p}{p+1} = n > 0$$

$$\therefore \frac{1}{r^{m-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{m-1} \cdot U^n \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right\} = \frac{1}{\alpha_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\tau = \alpha_0 t, \quad \eta = \frac{r}{A\tau}, \quad g(\eta) = \frac{U(r, \tau)}{\tau^{2A-1/n}}$$

$$\therefore \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^{m-1} \cdot g^n \cdot \frac{dg}{d\eta} \right\} = \frac{2A-1}{n} \cdot g \cdot \eta^{m-1} - A \cdot \eta^m \cdot \frac{dg}{d\eta}$$

空気の値¹⁰⁾, $s = 0, 85, p = 0.19$ によれば $n \approx 0.555$ となり, べきの形においても空気の g の方程式は非線型となって解法はむつかしくなるので, 著者らは nitrogen⁵⁾ ($1000^{\circ}C$ まで) について, $300^{\circ}K \sim 700^{\circ}K$ で良く一致すると言われている次の式

$$\lambda/\lambda_0 = 1 + a_1 t - a_2 t^2 + a_3 t^3$$

で表わされる事に着目して熱物性値を, $t [^{\circ}C]$ の高次式³⁾⁵⁾ (本論文では t^3 の式) で表わすことを試みた。

2. 差分法を用いた数値解析

差分法を用いるに当たって, メッシュを次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + im \\ y_k &= y_0 + kl \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

$$i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$$

(1)式は矩形メッシュの接点, それぞれメッシュ幅 m と l で置換されるメッシュ線 $x_i; y_k$ で構成されるよ

うに定義されている。(x₀, y₀)はメッシュ座標に対して有益に選択された原点である。また、U_{i,k}はメッシュ点 x=x_i, y=y_kでの差分法による値を示している。

導関数に対して、次の三種の差分を考える。

前進差分

$$(U_{i, k+1} - U_{i, k})/l = \Delta_y U_{i, k}/l \quad \dots\dots(2)$$

後退差分

$$(U_{i, k} - U_{i, k-1})/l = \Delta_y U_{i, k-1}/l \quad \dots\dots(3)$$

中央差分

$$(U_{i, k+1} - U_{i, k-1})/2l = \Delta_y (U_{i, k-1} + U_{i, k+1}) \dots\dots(4)$$

二階導関数に対しては、次の中央差分を考える。

中央差分

$$(U_{i+1, k} - 2U_{i, k} + U_{i-1, k})/m^2 = \Delta_x^2 U_{i, k}/m^2 \quad \dots\dots(5)$$

2. 1 物性値が温度に依存しない時

熱伝導の基礎方程式及び条件を次のようにする。

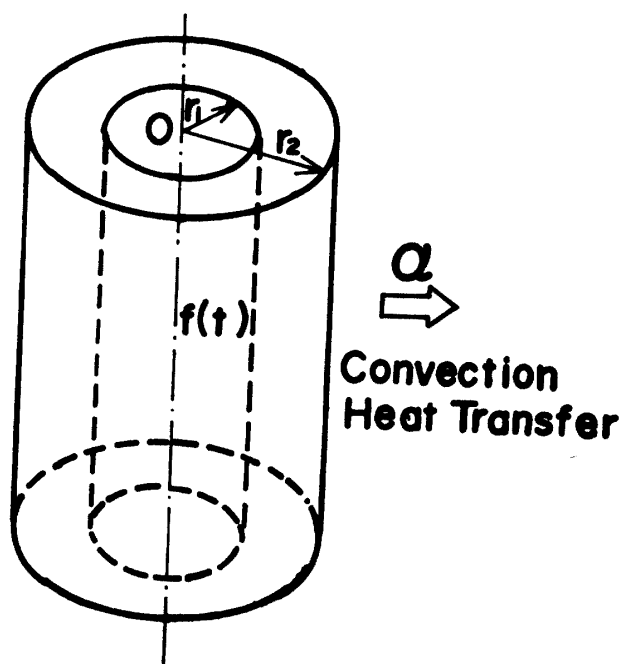


Fig. 1. Coordinate system and scheme of boundary conditions

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \dots\dots(6)$$

$$\tau = 0, \quad T = T_0 \quad \dots\dots(7)$$

$$r = r_1, \quad T - T_0 = f(\tau) = c \sin \omega_0 \tau \quad \dots\dots(8)$$

$$r = r_2, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda} (T - T_0) \quad \dots\dots(9)$$

(6)~(9)式を無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{T - T_0}{T_0}, \quad x = \frac{r}{r_2 - r_1} \\ t &= \frac{\kappa \tau}{(r_2 - r_1)^2}, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (r_2 - r_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

従って基礎方程式及び諸条件式は次のようになる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \dots\dots(11)$$

$$t = 0, \quad \theta = 0 \quad \dots\dots(12)$$

$$x = R_1, \quad \theta = f(t) = c \sin \omega t \quad \dots\dots(13)$$

$$x = R_2, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x} = h \theta \quad \dots\dots(14)$$

(11)式を差分解析するに当り、時間方向導関数を前進差分¹⁾で置換する。又(11)式は半径方向導関数に大きく依存しないので、この導関数を中央差分¹⁾で置換する。その結果(11)式は次のようになる。ただし 2l=m²のメッシュを使用する。

基礎式

$$U_{i, k+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1, k} + U_{i-1, k}) + \frac{m}{4 x_i} (U_{i+1, k} - U_{i-1, k}) \quad \dots\dots(15)$$

次に境界条件は、メッシュ線 x=x_nのように境界 x=R₂のメッシュを選び、半径方向導関数を後退差分で置換する。(14)式は次のようになる。

境界条件

$$x = R_2, \quad U_{n, k} = \frac{U_{n-1, k}}{1 + hm} \quad \dots\dots(16)$$

2.2. 物性値が温度に依存する時

Fig. 1に示す円筒座標系を用い熱物性値が温度に依存する場合、熱伝導基礎方程式および諸条件は次のようになる。

基礎式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &= \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &\quad + \kappa_0 \frac{\partial f_1(T)}{\partial T} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots(17)$$

初期条件

$$\tau = 0, \quad T = T_0 \quad \dots\dots(18)$$

境界条件

$$r = r_1, \quad T - T_0 = f(\tau) = c \sin \omega_0 \tau \quad \dots\dots(19)$$

$$r = r_2, \quad -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (T - T_0) \quad \dots\dots(20)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \kappa_0 (1 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + \dots) \\ &= \kappa_0 f_1 (T) \\ \lambda &= \lambda_{ir0} f_3 (T) \\ \alpha &= \alpha_0 f_4 (T) \end{aligned} \right\} \dots(21)$$

(18)~(21)式の解法に当り無次元化する

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{T - T_0}{T_0}, \quad x = \frac{r}{r_2 - r_1} \\ t &= \frac{\kappa_0 \tau}{(r_2 - r_1)^2}, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (r_2 - r_1) \end{aligned} \right\} \dots(22)$$

とすると、基礎方程式および諸条件式は次のようになる。

基礎式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = f_1(\theta) \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} + \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \dots(23)$$

初期条件

$$t = 0 \quad \theta = 0 \dots(24)$$

境界条件

$$x = R_1 \quad \theta = f(\tau) = c \sin \omega \tau \dots(25)$$

$$x = R_2 \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x} = h \theta \dots(26)$$

ここで

$$\begin{aligned} h &= \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (r_2 - r_1) \\ &= \frac{\lambda_{air}}{\lambda_{ir}} \cdot \frac{\alpha}{\lambda_{air}} \cdot (r_2 - r_1) \\ &= \frac{\lambda_{air}}{\lambda_{ir}} \cdot Nu_{air} \end{aligned} \dots(27)$$

水平円柱での自然対流を考えると、McAdams¹³⁾の式より

$$Nu = 0.53 (Gr \cdot Pr)^{1/4} \dots(28)$$

$$h = \frac{\lambda_{air}}{\lambda_{ir}} \cdot 0.53 (Gr \cdot Pr)^{1/4} \dots(29)$$

垂直円柱については、Saunders¹⁴⁾の式より

$$Nu = 0.59 (Gr \cdot Pr)^{1/4} \dots(30)$$

$$h = \frac{\lambda_{air}}{\lambda_{ir}} \cdot 0.59 (Gr \cdot Pr)^{1/4} \dots(31)$$

(23)式を差分解析するに当って、時間方向導関数を前進差分¹¹⁾、半径方向導関数を中央差分¹¹⁾で置換すると次のようになる。

基礎式

$$\begin{aligned} U_{i,k} &= f_1(\theta) \cdot \frac{l}{m^2} \{ U_{i+1,k} - 2 U_{i,k} + \\ &U_{i-1,k} + \frac{m}{x_i} \cdot (U_{i+1,k} - U_{i-1,k}) \} + \\ &U_{i,k} + f_1'(\theta) \left(\frac{l}{4m^2} \right)^2 (U_{i+1,k} - U_{i-1,k})^2 \end{aligned} \dots(32)$$

境界条件はメッシュ線を、 $x = x_n$ のように境界 $x = R_2$ のメッシュを選び、そして半径方向導関数を後退差分によって置換する。その結果(26)式は次のように表わせる。

$$x = R_2, \quad U_{n,k} = \frac{U_{n-1,k}}{1 + hm} \dots(33)$$

ただし、安定条件として、 $2l = m^2$ のメッシュを使用する。

(32)式と(33)式を収束するまで同時反復法で反復する。その結果として収束した値が求める値となる。

3. 数値計算および結果

数値計算は熱伝達の行なわれる、 $r = r_2$ の外表面の位置について行い、中空円筒の材料としては Armco 鉄を使用した。又、定数、熱物性値¹²⁾は次のように決定した。

温度定数 c	$c = 1$
周期 ω_0	$\omega_0 = 2\pi$
鉄の温度伝導率 κ ...	$\left\{ \begin{aligned} \kappa_0 &= 0.07128 \text{ (m}^2/\text{hr)} \\ \kappa &= \kappa_0 F_1(\theta) \end{aligned} \right.$
鉄の熱伝導率 λ_{ir} ...	$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{ir0} &= 62.28 \text{ (kcal/mh}^\circ\text{c)} \\ \lambda_{ir} &= \lambda_{ir0} F_3(\theta) \end{aligned} \right.$
空気の熱伝導率 λ_{air}	$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{air0} &= 0.0221 \text{ (kcal/mh}^\circ\text{c)} \\ \lambda_{air} &= \lambda_{air0} F_4(\theta) \end{aligned} \right.$
空気の動粘性係数 ν ...	$\left\{ \begin{aligned} \nu_0 &= 0.163 \times 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{s)} \\ \nu &= \nu_0 F_5(\theta) \end{aligned} \right.$
空気のプラントル数 Pr ...	$\left\{ \begin{aligned} Pr_0 &= 0.71 \\ Pr &= Pr_0 F_6(\theta) \end{aligned} \right.$

ただし

$$F_1(\theta) = 1 - 0.447\theta + 0.0765\theta^2 - 0.0135\theta^3$$

$$F_2(\theta) = -0.447 + 0.1530\theta - 0.0405\theta^2$$

$$F_3(\theta) = 1 - 0.347\theta + 0.201\theta^2 - 0.126\theta^3$$

$$F_4(\theta) = 1 + 0.840\theta + 0.150\theta^2 - 0.180\theta^3$$

$$F_5(\theta) = 1 - 0.146\theta + 8.292\theta^2 - 5.886\theta^3$$

$$F_6(\theta) = 1 - 1.485\theta + 5.769\theta^2 - 4.311\theta^3$$

なお、数値計算は、山口大学計算機センターの FA COM BOS/VS を使用した。

数値計算結果は、Fig 2 ~ Fig 5 に、外半径を変化させて表わし、物性値が温度に依存する場合と依存しない場合とを比較した。これらのグラフから判るように、肉厚が厚くなる程、温度依存の場合と一定物性値の間の温度の最大値の差が大きくなり、又位相差が大きくなって来ている。これは $F_3 \sim F_6$ の条件下でのビオー数 h は、物性値が温度依存する方が大きくな

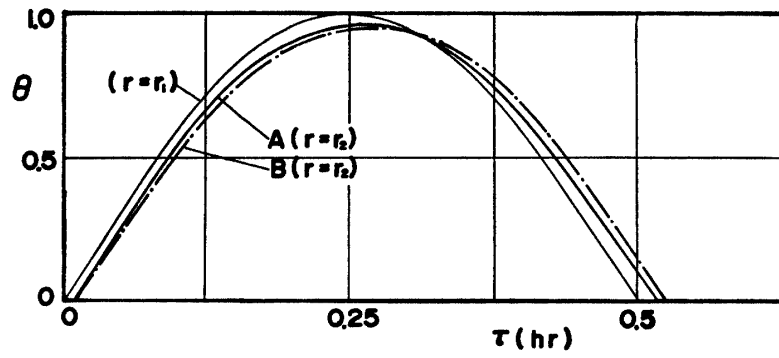


Fig. 2 Temperature Profile of Armco Iron
 $r_1 = 0.05\text{m}$ $A(r=r_2)$: Constant properties
 $r_2 = 0.10\text{m}$ $B(r=r_2)$: Temperature-dependent properties

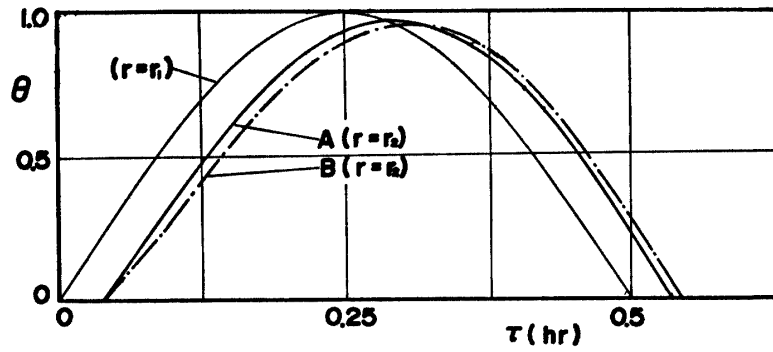


Fig. 3 Temperature Profile of Armco Iron
 $r_1 = 0.05\text{m}$ $A(r=r_2)$ Constant properties
 $r_2 = 0.15\text{m}$ $B(r=r_2)$: Temperature-dependent properties

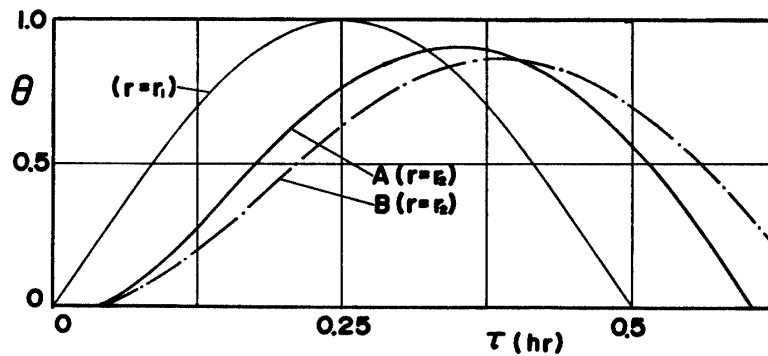


Fig. 4 Temperature profile of Armco Iron
 $r_1 = 0.05\text{m}$ $A(r=r_2)$: constant properties
 $r_2 = 0.20\text{m}$ $B(r=r_2)$: Temperature-dependent properties

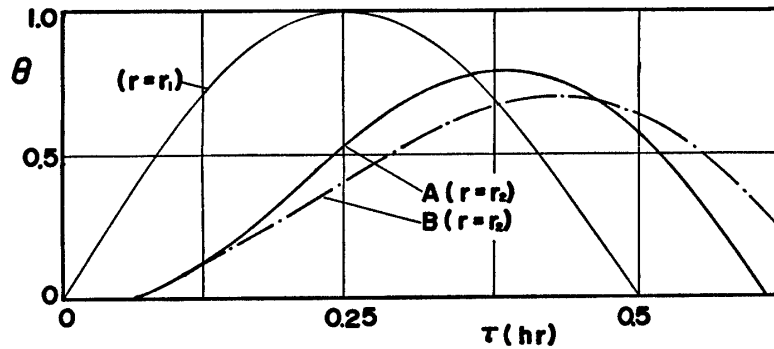


Fig. 5 Temperature profile of Armco Iron

$r_1=0.05\text{m}$ A ($r=r_2$) : Constant properties

$r_2=0.25\text{m}$ B ($r=r_2$) : Temperature-dependent properties

るためと、鉄の温度伝導率 κ は温度上昇と共に減少すると云う二つの理由から来ている。

参 考 文 献

- 1) Y. S. Touloukian : Int, Heat Mass Transfer, 6. 301~307 (1968)
- 2) 平田賢 : 日本機械学会論文集40, 1363 (1974)
- 3) 谷下市松 : 工業熱力学基礎編, 裳華房 (1970) p.232, 236, 256
- 4) F. G. Keyes : Trans, A. S. M. E, 73, 589 (1951)
- 5) Y. S. Touloukian : Trans, A. S. M. E, 73, 589 (1951)
- 5) Y. S. Touloukian : Trans, A. S. M. E, 76, 967 (1954)
- 6) F. G. Keyes and D. J. Sandell : Trans, A. S. M. E, 72, 767 (1950)
- 7) Timrot and Vargaftik : J. Tech. phys (U. S. S. R) 10, 1063 (1940)
- 8) Steam, Babcock and Wilcox co., New York (1955)
- 9) M. N. Özisik : Boundary Value problems of Heat Conduction, Int, Textbook Co., (1968)
- 10) W. M. Kays : Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, N. Y. (1966) p. 266
- 11) L. Collatz : The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag (1966)
- 12) Y. S. Touloukian : Thermophysical properties of High Temperature Solid Metal, Vol, 1, 2, 3. (1967)
- 13) 甲藤好郎 : 伝熱概論, 養賢堂 (1975)
- 14) 甲藤好郎, 他 : 熱伝達特論, 裳華房 (1964)

(昭和52年10月15日受理)